Úloha III.3 ... necoulombická

6 bodů; (chybí statistiky)

Pták Fykosák objevil v laboratoři dosud neznámý druh interakce. V zapadlé skříni našel malý sférický předmět a zjistil, že pokud do jeho blízkosti postaví hmotný bod o hmotnosti m a pustí jej, vždy se s neznámým předmětem srazí za stejný čas t. Určete, jakou silou je hmotný bod přitahován k neznámému předmětu v závislosti na vzájemné vzdálenosti. Uvažujte, že vše probíhá na vodorovné ploše bez odporových sil, a to v rámci klasické mechaniky. Pták Fykosák navíc neznámý předmět upevnil k podložce, takže se vůči místnosti nepohybuje.

Nápověda: *Zkuste najít analogii s nějakou silou, kterou znáte.*

Pták Fykosák by měl za objev nové interakce dostat Nobelovu cenu.

Nejprve se zkusíme zamyslet, jestli úlohu nezvládneme vyřešit bez počítání integrálů či diferenciálních rovnic. I takové řešení si ale později ukážeme.

Řešení pomocí analogie

Jaké síly v přírodě známe? Například gravitační nebo elektrostatickou. Tam ale platí 3. Keplerův zákon, takže perioda nebo čas srážky závisí na počáteční vzdálenosti. Kdyby byla síla konstantní, z nějaké vzdálenosti r_1 by byl čas letu t_1, ale z větší vzdálenosti r_2 by se hmotný bod za stejný čas přiblížil k předmětu pouze na vzdálenost $r_2 - r_1$. Co kdyby síla rostla lineárně se vzdáleností, jako je tomu u pružiny (neboli u harmonického oscilátoru)? Pružina po natažení začne kmitat s periodou T. A pozor, tato perioda nezávisí na natažení pružiny! Čas, kdy se pružina zkrátí do rovnovážné polohy, je nezávislý na amplitudě natažení. V našem řešení potřebujeme, aby se hmotný bod dostal k předmětu za čas, který je nezávislý na původní vzdálenosti. Můžeme si gratulovat – model harmonického oscilátoru přesně funguje pro řešení naší úlohy!

Označme r okamžitou vzdálenost mezi hmotným bodem a podivným předmětem a r_0 jako počáteční vzdálenost. Je zřejmé, že když pustíme hmotný bod z r_0, má nulovou počáteční rychlost, zatímco maximální rychlost bude naopak v okamžiku $r = 0$. Situace je tedy analogická zkrácení pružiny z natažené do rovnovážné polohy. U předmětu na pružině dojde k překmitu na druhou stranu, zastavení, pohybu zpět k rovnovážné poloze a nakonec do výchozí polohy. Všechny čtyři části trvají stejně dlouho, a to jednu čtvrtinu periody. Cesta z amplitudy do rovnovážné polohy tedy trvá $T/4$, kde T je perioda.

Vztah pro periodu u harmonického oscilátoru je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,,$$

kde m je hmotnost předmětu na pružině a k její tuhost, tedy jakou sílu potřebujeme na natahování pružiny. V našem případě známe $t = T/4$ a hmotnost m, potřebujeme tedy určit k. Dostaneme ji jako

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\pi^2 m}{4t^2}\,.$$

U harmonického oscilátoru je závislost síly na vzdálenosti $F = -kx$, v našem případě pouze přepíšeme x na r, dosadíme za k a dostáváme

$$F(\mathbf{r}) = -\frac{\pi^2 m}{4t^2}\mathbf{r}\,.$$

Záporné znaménko značí vzájemné přitahování. Situaci jsme celou dobu řešili v 1D, ale úloha je sféricky symetrická, takže pracujeme s vektory.

Řešení výpočtem

Celé naše řešení zkusíme podpořit i výpočtem. Jak se ale ukáže, tento výpočet nebude úplně přímočarý a v jednu chvíli stejně budeme muset řešení „uhádnout“. V průběhu se ale pokusíme nastínit, proč jsou všechny zmíněné úpravy pro fyzika vlastně přirozené.

Začneme tím, že si vyjádříme čas, za který dojde ke srážce. Za tím účelem si označíme potenciální energii hmotného bodu vůči poli neznámé síly jako $V(r)$ a zapíšeme zákon zachování energie – ten má tvar

$$V(r_0) = V(r) + \frac{1}{2}mv^2\,.$$

Odsud můžeme vyjádřit rychlost v závislosti na vzdálenosti od předmětu jako

$$v(r) = -\sqrt{\frac{2}{m}\left(V(r_0) - V(r)\right)}\,,$$

kde před odmocninou volíme mínus, protože zatímco rychlost roste, vzdálenost od předmětu se zkracuje. Zmiňme, že aby toto mohlo platit, je nutné, aby potenciální energie směrem od neznámého předmětu rostla.

Čas, za který hmotný bod dorazí k předmětu, je potom

$$t = \int_{r_0}^{0} \frac{1}{v(r)}\,\mathrm{d}r = -\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{0} \frac{1}{\sqrt{V(r_0) - V(r)}}\,\mathrm{d}r = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{0}^{r_0} \frac{1}{\sqrt{V(r_0) - V(r)}}\,\mathrm{d}r\,. \qquad (1)$$

Tento výraz bychom rádi zderivovali podle r_0 a položili rovný nule – tím bychom totiž dokázali, že čas je v závislosti na r_0 konstantní. Bohužel ale zjistíme, že tato derivace ve vší obecnosti neexistuje a situace proto není tak jednoduchá. Pokračujme tedy v úpravách.

Vytkneme $\sqrt{V(r_0)}$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2V(r_0)}}\int_0^{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{V(r_0)}}}\,\mathrm{d}r$$

a zavedeme substituci

$$\frac{V(r)}{V(r_0)} = \sin^2 x\,.$$

Pak

$$\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = V(r_0) 2\sin x \cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Dosadíme zpátky a máme

$$t = \sqrt{\frac{m}{2V(r_0)}}\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\cos x} V(r_0) 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \sqrt{2V(r_0)m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}}\sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Než budeme pokračovat, uvědomme si, že x závisí na r_0, proto opět nemůžeme jen jednoduše derivovat. Musíme si také vyjasnit integrační meze. Pokud je rozdíl $V(r_0) - V(r)$ konečný, tedy v $r = 0$ potenciální energie nediverguje, můžeme položit $V(0) = 0$. Pak $x_1 = 0$. Pro $r = r_0$ je pak

$$\frac{V(r)}{V(r_0)} = 1 = \sin^2 x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Integrujeme tedy výraz

$$t = \sqrt{2V(r_0)m} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}} \sin x \,\mathrm{d}x \,.$$

Touto úpravou jsme zajistili, že zkoumaný integrál má konstantní meze. Nyní potřebujeme, aby byl jeho výsledek roven $d/\sqrt{V(r_0)}$ (kde d je konstanta nezávisející na r_0), aby nezáleželo na počáteční poloze. Vyzkoušíme proto snad nejjednodušší volbu – položme

$$\frac{1}{\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{V(r_0)}} \,, \tag{2}$$

kde $c = 2d/\pi$ je konstanta nezávislá na poloze, která nám zaručí rovnost jednotek.

Za sinus dosadíme ze substituce $\sqrt{V(r)/V(r_0)} = \sin x$, takže máme

$$\frac{1}{\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}} \sqrt{\frac{V(r)}{V(r_0)}} = \frac{c}{\sqrt{V(r_0)}} \,,$$

což upravíme na

$$\sqrt{V(r)} = c\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} \,.$$

Toto je jednoduchá diferenciální rovnice, stačí obě strany integrovat

$$r = 2c\sqrt{V(r)} + C \,,$$

kde $C = 0$, protože $V(0) = 0$. Konečně tedy dostáváme tvar

$$V(r) = \frac{r^2}{4c^2}$$

Potenciální energie je úměrná druhé mocnině vzdálenosti od předmětu, což odpovídá harmonickému oscilátoru!

Dále máme i $r = r_0 \sin x$. Můžeme tedy dosadit do vztahu pro čas

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2r_0^2 m}{4c^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}} \sin x \,\mathrm{d}x = \\ &= \sqrt{\frac{2r_0^2 m}{4c^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{r}{2c^2}} \sin x \,\mathrm{d}x = \\ &= \sqrt{\frac{2m}{4c^2}} \int_0^{\pi/2} 2c^2 \,\mathrm{d}x = \sqrt{2mc^2}\frac{\pi}{2} \,. \end{aligned}$$

Pokud budeme chtít porovnat tento výsledek s výsledkem získaným dříve, srovnáme tvar potenciální energie s energií v harmonickém oscilátoru. Dostáváme

$$\frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{4c^2}r^2 \,,$$

odkud můžeme vyjádřit c^2 jako

$$c^2 = \frac{1}{2k}$$

a dosadit do vztahu pro čas

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,,$$

což je přesně výsledek, který dostáváme i z jednoduché úvahy. Tvar potenciální energie pole je tedy

$$V(r) = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{t^2}r^2$$

a síla se pak chová dle závislosti

$$F = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{t^2}r\,,$$

kde znaménko mínus odpovídá přitažlivé síle.

I matematicky jsme tedy dostali očekávaný výsledek – při řešení jsme ale učinili dva hlavní předpoklady a nemáme proto zaručeno, že jsme našli jediné řešení. Předpokladem, který nás eventuálně dovedl k řešení, byl vztah (2). Ač se mohlo v danou chvíli zdát rozumné něco takového předpokládat, nemáme matematicky dokázáno, že je to jediná možnost – integrandem mohlo být i něco úplně jiného, aby integrál vyšel stejně. Ještě předtím jsme také předpokládali, že můžeme bez újmy na obecnosti položit $V(0) = 0$. Zkusme se proto ještě v rychlosti podívat na případ, kdy potenciální energie v místě předmětu diverguje.

Položme $V(0) = -\infty$ a zvolme nyní $V(\infty) = 0$. V rovnici (1) z odmocniny vytkneme $-V(r)$ a dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{r_0}\sqrt{\frac{-1}{V(r)}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V(r_0)}{V(r)}}}\,\mathrm{d}r\,.$$

Znovu vyzkoušíme substituci, tentokrát

$$\frac{V(r_0)}{V(r)} = \sin^2 x\,,$$

pak

$$-\frac{V(r_0)}{V^2(r)}\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Dosadíme do integrálu a upravíme

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2} V(r_0)\sqrt{\frac{-1}{V(r)}}\frac{1}{\sin x\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}}2\,\mathrm{d}x = -\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2} V(r_0)\sqrt{\frac{-\sin^2 x}{V(r_0)}}\frac{1}{\sin x\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}}2\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} V(r_0)\sqrt{\frac{-1}{V(r_0)}}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{-V(r_0)}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}}\,\mathrm{d}x.$$

Integrujeme od $x_1 = 0$ do $x_2 = \pi/2$. Řešíme tedy podobný problém jako dříve. Zkusme proto opět položit

$$\sqrt{-V(r_0)}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}} = c\,.$$

Úpravou dostaneme

$$\sqrt{-V(r_0)} = c\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,.$$

Integrujeme a získáme

$$\sqrt{-V(r_0)}r = cV(r) + C\,.$$

Tato rovnice však nemůže splňovat podmínku $V(0) = -\infty$, z této části řešení tak tímto jednoduchým předpokladem nový výsledek nedostáváme – to ale neznamená, že žádné řešení neexistuje, pouze jej nelze najít takto snadno.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.