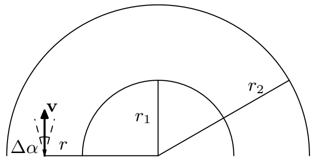
Úloha II.5 ... ohnisko ve válci

9 bodů; (chybí statistiky)

Uvažujte válcový kondenzátor s vnitřním poloměrem r_1 a vnějším r_2, který je nabit tak, aby mezi elektrodami bylo napětí V. Nechť ve vzdálenosti r ($r_1 < r < r_2$) v tečném směru vůči poloměru válce vyletují elektrony s úzkým úhlovým rozdělením $\Delta\alpha$ takovou rychlostí, aby byla jejich vzdálenost od středu válce přibližně konstantní. Určete, kde se nachází první bod, ve kterém se elektrony znovu fokusují. Situace je rovinná a prostorový náboj elektronů neuvažujte.

Jarda slyšel o různých analyzátorech pro elektronovou spektroskopii.



Protože elektrony se pohybují v elektrickém poli kondenzátoru, nejprve si vyjádříme toto elektrické pole a elektrostatický potenciál. Vyjdeme z Gaussova zákona, který říká, že elektrické pole procházející přes plochu je úměrné náboji uzavřenému touto plochou. Pokud uvažujeme válcovou plochu se stejnou osou jako kondenzátor, pak pro poloměry menší než r_1 dostáváme nulové pole, protože náboj uvnitř této plochy je nulový. Pro $r_1 > r > r_2$ máme plochou uzavřený náboj o délkové hustotě (na jednotku délky podél válce) σ, tedy vyjádříme Gaussův zákon

$$2\pi r E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,,$$

kde E je elektrické pole a ε_0 permitivita vakua. Elektrické pole tedy vyjádříme jako

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Vně válce s poloměrem r_2 je pak uzavřený náboj nulový, tedy nulové je i elektrické pole. Nyní dopočítáme velikost náboje σ. A to tak, že vypočítáme potenciál a stanovíme rozdíl potenciálů mezi vnitřním a vnějším poloměrem rovný napětí V.

$$V = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{d}r$$

$$V = \left[\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\sigma = \frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Z toho můžeme vyjádřit elektrické pole E jako funkci poloměru

$$E(r) = \frac{V}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r}.$$

Situaci s elektrickým polem tedy známe a můžeme se pustit do popisu pohybu elektronů. Jediná síla, která na nabité částice působí, je elektrická síla. Ta působí radiálně, tedy buď ve směru do středu, nebo od středu. Pro popis pohybu použijeme tedy polární souřadnice.

Protože se však jedná o neinerciální vztažnou soustavu, musíme započítat i odstředivou sílu. V souřadnicích r a θ tedy dostáváme pohybovou rovnici pro elektron se záporným elementárním nábojem e

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{eV}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r}\,. \tag{1}$$

Protože zde máme jednu rovnici pro dvě neznámé, potřebujeme doplnit další rovnici, kterou bude zákon zachování momentu hybnosti. Ten platí, protože elektrická síla působí radiálně (do středu) – tedy s nulovým momentem síly. Máme tedy rovnici

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{konst.} \tag{2}$$

Nyní můžeme z rovnice (2) vyjádřit úhlovou rychlost $\dot{\theta}$ jako

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

a dosadit do rovnice (1)

$$m\ddot{r} = mr\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 - \frac{eV}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r}\,,$$

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2r^3} - \frac{eV}{m\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r}\,. \tag{3}$$

Máme tedy diferenciální rovnici pro poloměr r, kterou však neumíme analyticky řešit. Nás však zajímá svazek, který má úzké úhlové rozdělení $\Delta\alpha$, tedy se pohybuje téměř po trajektorii s konstantním poloměrem. Aby se částice pohybovaly po konstantním poloměru, musí být pravá strana rovnice (3) nulová. Musí tedy platit

$$\frac{L^2}{m^2r^3} = \frac{eV}{m\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r}\,.$$

Z toho již můžeme vyjádřit rovnovážný poloměr r_0^2

$$\frac{L^2}{m^2r_0^2} = \frac{eV}{m\ln\frac{r_2}{r_1}}\,,$$

$$r_0^2 = \frac{L^2}{m}\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{eV}$$

Nyní tento rovnovážný poloměr odpovídající momentu hybnosti L dosadíme do rovnice (3)

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)\frac{1}{r}\,.$$

Teď provedeme drobný trik. Rovnici sice neumíme řešit pro libovolné r, známe však řešení pro stabilní trajektorii ve vzdálenosti r_0 a víme, že úhel $\Delta\alpha$ je malý. Rozepíšeme si tedy $r = r_0 + \Delta r$ a rovnici linearizujeme.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(r_0 + \Delta r) &= \frac{L^2}{m^2}\left(\frac{1}{(r_0+\Delta r)^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)\frac{1}{(r_0+\Delta r)}\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\Delta r) &= \frac{L^2}{m^2}\left(\frac{r_0^2 - r_0^2 - 2r_0\Delta r - \Delta r^2}{r_0^2(r_0+\Delta r)^2}\right)\frac{1}{(r_0+\Delta r)}\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\Delta r) &= \frac{L^2}{m^2}\left(\frac{-2\Delta r - \frac{\Delta r^2}{r_0}}{r_0(r_0+\Delta r)^2}\right)\frac{1}{(r_0+\Delta r)}\end{aligned}$$

Nyní již můžeme použít předpoklad, že $\Delta r \ll r_0$ a zanedbáním vyšších mocnin Δr dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\Delta r) = \frac{L^2}{m^2}\frac{-2\Delta r}{r_0^4}\,.$$

V tom již můžeme poznat rovnici pro harmonický oscilátor s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{2}L/(mr_0^2)$. Nás ale zajímá, kdy se elektrony vrátí opět do poloměru r_0, což nastane za polovinu periody, tedy za čas

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi m r_0^2}{\sqrt{2}L}\,.$$

Pro malé rozbíhavé úhly svazku $\Delta\alpha$ můžeme předpokládat, že všechny elektrony mají stejný moment hybnosti $L = mr_0^2\dot{\theta}_0$, kde $\dot{\theta}_0$ je počáteční úhlová rychlost. Pokud v přiblížení malých úhlů budeme považovat úhlovou rychlost za konstantní, pak pro úhel θ_1, kde se všechny elektrony poprvé znovu setkají, dostaneme

$$\theta_1 = \dot{\theta}_0\frac{T}{2} = \dot{\theta}_0\frac{\pi m r_0^2}{\sqrt{2}L} = \dot{\theta}_0\frac{\pi m r_0^2}{\sqrt{2}mr_0^2\dot{\theta}_0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \doteq 127^\circ\,.$$

Toho se využívá například v 127° deflektorech, které slouží k měření energie elektronů.

Kateřina Rosická
`kacka@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.