Úloha II.4 ... kohoutek a nádoba
8 bodů; (chybí statistiky)

Máme prázdnou nádobu vysokou H se čtvercovou podstavou o straně a. Těsně nad nádobou se nachází vodovodní kohoutek, ze kterého v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ začne rychlostí v_0 vytékat voda. Vypočtěte závislost výšky hladiny v nádobě na čase t. Objemový tok vody z kohoutku je konstantní a je roven Q. Řešte za předpokladu, že Q je tak malé, že se hladina vždy ihned ustálí v jedné rovině. Nezapomeňte však na dobu pádu kapaliny. *Adam má rád kohoutka a slepičku.*

Objem vody ve sklenici je $V = Qt$. Problémem však je, že toto není objem pod vodní hladinou. Ten je totiž nižší, protože v každém okamžiku je část objemu vody ještě v padajícím proudu někde mezi hladinou a kohoutkem, a to až do chvíle, kdy dojde k naplnění nádoby.

V padajícím proudu ovšem objem není přímo úměrný jeho délce, protože s rostoucí vzdáleností od kohoutku se zvyšuje rychlost, se kterou voda padá, takže se musí zmenšovat průřez proudu. Jestliže je u kohoutku rychlost vody v_0 a průřez proudu S_0, pak samozřejmě platí $Q = S_0 v_0$. Rychlost se pak ale zvyšuje se vzdáleností d od kohoutku jako $v = \sqrt{2gd + v_0^2}$, průřez je pak $S = Q/v$.

Nechť do vzdálenosti d letí voda od kohoutku čas t_d. Pak je objem proudu mezi bodem d a kohoutkem roven Qt_d. Vztah mezi t_d a d lze ale najít řešením kvadratické rovnice, přičemž výsledek je

$$t_d = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gd} - v_0}{g}\,.$$

Ke stejnému výsledku dojdeme integrováním vody v proudu do vzdálenosti d od kohoutku

$$V_d = \int_0^d S\left(d'\right) \mathrm{d}d' = \int_0^d \frac{Q}{\sqrt{2gd' + v_0^2}} \mathrm{d}d' = \frac{Q}{g}\left(\sqrt{2gd + v_0^2} - v_0\right)\,.$$

Uvažujme čas $t_1 > t_0$, kde t_0 je čas, kdy se poprvé voda dotkla dna nádoby. V takovém případě nechť je hladina ve výšce h a proud je dlouhý d, přičemž zřejmě platí $H = h + d$. Dále zaveďme plochu podstavy $A = a^2$. Celkový objem ve sklenici je $V = Qt$ a je to součet objemu pod hladinou hA a objemu v proudu V_{H-h}, takže

$$Qt = Ah + \frac{Q}{g}\left(\sqrt{2g\left(H - h\right) + v_0^2} - v_0\right)\,.$$

Tuto rovnici pro h začneme upravovat

$$\begin{aligned}
\left(gt - \frac{Ahg}{Q} + v_0\right)^2 &= 2g\left(H - h\right) + v_0^2\,,\\
g^2t^2 - 2gt\frac{Ahg}{Q} + 2v_0gt + \frac{A^2h^2g^2}{Q^2} + v_0^2 - 2\frac{Ahgv_0}{Q} &= 2gH - 2gh + v_0^2\,,\\
\frac{A^2h^2g^2}{Q^2} - 2ght\frac{Ag}{Q} - 2gh\frac{Av_0}{Q} + 2gh + g^2t^2 + 2v_0gt - 2gH &= 0\,,\\
\frac{A^2g^2}{Q^2}h^2 - \frac{2g}{Q}\left(Agt + Av_0 - Q\right)h + g^2t^2 + 2g\left(v_0t - H\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Toto je kvadratická rovnice pro h, která má řešení

$$h = \frac{\left(Agt + Av_0 - Q\right) \pm \sqrt{\left(Agt + Av_0 - Q\right)^2 - 2A^2g\left(v_0t - H\right) - g^2t^2A^2}}{\frac{A^2g}{Q}}\,.$$

Úpravou výrazu v odmocnině dostáváme

$$h = \frac{(Agt + Av_0 - Q) \pm \sqrt{A\left(Av_0^2 + \frac{Q^2}{A} - 2gtQ - 2v_0Q + 2gHA\right)}}{\frac{A^2g}{Q}}\,.$$

Musíme ještě vybrat správný kořen a okomentovat tento výsledek. Funkce h v závislosti na t platí pro $t > t_0 = (\sqrt{v_0^2 + 2gH} - v_0)/g$, do té doby je výška hladiny nulová a náš předpoklad $H = h + d$ neplatí. Dále je zřejmé, že pro čas $t_\mathrm{f} = V/Q = AH/Q$ se sklenice naplní, takže platí $h = H$. Tento výsledek by nám měl vyjít z naší rovnice pro h, zkusme proto dosadit $t = t_\mathrm{f}$

$$\begin{aligned} h &= \frac{\left(\frac{A^2gH}{Q} + Av_0 - Q\right) \pm \sqrt{A\left(Av_0^2 + \frac{Q^2}{A} - 2v_0Q\right)}}{\frac{A^2g}{Q}}\,,\\ &= H + \frac{(Av_0 - Q) \pm (Av_0 - Q)}{\frac{A^2g}{Q}}\,. \end{aligned}$$

Odsud je evidentní, že musíme volit záporný kořen řešení kvadratické rovnice, aby v čase $t = t_\mathrm{f}$ platilo $h = H$.

Konečně tedy můžeme zapsat závislost hladiny vody na čase od spuštění kohoutku

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < t_0\,,\\ \frac{Qt}{A} + \frac{v_0Q}{Ag} - \frac{Q^2}{A^2g} - \frac{Q}{A^2g}\sqrt{A\left(Av_0^2 + \frac{Q^2}{A} - 2gtQ - 2v_0Q + 2gHA\right)} & \text{pro } t_0 < t < t_\mathrm{f}\,,\\ H & \text{pro } t > t_f\,. \end{cases}$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.