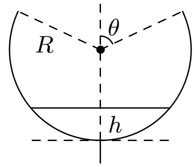
Úloha III.5 ... přípitek u protinožců

10 bodů; (chybí statistiky)

Jakou úhlovou rychlostí ω musíme roztočit skleničku na víno otočenou dnem vzhůru, abychom v ní udrželi její obsah? Stěny skleničky modelujte jako tenkou kulovou slupku o poloměru R, ze které byl odstraněn vrchlík o polárním úhlu $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$. Stojí-li sklenička v klidu na stole, sahá hladina do výšky $h \in \langle 0, R(1+\cos\theta) \rangle$. Skleničkou rotujeme kolem její osy symetrie.

Radka musela čistit koberec.



Úvod

Hladina kapaliny v rotující nádobě bude taková, aby tečná rovina v každém bodě hladiny byla kolmá ke zrychlení působícímu na element kapaliny v tomto bodě. Na ten působí tíhové zrychlení g a odstředivé zrychlení o velikosti $a_o = \omega^2 r$. Označíme-li jako r vzdálenost od osy rotace a z výšku nad nějakou rovinou kolmou na osu rotace, můžeme pro směrnici tečny k hladině v daném bodě psát

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{a_o}{g} = \frac{\omega^2 r}{g}\,, \tag{1}$$

neboli

$$g\,\mathrm{d}z = \omega^2 r\,\mathrm{d}r\,.$$

Po zintegrování rovnice (1) zjistíme, že hladina kapaliny v nádobě má tvar rotačního paraboloidu s předpisem

$$z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C\,, \tag{2}$$

kde C je nějaká konstanta. Tu typicky zafixujeme na základě znalosti tvaru nádoby a množství kapaliny. Konkrétně budeme z měřit od místa pod převrácenou skleničkou, kde by kulová plocha stěny protnula osu z.

V případě skleničky popsané v zadání budeme hledat hodnotu ω takovou, aby stěnu rotující skleničky otočené vzhůru nohama hladina kapaliny protínala dvěma kružnicemi, z nichž jedna se bude shodovat s okrajem skleničky. Takto totiž najdeme nejmenší hodnotu ω takovou, aby se kapalina nevylila. Všimněme si, že pro úhel θ definovaný v zadání musíme nutně předpokládat $\theta \leqslant \pi/2$, jinak není možné protnout stěnu skleničky paraboloidem dle podmínek výše.

Při výpočtech bude výhodné používat bezrozměrné parametry $\rho = r/R$, $\zeta = z/R$, $\gamma = C/R$, $\chi = h/R$ a rotační parametr

$$\sigma = \frac{\omega^2 R}{g}\,.$$

Pomocí těchto proměnných můžeme rovnici (2) hladiny kapaliny v rotující nádobě přepsat jako

$$\zeta(\rho) = \frac{1}{2}\sigma\rho^2 + \gamma\,.$$

Objem v kapaliny ve skleničce můžeme bezrozměrně parametrizovat jako $\beta = v/R^3$.

Maximální výška kapaliny ve skleničce

Nejprve poznamenejme, že existuje maximální hodnota V objemu v kapaliny ve skleničce, pro kterou ještě existuje konečná hodnota úhlové rychlosti ω, aby se kapalina z převrácené skleničky nevylila. Tomuto objemu odpovídá jistá maximální hodnota H výšky h hladiny kapaliny nade dnem skleničky ve stavu, kdy je v klidu a otočena dnem dolů. Objem V se rovná objemu $V(R,\theta)$ prstýnku, jehož vnitřní povrch je dán pláštěm válce o poloměru $R\sin\theta$ a výšce $2R\cos\theta$ a jehož vnější povrch je dán kulovou plochou o poloměru R. Na vnitřní válcový povrch prstýnku můžeme nahlížet jako na degenerovaný paraboloid, jehož tvar by hladina kapaliny zaujala při nekonečné úhlové rychlosti skleničky ω. Tento prstýnek vznikne tak, že od koule o poloměru R odečteme středový válec (o poloměru $R\sin\theta$ a výšce $2R\cos\theta$) a dvě kulové úseče (o poloměru $R\sin\theta$), které přiléhají na podstavy válce. Pro objem $V(R,\theta) \equiv \mathcal{B}(\theta)R^3$ tedy můžeme psát

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\theta) &= \mathcal{B}_{\text{koule}} - 2\mathcal{B}_{\text{kulová úseč}} - \mathcal{B}_{\text{válec}}\\ &= \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi(2+\cos\theta)(1-\cos\theta)^2 - 2\pi\sin^2\theta\cos\theta\\ &= \frac{4}{3}\pi\cos^3\theta\,.\end{aligned}$$

Pokud objem v překročí hodnotu $V(R,\theta)$, není možné kapalinu ve sklenici otočené dnem vzhůru udržet žádnou konečnou úhlovou rychlostí ω. Objem $v = \beta R^3$ kapaliny ve skleničce zároveň obecně spočítáme jako objem kulové úseče, tedy (v termínech parametru $\chi = h/R$)

$$\beta = \frac{\pi}{3}\chi^2(3-\chi)\,.$$

Maximální výška H v řeči bezrozměrného parametru $\mathcal{X} \equiv H/R$ tedy splňuje rovnici

$$\mathcal{X}^2(3-\mathcal{X}) = 4\cos^3\theta\,. \tag{3}$$

V tomto bodě se zkusme nezaleknout faktu, že se jedná o kubickou rovnici, a pokusme se analyticky vyjádřit $\mathcal{X}$ jako funkci úhlu θ. Je možné si všimnout, že levou stranu rovnice (3) lze přepsat jako

$$\mathcal{X}^2(3-\mathcal{X}) = (1-\mathcal{X})^3 - 3(1-\mathcal{X}) + 2\,.$$

Zavedeme-li proměnnou $x = (1-\mathcal{X})/2$, dostaneme dosazením do (3) rovnici

$$4x^3 - 3x = 2\cos^3\theta - 1\,.$$

Pomohla nám tato substituce? Ano, tedy pokud si vzpomeneme na identitu

$$\cos 3\xi = 4\cos^3\xi - 3\cos\xi$$

pro kosinus trojnásobného úhlu a zároveň si všimněme, že $2\cos^3\theta - 1 \in \langle -1, 1\rangle$ pro $\theta \in \langle 0, \pi/2\rangle$, což znamená, že úhlem ξ můžeme pokrýt všechny povolené hodnoty úhlu θ, a to dokonce trojnásobně. Identifikujeme-li $x = \cos\xi$, dostáváme 3 řešení

$$\mathcal{X}_k(\theta) = 1 - 2\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(2\cos^3\theta - 1\right) + \frac{2\pi k}{3}\right]\,,$$

kde $k \in \{-1, 0, 1\}$. Nakonec se zamysleme, které z těchto tří řešení je fyzikální. Nejprve si uvědomíme, že lze očekávat $H = 2R$ pro $\theta = 0$, protože pro uzavřenou skleničku dokážeme udržet kapalinu i v případě maximálního naplnění. To nám vyloučí řešení dané indexem $k = 0$. Naopak vidíme, že musíme požadovat $H = 0$ pro $\theta = \pi/2$, protože tehdy nedokážeme udržet žádné množství kapaliny při jakékoliv úhlové rychlosti ω, což nám vylučuje i $k = 1$. Fyzikální řešení je tedy dáno indexem $k = -1$. Pro maximální výšku kapaliny ve skleničce ve stavu dnem dolů tedy můžeme psát

$$H(\theta) = R\left\{1 - 2\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(2\cos^3\theta - 1\right) - \frac{2\pi}{3}\right]\right\}.$$

Pro $h > H(\theta)$ neexistuje úhlová rychlost ω, která by dokázala kapalinu ve skleničce otočené dnem vzhůru udržet.

Závislost ω na h a θ

V dalším případě budeme předpokládat $h \leqslant H(\theta)$. Jak jsme popsali v úvodním odstavci, vytíná hladina kapaliny na stěně rotující skleničky otočené dnem vzhůru dvě kružnice, z nichž jedna se shoduje s okrajem skleničky a je dána polárním úhlem θ. Označme jako $\psi > \theta$ polární úhel, který odpovídá druhé kružnici. Stejně jako v případě úhlu θ měříme úhel ψ ze středu kulové plochy skleničky od rotační osy mířící směrem dolů (viz obrázek 1). Protneme-li hladinu ve tvaru paraboloidu s kulovou plochou skleničky, dostáváme pro úhly θ a ψ rovnice

$$\frac{\sigma}{2}\sin^2\theta + \gamma = 1 - \cos\theta\,, \tag{4}$$

$$\frac{\sigma}{2}\sin^2\psi + \gamma = 1 - \cos\psi\,. \tag{5}$$

Pokusme se eliminovat γ a ψ. Odečtením rovnic (4) a (5) od sebe získáme podmínku

$$\frac{\sigma}{2}(\cos^2\theta - \cos^2\psi) = \cos\theta - \cos\psi\,.$$

Uvědomíme si, že pokud předpokládáme $\psi > \theta$, pak na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ platí $\cos\psi < \cos\theta$. Můžeme pak rozdílem kosinů rovnici vydělit a získáme výsledky

$$\cos\psi = \frac{2}{\sigma} - \cos\theta\,, \tag{6}$$

$$\gamma = 1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\sigma\sin^2\theta\,. \tag{7}$$

Dále se zaměřme na výpočet objemu kapaliny v rotující skleničce pro obecnou úhlovou rychlost ω. Tvar kapaliny je dán rotačním tělesem, které je omezeno povrchem paraboloidu a kulovou plochou skleničky. Pokud platí $\psi \leqslant \pi/2$, můžeme objem tohoto tělesa vyjádřit jako integrál rozdílu z-ových souřadnic bodů na povrchu paraboloidu a koule s vhodnou radiální mírou, kde meze tohoto integrálu jsou dány úhly θ a ψ. Pro názornost si integrál můžeme rozdělit na dvě části: první část β_1 je dána integrálem z polynomu a má význam objemu rotačního tělesa omezeného paraboloidem a rovinou $z = 0$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 2\pi\int_{\sin\theta}^{\sin\psi}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\left(\frac{1}{2}\sigma\rho^2 + \gamma\right)\\ &= \frac{1}{4}\pi\sigma(\cos^2\theta - \cos^2\psi)(2 - \cos^2\psi - \cos^2\theta) + \pi\gamma(\cos^2\theta - \cos^2\psi)\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Od objemu (8) musíme odečíst objem β_2 rotačního tělesa omezeného kulovou plochou skleničky a rovinou $z = 0$, neboli

$$\beta_2 = 2\pi \int_{\sin\theta}^{\sin\psi} \rho \, d\rho \left(1 - \sqrt{1-\rho^2}\right) . \tag{9}$$

Jelikož stále předpokládáme, že $\theta \leqslant \pi/2$, $\psi \leqslant \pi/2$, můžeme integrál (9) vyhodnotit jako

$$\beta_2 = \pi(\cos^2\theta - \cos^2\psi) - \frac{2}{3}\pi(\cos^3\theta - \cos^3\psi) .$$

Naopak pro $\psi > \pi/2$ musíme objem β počítat tak, že k cylindrickému integrálu připočteme objem $\mathcal{B}(\pi - \psi)$. Zároveň bude ale integrál (9) dán výrazem

$$\beta_2 = \pi(\cos^2\theta - \cos^2\psi) - \frac{2}{3}\pi(\cos^3\theta - \cos^3\psi) - \frac{4}{3}\pi\cos^3\theta ,$$

kde poslední člen je přesně roven $\mathcal{B}(\pi - \theta)$. Výraz pro celkový objem β pomocí θ, ψ a γ má tedy stejný tvar nezávisle na hodnotě ψ. Dosadíme-li navíc ze vztahů (6) a (7) za ψ a γ, můžeme β přepsat jako funkci θ a σ. Po několika algebraických úpravách dostáváme kompaktní výsledek

$$\beta = \beta_1 - \beta_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\cos\theta - \frac{1}{\sigma}\right)^3 .$$

Odtud můžeme vyjádřit rotační parametr σ skleničky jako funkci χ a θ. Pro $\theta \in \langle 0, \pi/2\rangle$ a $h \in \langle 0, \mathcal{X}(\theta)\rangle$ dostáváme

$$\sigma(\theta,\chi) = \left\{\cos\theta - \left[\frac{1}{4}\chi^2(3-\chi)\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{-1} . \tag{10}$$

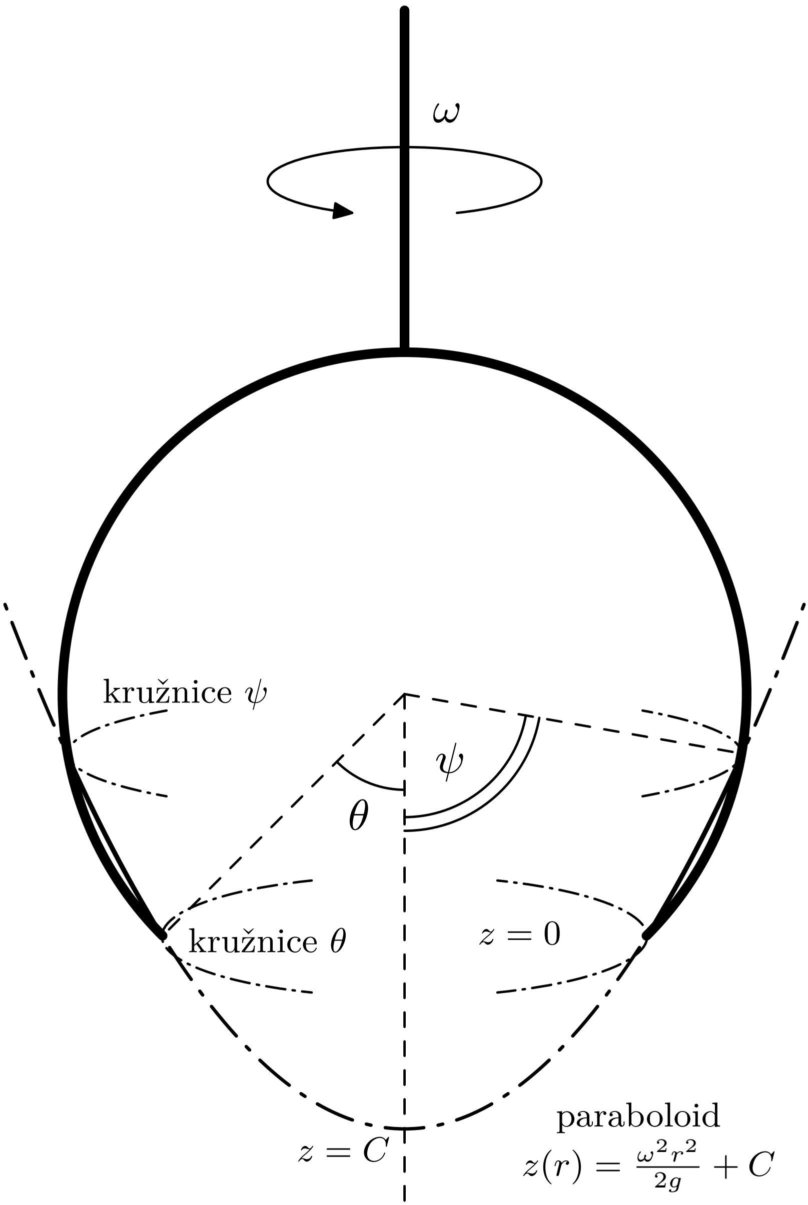
Vidíme, že pro $\chi = \mathcal{X}(\theta)$ skutečně dostáváme $\sigma = \infty$. Funkci danou vztahem (10) můžeme vizualizovat pomocí vrstevnic neboli křivek konstantní hodnoty ω. Výsledný graf vidíme na obrázku 2, kde modrá křivka odpovídá hodnotě $\omega = \infty$ a shoduje se tedy s grafem funkce $\mathcal{X}(\theta)$. Chceme-li, můžeme se rovněž vrátit k rozměrovým veličinám a vyjádřit úhlovou rychlost ω jako funkci h a θ

$$\omega(\theta,h) = \sqrt{g}\left\{R\cos\theta - \left[\frac{1}{4}h^2(3R-h)\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{-\frac{1}{2}} .$$

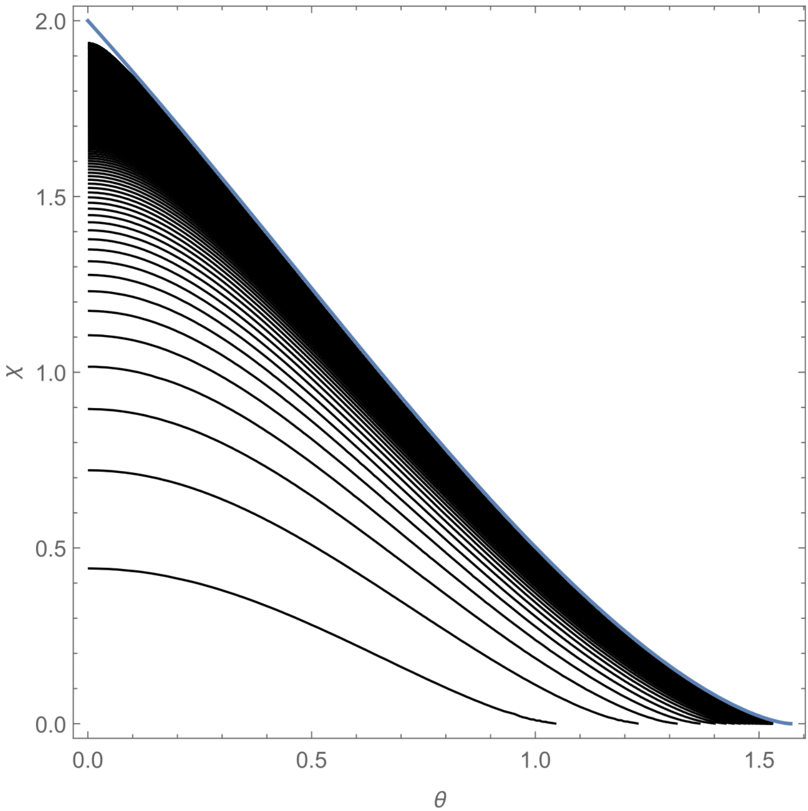
Z grafu vidíme, že $\omega(\theta,h)$ je rostoucí ve všech povolených bodech (θ,h) v jakémkoliv směru, ve kterém θ i h rostou. To je ve shodě s intuicí, že přidáme-li do skleničky více tekutiny nebo pokud upilujeme kus jejího okraje, musíme se skleničkou o to více točit, aby se kapalina nevylila.

Radka Křížová
`radka.krizova@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.



Obrázek 1: Schéma situace.



Obrázek 2: Graf závislosti dané vztahem (10).