Úloha II.E ... napětí v kuchyni

12 bodů; průměr 7,21; řešilo 78 studentů

Naměřte křivku deformace pro klasické kuchyňské gumičky.

Jarda se bojí, že mu rupnou nervy.

Teoretický úvod

Deformace tělesa je změna rozměrů, tvaru nebo objemu tělesa způsobená vnějšími silami. Deformace se dají rozdělit na dva druhy:

- elastické (pružné), které vymizí společně s působením vnějších sil;
- plastické (tvárné), při kterých těleso zůstane zdeformované i po tom, co přestanou působit vnější síly.

Je několik způsobů, jakými lze těleso deformovat, jako např. tahem, tlakem, ohybem, smykem, kroucením. My budeme v této úloze uvažovat pouze deformaci tahem.

Základní veličinou popisující deformaci je normálové napětí σ a je analogií tlaku v tekutinách. Tato veličina se definuje jako síla F působící kolmo na plochu S v tělese a platí

$$\sigma = \frac{F}{S}\,.$$

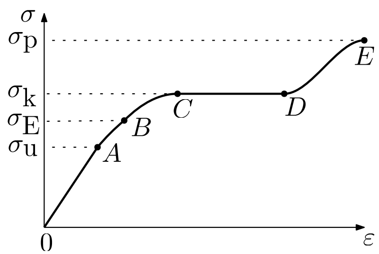
Pro popis deformace se dále zavádí relativní prodloužení ε jako

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}\,,$$

kde Δl je absolutní prodloužení gumičky, l_0 je její původní a l současná délka. Pro pružnou deformaci v tahu platí Hookův zákon, který říká, že napětí v deformovaném tělese je úměrné relativnímu prodloužení jako

$$\sigma = E\varepsilon\,,$$

kde konstanta E je modul pružnosti v tahu a závisí na konkrétním materiálu tělesa.



Obrázek 1: Obecná křivka deformace.

Na obrázku 1 je obecná křivka deformace rozdělená na několik částí: úsek od 0 do A odpovídá pružné deformaci (platí Hookův zákon), po překročení meze úměrnosti σ_u část mezi A a B odpovídá dopružování. Deformace při dopružování je stále vratná, po uvolnění se však vrátí do původního stavu až za nějakou chvíli. Po překročení meze pružnosti σ_E již mluvíme o plastické deformaci. V úseku mezi C a D dochází k tzv. tečení materiálu, kde při překročení meze kluzu σ_k dojde při malé změně napětí k velkému relativnímu prodloužení. Mezi D a E dochází ke zpevnění materiálu, kde po překročení meze pevnosti σ_p už dojde k přetržení tělesa.

My se ale budeme zabývat obecným vztahem mezi σ a ε i pro případ nepružné deformace. Vykreslíme-li tuto závislost do grafu, výsledná křivka se bude nazývat křivkou deformace. Obecná křivka je popsána na obrázku 1. Různé látky mají různé křivky deformace, vzájemné proporce jednotlivých částí křivky mohou být jiné, případně mohou některé části zcela chybět.

Popis experimentu

K naměření křivky deformace kuchyňské gumičky jsme použili následující pomůcky:

- kuchyňská gumička,
- digitální mikroskop Hüntermann HMI-05U (s přesností na 0,002 mm),
- pásmo (s velikostí dílku 1 mm),
- kuchyňská váha First Austria (s přesností na 1 g),
- kyblík na vodu s tenkým uchem,
- nepromokavý pytlík,
- injekční stříkačka.

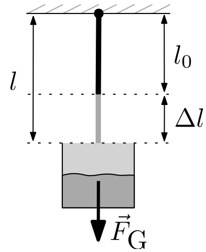
Pro přesnější měření gumičku neprořízneme, a proto její klidovou délku l_0 určíme jako polovinu její celkové délky. Ucho kyblíku, podobně jako úchyt gumičky, považujeme za dostatečně tenké na to, abychom mohli délku gumičky v ohybu zanedbat a považovat za stejnou u všech měření. Gumičku pak svisle zavěsíme a na její dolní konec uchytíme kyblík o hmotnosti m_k. V tuto chvíli je gumička napínána na délku l tíhovou silou o velikosti $F_\mathrm{G} = m_\mathrm{k} g$ směrem k zemi. Relativní prodloužení gumičky určíme jako

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}\,.$$

Pokud podél celé gumičky uvažujeme průřez S, můžeme si vyjádřit normálové napětí v gumičce způsobené tíhovou silou F_G jako

$$\sigma = \frac{F_\mathrm{G}}{2S} = \frac{m_\mathrm{k} g}{2S}\,,$$

kde jsme použili dvojnásobný průřez, protože v případě neproříznuté gumičky kyblík visí na dvou vláknech.



Obrázek 2: Zjednodušené schéma aparatury.

Když do kyblíku přilijeme vodu o objemu V a hustotě ρ, gumička se prodlouží na délku l' a nově máme

$$\varepsilon' = \frac{\Delta l'}{l_0} = \frac{l' - l_0}{l_0}\,, \qquad \sigma' = \frac{(m_\mathrm{k} + \rho V)g}{2S}\,.$$

Tímto postupem dál měříme křivku deformace gumičky do té doby, než dojde k přetržení gumičky.

Pro ověření Hookova zákona potřebujeme závislost naměřit hlavně pro malé relativní prodloužení, samotný kyblík však může být příliš těžký a prodlouží tak gumičku víc, než bychom chtěli. Proto namísto kyblíku pro prvních několik hodnot použijeme lehčí nepromokavý pytlík. Měřit budeme stejně a za použití stejných vztahů pro ε' a σ', akorát místo hmotnosti kyblíku m_k použijeme hmotnost nepromokavého pytlíku m_p.

Zpracování měření

Při výpočtech uvažujeme tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a hustotu vody $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Pomocí pásma jsme určili počáteční délku gumičky (polovinu celkové délky) jako $l_0 = (50{,}2 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm}$, kde jsme nejistotu odhadli na velikost jednoho dílku pásma. Tuto nejistotu uvažujeme u všech měření délky pásmem.

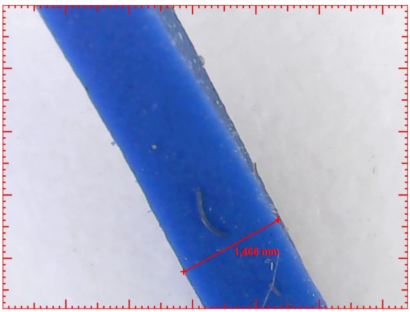
Pomocí váhy jsme určili hmotnost kyblíku jako $m_\mathrm{k} = (110 \pm 1)\,\mathrm{g}$ a hmotnost nepromokavého pytlíku jako $m_\mathrm{p} = (17 \pm 1)\,\mathrm{g}$.

Pomocí mikroskopu jsme změřili rozměry gumičky a odhadli plochu jejího průřezu jako plochu obdélníku o stranách $a = 1{,}40\,\mathrm{mm}$ a $b = 1{,}47\,\mathrm{mm}$. Nejistotu měření $\Delta a = \Delta b = 0{,}03\,\mathrm{mm}$ jsme výrazně nadhodnotili na základě kalibrace mikroskopu pomocí kalibrační destičky známé délky a vzhledem k faktu, že se tyto rozměry podél gumičky nepatrně měnily. Výslednou plochu průřezu gumičky jsme určili jako $S = ab$ s nejistotou přepočtenou dle vztahu pro přenos nejistoty pro součin dvou veličin s nejistotou

$$\frac{\Delta S}{S} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}\,,$$

tedy celkem jako $S = (2{,}06 \pm 0{,}06)\,\mathrm{mm}^2$. Analogicky spočteme nejistoty $\Delta\varepsilon$ a $\Delta\sigma$.

Obrázek 3: Rozměr a gumičky.



Obrázek 4: Rozměr b gumičky.

Vodu jsme přilévali injekční stříkačkou s velikostí dílku 5 ml, což odpovídá hmotnosti 5 g. Pro časovou efektivitu měření jsme vždy přidali několik „dílků“ vody najednou. Nejistotu určení objemu jsme zanedbali.

Celkem jsme provedli 94 měření, z toho první tři s nepromokavým pytlíkem. Do tabulky 1 pro přehlednost uvádíme pouze prvních 10 a poslední 3 hodnoty.

Tabulka 1: Tabulka naměřených hodnot.

N	$\frac{m}{\mathrm{kg}}$	$\frac{l}{\mathrm{mm}}$	$\frac{\Delta l}{\mathrm{mm}}$	$\frac{\varepsilon}{1}$	$\frac{\sigma}{\mathrm{MPa}}$	$\frac{\Delta\varepsilon}{1}$	$\frac{\Delta\sigma}{\mathrm{MPa}}$
1	0,017	50,7	0,5	0,01	0,04	0,0003	0,003
2	0,047	52,2	2,0	0,04	0,11	0,0012	0,004
3	0,082	54,2	4,0	0,08	0,19	0,003	0,007
4	0,11	56,2	6,0	0,12	0,26	0,003	0,008
5	0,13	58,2	8,0	0,16	0,31	0,004	0,009
6	0,15	60,2	10,0	0,20	0,36	0,005	0,011
7	0,17	62,2	12,0	0,24	0,41	0,006	0,012
8	0,19	64,2	14,0	0,28	0,45	0,007	0,014
9	0,21	67,2	17,0	0,34	0,50	0,008	0,015
10	0,23	69,7	19,5	0,39	0,55	0,009	0,016
…	…	…	…	…	…	…	…
92	1,87	297,2	247	4,92	4,46	0,05	0,13
93	1,89	298,2	248	4,94	4,50	0,05	0,13
94	1,91	299,2	249	4,96	4,55	0,05	0,13

Výsledky a diskuse

V grafu na obrázku 5 je těžké přesně určit mez úměrnosti σ_u, mez pružnosti σ_E a mez kluzu σ_k, můžeme je alespoň odhadnout jako

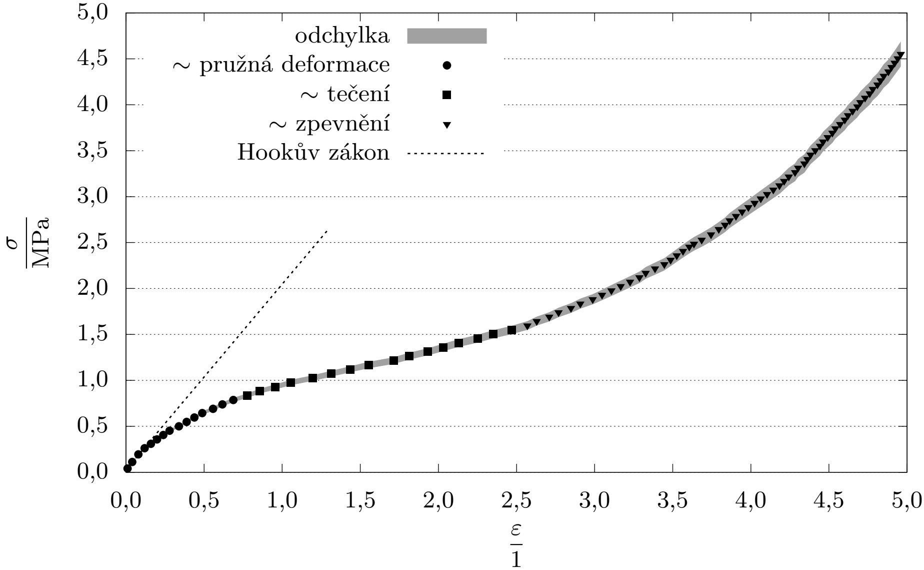
$$\sigma_\mathrm{u} \approx 0{,}3\,\mathrm{MPa}\,, \qquad \sigma_\mathrm{E} \approx 0{,}5\,\mathrm{MPa}\,, \qquad \sigma_\mathrm{k} \approx 0{,}8\,\mathrm{MPa}\,.$$

Abychom příliš neovlivnili mechanické vlastnosti gumičky, nesundávali jsme mezi měřeními zátěž a netestovali efekt dopružování. Vidíme ale, že prvních pár hodnot leží přibližně na přímce, co odpovídá Hookovu zákonu. První čtyři hodnoty jsme tedy v programu `gnuplot` fitovali rovnicí $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon + \sigma_0$ a získali tak parametry

$$E = (2{,}02 \pm 0{,}10)\,\mathrm{MPa}\,, \qquad \sigma_0 = (0{,}027 \pm 0{,}008)\,\mathrm{MPa}\,.$$

Hodnota E je Youngův modul pružnosti v tahu pro naši gumičku, tato hodnota dobře odpovídá rozsahu 1,5 MPa až 5 MPa pro pryž (gumu) v tabulkách. Konstanta σ_0 odpovídá kombinaci napětí vyvolané tíhou gumičky o hmotnosti přibližně 1 g a také chyby jako důsledku aproximací a zanedbání, které jsme během řešení zavedli.

Dále pak vidíme, že v oblasti již nepružné deformace se body označené čtverečky méně zahušťují, i když je nárůst hmotnosti mezi datovými body stejný. To napovídá, že může docházet k tečení materiálu, kde stejná změna napětí způsobí větší prodloužení. Nakonec vidíme, že se



Obrázek 5: Naměřená křivka deformace.

ke konci křivky body zahušťují, což odpovídá zpevnění materiálu. Křivka končí přetržením gumičky, takže vidíme, že mez pevnosti pro naši konkrétní gumičku je přibližně

$$\sigma_\mathrm{p} \approx 4{,}5\,\mathrm{MPa}\,.$$

Gumička se samozřejmě mohla deformovat jinak než tahem, např. se lehce kroutit, smýkat a podobně. Z obrázků je vidět, že gumička nebyla všude stejně široká a od pohledu není homogenní. Samozřejmě se podél gumičky měnil průřez při natahování, i když jsme to při výpočtu normálových napětí neuvažovali. Jelikož nebyla gumička homogenní, tento efekt se složitě odhadoval. Pro homogenní těleso je poměr relativního prodloužení k relativnímu příčnému zkrácení při námaze v tahu dán Poissonovou konstantou a pro pryž je její numerická hodnota přibližně 2.

Závěr

Naměřili jsme křivku deformace pro klasickou kuchyňskou gumičku, tato křivka je vykreslená v grafu na obrázku 5.

Daniela Karpíšková
daniela.karpiskova@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.