Úloha III.4 ... forever Young

7 bodů; (chybí statistiky)

Marek má dvouštěrbinu, jejíž otvory mají zanedbatelnou šířku, jsou velmi vysoké a jejich vzájemná vzdálenost je b. Na štěrbinu dopadá světlo o vlnové délce λ. Blízké stínítko, na kterém se tvoří interferenční obrazec, ujíždí malou rychlostí v pryč od dvouštěrbiny. Jakou rychlostí se bude na stínítku pohybovat maximum m-tého řádu? *Marek soucítil s Mistrem.*

Označme si vzdálenost dvouštěrbiny od stínítka jako x. Setkáme-li se s dvouštěrbinovým pokusem ve středoškolské fyzikální učebnici, většinou uvidíme vztah

$$\Delta y = \frac{x}{b}\lambda\,,$$

kde Δy značí vzdálenost mezi dvěma vedlejšími interferenčními maximy. Tento vztah ovšem platí pouze pro velké vzdálenosti, proto v našem řešení použít nejde – ponechme si tento vztah v paměti, na závěr si skutečně ověříme, že pro maximum m-tého řádu skutečně dostaneme rychlost

$$\widetilde{v_y} = m \cdot \frac{v}{b}\lambda\,.$$

Abychom nalezli řešení úlohy pro blízké stínítko, zamysleme se nejprve nad geometrií celé situace. Interferenční maximum nastává právě když je dráhový rozdíl mezi dopadajícími paprsky roven celočíselnému násobku vlnové délky λ, pro maximum m-tého řádu se tedy bude jednat o rozdíl $m\lambda$. Když budeme měnit polohu stínítka a sledovat křivku, po které se body maxima m-tého řádu v prostoru pohybují, zjistíme, že se jedná o hyperbolu – z definice je totiž právě hyperbola množinou bodů, které mají od dvou ohnisek konstantní rozdíl vzdáleností. Odmysleme si proto na okamžik stínítko a zaměřme se na to, jak tato hyperbola vypadá.

Zaveďme si takový souřadný systém, aby se štěrbiny nacházely v bodech $[0, -b/2]$ a $[0, b/2]$. Nyní nás zajímá, jak bude vypadat hyperbola, jež je množinou bodů, které mají od jednotlivých štěrbin konstantní vzdálenost $m\lambda$. Z poznatků z geometrie kuželoseček víme, že hledáme hyperbolu s délkou hlavní poloosy (polovinou dráhového rozdílu) $m\lambda/2$ a excentricitou (vzdáleností ohnisek od středu) $b/2$, ta bude mít rovnici

$$\frac{4y^2}{m^2\lambda^2} - \frac{4x^2}{b^2 - m^2\lambda^2} = 1\,.$$

Nyní si můžeme uvědomit, co počítáme. Stínítko se vzdaluje rychlostí v ve směru vodorovné osy, můžeme proto psát, že tato rychlost je rovna časové derivaci $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Zkoumaná rychlost bodu maxima m-tého řádu pak bude rovna $v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, kde bod $[x, y]$ leží na naší hyperbole. Pro určení v_y tedy můžeme zderivovat rovnici hyperboly podle času, přičemž x i y považujeme za závislé na čase (a derivujeme tedy vše jako složené funkce). Dostáváme

$$\frac{8y}{m^2\lambda^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{8x}{b^2 - m^2\lambda^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{x}{y}\frac{m^2\lambda^2}{b^2 - m^2\lambda^2}v\,.$$

Z rovnice hyperboly ještě vyjádříme y

$$y = \pm\frac{m\lambda}{2}\sqrt{1 + \frac{4x^2}{b^2 - m^2\lambda^2}}\,.$$

Vyšly zde dvě hodnoty, protože v každém bodě x existují dva body interferenčního maxima. Z důvodu symetrie a pro jednoduchost stačí dále uvažovat jen kladnou hodnotu. Tento výsledek dosaďme do odvozeného vztahu pro v_y a upravme. Dostaneme vztah

$$v_y = \frac{2m\lambda x}{\sqrt{(b^2 - m^2\lambda^2 + 4x^2)(b^2 - m^2\lambda^2)}} v \,,$$

což je již výsledkem úlohy. Vidíme, že rychlost pohybu interferenčního maxima je závislá nejen na očekávaných parametrech, ale také na vzdálenosti od dvojštěrbiny.

Pro poněkud kompaktnější zápis můžeme zahrnout předpoklad, že platí $b \gg \lambda$ – ve skutečných situacích totiž bývá vlnová délka záření oproti vzdálenosti štěrbin zanedbatelná. V takovém případě můžeme použít aproximaci

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m^2\lambda^2}{b^2}}} \approx 1 + \frac{m^2\lambda^2}{2b^2} \approx 1 \,,$$

díky čemuž dostaneme o něco jednodušší výsledek

$$v_y \approx \frac{2m\lambda x}{b\sqrt{b^2 + 4x^2}} v \,.$$

Nakonec, budeme-li navzdory předpokladům ze zadání uvažovat, že se dvouštěrbina nachází daleko a že platí $x \gg b \gg \lambda$, můžeme aproximovat

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2 - m^2\lambda^2}{4x^2}}} \approx 1 - \frac{b^2 - m^2\lambda^2}{8x^2} \approx 1 \,,$$

díky čemuž máme

$$v_y \approx m\frac{v}{b}\lambda = \widetilde{v_y} \,,$$

což odpovídá vztahu odvozenému „naivním“ přístupem na začátku.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.