Úloha II.3 ... plavající jehlan

5 bodů; (chybí statistiky)

Mějme homogenní jehlan s hustotou $\rho_\mathrm{j} = 250\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, který plave ve vodě s hustotou $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Plave tak, že je jeho osa svisle. Otázka ale je, zda je stabilnější poloha, když je hlavním vrcholem vzhůru, či když směřuje dolů? Jehlan má výšku $h = 20\,\mathrm{cm}$ a plocha jeho podstavy je $S = 49\,\mathrm{cm^2}$.

Lego sa zamýšlel nad úlohou, kde ten jehlan kmitá

Majme homogénny ihlan s hustotou ρ_j, ktorý pláva vo vode s hustotou ρ (čiže $\rho_\mathrm{j} < \rho$). Pláva tak, že jeho os je zvislo. Otázkou ale je, či je v stabilnej polohe, keď smeruje špicom nahor alebo nadol.

Ak máme porovnať stabilitu dvoch polôh, stačí porovnať ich potenciálnu energiu. Nakoľko ihlan vytlačí v oboch prípadoch rovnako veľa vody, hladina vody bude v oboch prípadoch v rovnakej výške, preto je rozumné zvoliť hladinu ako nulovú hladinu potenciálnej energie. Nestačí ale uvažovať iba potenciálnu energiu samotného ihlana (inak by predsa ihlan vôbec neplával a ležal by na dne), ale súčet potenciálnej energie vody a ihlana. Zadanie nehovorí nič o tom, koľko vody celkovo je v nádrži, tento údaj ale ani nepotrebujeme, nakoľko nás skutočne zaujíma len porovnanie tých dvoch prípadov, nie presne koľko energie majú. Zvolíme si teda, že budeme v oboch prípadoch počítať o koľko je potenciálna energia vyššia, než keby tam namiesto ihlana bola navyše voda s rovnakou hmotnosťou (čiže by hladina mala zas rovnakú výšku).

Objem ihlanu je $V_\mathrm{j} = (1/3)Sh$. Jeho hmotnosť teda je $m_\mathrm{j} = V_\mathrm{j}\rho_\mathrm{j} = (1/3)Sh\rho_\mathrm{j}$. Preto objem vody vytlačenej ihlanom je $V_\mathrm{v} = m_\mathrm{j}/\rho = (1/3)Sh\rho_\mathrm{j}/\rho$.

Pri výpočtoch budeme potrebovať polohu ťažiska ihlanu. Nie je zložité dohľadať na internete, že ťažisko ihlanu je v 1/4 jeho výšky nad podstavou. K tomuto výsledku sa dá samozrejme dôjsť aj pomocou integrálov.

Špicom nadol

Ponorená časť ihlanu bude mať tiež tvar ihlanu. Konkrétne, vďaka podobnosti trojuholníkov vidno, že zmenšenej verzie samotného ihlanu. Označme koeficient podobnosti k. Potom výška ponorenej časti ihlanu je kh a obsah podstavy je k^2S. Čiže objem ponorenej časti ihanu je $V_\mathrm{p} = (1/3)k^3Sh$. Tento objem musí byť rovný objemu vody vytlačenej ihlanom V_v, čiže

$$\frac{1}{3}k^3Sh = \frac{1}{3}Sh\frac{\rho_\mathrm{j}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad k = \left(\frac{\rho_\mathrm{j}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

Tým pádom podstava ihlanu sa nachádza vo výške $h - kh = h[1 - (\rho_\mathrm{j}/\rho)^{1/3}]$ nad hladinou. A nakoľko ťažisko je o štvrtinu výšky nižšie (lebo ihlan je natočený špicom nadol), tak ťažisko ihlanu je vo výške $h - kh - h/4 = h[3/4 - (\rho_\mathrm{j}/\rho)^{1/3}]$. Potom potenciálna energia samotného ihlanu je

$$E_\mathrm{j1} = m_\mathrm{j}gh\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{\rho_\mathrm{j}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right] .$$

Čo sa vody týka, tak oproti prípadu, v ktorom by hladina mala rovnakú výšku ako teraz, len by v nej nebol ten ihlan, musíme odobrať vodu tam, kde je ponorený ihlan, čo matematicky ide spraviť tak, že „pridáme“ ihlan so zápornou hustotou $-\rho$, ktorý teda bude mať hmotnosť $-m_\mathrm{j}$. Zároveň podstava tohoto pomyselného ihlanu je na vodnej hladine a jeho výška je kh, čiže jeho ťažisko bude $kh/4$ pod hladinou, presnejšie vo výške $-kh/4$. Príspevok do potenciálnej energie od vody teda bude

$$E_{\mathrm{v1}} = -m_{\mathrm{j}} g \left[-\frac{1}{4} h \left(\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \right] , = \frac{1}{4} m_{\mathrm{j}} g h \left(\frac{\rho_j}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} .$$

Celková potenciálna energia je v tomto prípade voči nulovej hladine

$$E_1 = E_{\mathrm{j1}} + E_{\mathrm{v1}} = \frac{3}{4} m_{\mathrm{j}} g h \left[1 - \left(\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \right] .$$

Špicom nahor

V tomto prípade bude mať ponorená časť ihlanu tvar zrezaného ihlanu. Časť ihlanu trčiaca nad hladinou bude zmenšenina samotného ihlana. Označme si koeficient podobnosti q, potom objem ponorenej časti bude

$$V_{\mathrm{p}} = V_{\mathrm{j}} - V_{\mathrm{nad}} = \frac{1}{3} S h - \frac{1}{3} q^3 S h = \frac{1}{3} (1 - q^3) S h \,.$$

A tento objem sa musí rovnať objemu vytlačenej vody

$$\frac{1}{3} \left(1 - q^3 \right) S h = \frac{1}{3} S h \frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho} \,,$$

$$q = \left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} .$$

Keďže výška ihlanu nad hladnou bude qh, podstava ihlanu bude zvyšných $(1 - q)h$ pod hladinou. Ťažisko ihlanu bude o štvrtinu výšky nad podstavou, čiže vo výške $-(1-q)h+h/4 = (q - 3/4)h$. Potom potenciálna energia samotného ihlanu je

$$E_{\mathrm{j2}} = m_{\mathrm{j}} g h \left[\left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4} \right] .$$

Avšak čo teraz s vodou? Objem „chýbajúcej vody“ má tvar zrezaného ihlanu, pre ktorý tak ľahko ťažisko nenájdeme. Jedna možnosť je priamo použiť integrály. Druhá možnosť je pridať ako ”zápornú vodu” celý ihlan (polohu jeho ťažiska už vieme) a následne pridať „normálnu vodu“ do ihlanu nad hladinou (čo sa odčíta so „zápornou vodou“), ktorú sme tam pridali predtým a v súčte sme pridali len zápornú vodu pod hladinou. Potenciálnu energiu zodpovedajúcu pridaniu zápornej vody do celého ihlanu dostaneme úplne rovnako ako E_{j2}, len za hmotnosť dosadíme $-V_{\mathrm{i}}\rho$

$$E_{\mathrm{v2\text{-}}} = -\frac{1}{3} S h \rho g h \left[\left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4} \right] .$$

Potenciálnu energiu zodpovedajúcu pridaniu vody do časti ihlanu nad hladinou dostaneme zas podobne, len za hmotnosť dosadíme $V_{\mathrm{nad}}\rho = (1/3)q^3 S h \rho$ a ťažisko je vo výške $qh/4$ nad hladinou

$$E_{\mathrm{v2+}} = \frac{1}{3} q^3 S h \rho g h \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} .$$

Spolu teda príspevok k potenciálnej energii od vody je

$$E_{\mathrm{v2}} = E_{\mathrm{v2\text{-}}} + E_{\mathrm{v2+}} = -V_{\mathrm{j}}\rho g h\left[\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}\right] + q^3 V_{\mathrm{j}}\rho g h \frac{1}{4}\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= V_{\mathrm{j}}\rho g h\left[-\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$= m_{\mathrm{j}}\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{j}}} g h\left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(3+\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$= m_{\mathrm{j}} g h\left[\frac{3\rho}{4\rho_{\mathrm{j}}} - \frac{1}{4}\left(3\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{j}}}+1\right)\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Celková potenciálna energia voči nulovej hladine je v tomto prípade

$$E_2 = E_{\mathrm{j2}} + E_{\mathrm{v2}} = m_{\mathrm{j}} g h\left[\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}\right] + m_{\mathrm{j}} g h\left[\frac{3\rho}{4\rho_i} - \frac{1}{4}\left(3\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{j}}}+1\right)\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$= m_{\mathrm{j}} g h\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{j}}}-1\right) - \frac{1}{4}\left(3\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{j}}}-3\right)\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$= \frac{3}{4} m_{\mathrm{j}} g h\left(\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{j}}}-1\right)\left[1-\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Porovnanie

Ostáva teda otázka, kedy je ktorá z týchto energii väčšia, čiže napríklad kedy je väčšia E_2

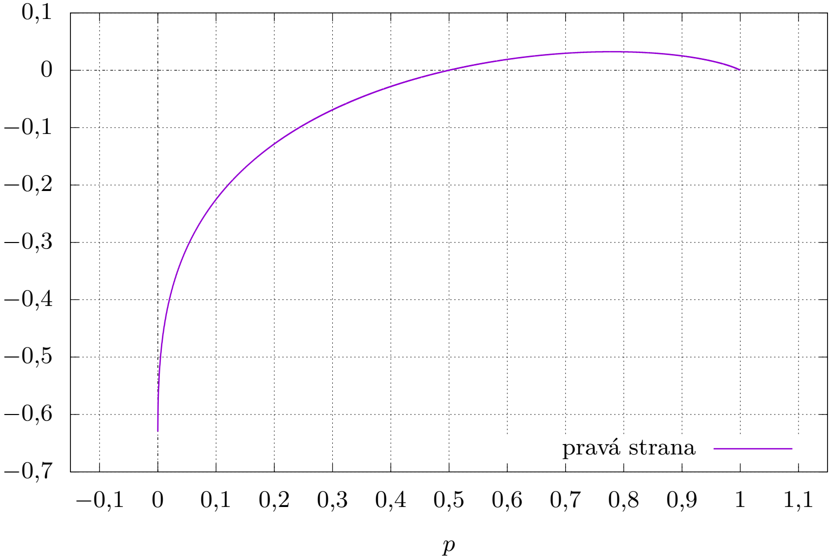
$$E_1 < E_2\,,$$
$$\frac{3}{4} m_{\mathrm{j}} g h\left[1-\left(\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right] < \frac{3}{4} m_{\mathrm{j}} g h\left(\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{j}}}-1\right)\left[1-\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right],$$
$$1-\left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{1/3} < \left(\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{j}}}-1\right)\left[1-\left(1-\frac{\rho_{\mathrm{j}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right],$$

označme si pomer $\rho_{\mathrm{j}}/\rho = p$. Potom dostávame nerovnicu

$$0 < p^{\frac{1}{3}} - 1 + \left(\frac{1}{p}-1\right)\left[1-(1-p)^{\frac{1}{3}}\right],$$

pričom keď je táto nerovnica splnená, znamená to, že E_2 je väčšia, teda že poloha špicom nahor je menej stabilná. Už nám teda nič nebráni dosadiť sem hodnoty zo zadania, konkrétne iba hustotu. Vidíme totiž, že otázka nezávisí na h a S. Keď ρ_{j} dosadíme (čiže dosadíme, že $p = 0{,}25$), dostávame napravo $-0{,}1$. Rovnosť nie je splnená, teda $E_2 < E_1$, z čoho plynie, že poloha špicom nahor je viac stabilná než poloha špicom nadol.

Tu by mohlo riešenie kľudne skončiť, ale nakoľko toto je vzorové riešenie, rozoberieme si výsledok ešte trocha viac. Tú nerovnicu je asi potrebné vyriešiť numericky, napríklad nechať počítač nakresliť graf toho, ako závisí pravá strana na p. Výhodný je napríklad WolframAlpha, ktorý nám po zadaní pravej strany rovno napíše aj jej koreň. Tu ale použijeme gnuplot.



Obrázek 1: Graf hodnoty pravej strany v závislosti od p.

Vidíme, že pre $p = \rho_\mathrm{j}/\rho < 1/2$ je stabilnejšia poloha špicom nahor, pretože v takej polohe je ťažisko ihlanu nižšie (predstavte si napríklad nafukovací ihlan: jeho hustota je zanedbateľná a je celkom intuitívne, že nebude „stáť na špici“). Pre $p = \rho_\mathrm{j}/\rho > 1/2$ je stabilnejšia poloha špicom nadol, pretože tam preváži to, ktorá poloha je výhodnejšia pre vodu. Dokonca vidíme, že pre $p = \rho_\mathrm{j}/\rho = 1$ sú obe polohy energeticky rovnako stabilné, čo dáva úplný zmysel, pretože vtedy je hustota ihlanu rovná hustote vody, a teda je celý pod hladinou, preto bez ohľadu na jeho natočenie musí byť celková potenciálna energia rovnaká.

Integrovanie

V tejto sekcii si integrovaním odvodím najprv polohu ťažiska ihlana a potom ťažisko zrezaného ihlana, ktorú sme museli v časti špicom nahor riešiť dosť trikovo.

Majme ihlan s výškou h a podstavou S. Jeho prierez vo výške x nad podstavou bude (z podobnosti, pretože dĺžka strán klesá lineárne) $S(x) = S((h-x)/h)^2 = S(1-x/h)^2$.

Jeho hmotnosť teda bude

$$m_\mathrm{j} = \int_0^h \rho_\mathrm{j} S(x)\,\mathrm{d}x = \rho_\mathrm{j} S \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \mathrm{d}x = \rho_\mathrm{j} S \int_0^h \left(1 - 2\frac{x}{h} + \frac{x^2}{h^2}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \rho_\mathrm{j} S \left[x - \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{3h^2}\right]_0^h = \rho_\mathrm{j} S \left(h - h + \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{3} S h \rho_\mathrm{j}$$

a to sedí. Teraz výšku ťažiska h_t spočítame tak, že každý element hmotnosti vynásobíme jeho výškou a potom to celé vydelíme hmotnosťou

$$h_\mathrm{t} m_\mathrm{j} = \int_0^h \rho_\mathrm{j} S(x) x\,\mathrm{d}x = \rho_\mathrm{j} S \int_0^h x \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \mathrm{d}x = \rho_\mathrm{j} S \int_0^h \left(x - 2\frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{h^2}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \rho_\mathrm{j} S \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3h} + \frac{x^4}{4h^2}\right]_0^h = \rho_\mathrm{j} S \left(\frac{h^2}{2} - \frac{2h^2}{3} + \frac{h^2}{4}\right) = \frac{1}{12} S h^2 \rho_\mathrm{j}\,,$$

čiže potom $h_\mathrm{t} = (1/12) S h^2 \rho_\mathrm{j} / m_\mathrm{j} = h/4$, ako sme mohli nájsť na internete.

Hmotnosť a výšku ťažiska zrezaného ihlanu dostaneme analogickým postupom s jediným rozdielom: nebudeme integrovať až po h ale iba po výšku, v ktorej je ihlan zrezaný. V našom príklade bol ihlan zrezaný vo výške $(1-q)h$ nad svojou podstavou. Hmotnosť vytlačenej vody je teda

$$m_\mathrm{v} = \rho S \int_0^{(1-q)h} \left(1 - 2\frac{x}{h} + \frac{x^2}{h^2}\right) \mathrm{d}x = \rho S \left[x - \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{3h^2}\right]_0^{(1-q)h}$$
$$= \rho S \left[(1-q)h - (1-q)^2 h + (1-q)^3 \frac{h}{3}\right]$$
$$= S h \rho \left[(1-q) - \left(1 - 2q + q^2\right) + \frac{1}{3}\left(1 - 3q + 3q^2 - q^3\right)\right]$$
$$= S h \rho \frac{1}{3}\left(1 - q^3\right) = \frac{1}{3} S h \rho p = \frac{1}{3} S h \rho_\mathrm{j} = m_\mathrm{j}\,,$$

čo sedí, lebo tiaž vytlačenej vody sa musí rovnať tiaži ihlanu.

Teraz už len obdobne zrátame polohu ťažiska

$$h_\mathrm{t} m_\mathrm{v} = \rho S \int_0^{(1-q)h} \left(x - 2\frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{h^2}\right) \mathrm{d}x = \rho S \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3h} + \frac{x^4}{4h^2}\right]_0^{(1-q)h}$$
$$= \rho S \left[(1-q)^2 \frac{h^2}{2} - (1-q)^3 \frac{2h^2}{3} + (1-q)^4 \frac{h^2}{4}\right]$$
$$= S h^2 \rho \left[\frac{1}{2}\left(1 - 2q + q^2\right) - \frac{2}{3}\left(1 - 3q + 3q^2 - q^3\right) + \frac{1}{4}\left(1 - 4q + 6q^2 - 4q^3 + q^4\right)\right]$$
$$= S h^2 \rho \left(\frac{1}{12} - \frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4}\right),$$

z čoho je výška nad podstavou

$$h_\mathrm{t} = \frac{S h^2 \rho}{m_\mathrm{v}} \left(\frac{1}{12} - \frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4}\right) = \frac{3h}{p} \left(\frac{1}{12} - \frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4}\right).$$

Avšak kvôli tomu, že podstava je $(1-q)h$ pod hladinou, bude aj hĺbka ťažiska vzhľadom na hladinu o $(1-q)h$ menšia, než koľko sme práve spočítali, čiže

$$
\begin{aligned}
h_\mathrm{h} = h_\mathrm{t} - (1-q)h = 3h\frac{1}{p}\left(\frac{1}{12} - \frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4} - (1-q)\frac{1-q^3}{3}\right) = 3h\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{4} + \frac{q}{3} - \frac{q^4}{12}\right) \\
= h\left[-\frac{3}{4p} + \frac{q}{p}\left(1 - \frac{q^3}{4}\right)\right] = h\left[-\frac{3}{4p} + \frac{q}{4}\left(\frac{4-q^3}{p}\right)\right] = h\left[-\frac{3}{4p} + \frac{q}{4}\left(\frac{3}{p} + 1\right)\right] .
\end{aligned}
$$

Aby sme z tohoto dostali príspevok k energii od vody, musíme to vynásobiť $-m_\mathrm{j} g$ (mínus pretože toto je oblasť, kde voda „chýba“). Keď ešte dosadíme späť za $q = (1-p)^{1/3}$ a $p = \rho_\mathrm{j}/\rho$ dostávame

$$
E_\mathrm{v2} = m_\mathrm{j} g h \left[\frac{3\rho}{4\rho_\mathrm{j}} - \frac{1}{4}\left(3\frac{\rho}{\rho_\mathrm{j}} + 1\right)\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{j}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right] ,
$$

čo sedí s výsledkom, ktorý sme pred tým dostali trikovejším spôsobom. Čiže ako sa dalo čakať, je jedno aký postup človek zvolí.

Pripomíname, že výsledok je, že pre zadanú hustotu je stabilnejšia poloha špicom nahor.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.