

Úloha I.E ... ten rejža je ale hustej

12 bodů

Změřte hustotu zrnek syrové rýže. Nezapomeňte své řešení důkladně popsat a odhadnout jeho nejistotu.

Karel se zamyslel v menze v Košicích.

Úvod

Měříme hustotu ϱ , která je definována jako podíl hmotnosti tělesa m a jeho objemu V jako

$$\varrho = \frac{m}{V}.$$

Máme zde ale jistou obtíž – rýže je sypký materiál, a tak její vlastní objem nezměříme snadno přímočaře, protože vzduchové „kapsy“ mezi jednotlivými zrníčky výrazně zvětšují celkový objem. Podíl hmotnosti a celkového objemu (tedy objemu samotné rýže a prostoru mezi jednotlivými zrníčky) popisuje veličina známá jako *objemová hmotnost* (angl. particle density)¹, která ale není předmětem této úlohy. Objemová hmotnost se zavádí zejména pro praktické účely, kde je samotná hustota méně užitečným údajem oproti tomu, kolik skutečné rýže (nebo šterku či čediče) do daného objemu vměstnáme.

Metoda měření

Objem rýže bychom mohli spočítat přímo, tedy pomocí aproximace nějakého jednoho zrníčka elipsoidem. Změřili bychom jeho rozměry s následným výpočtem objemu, zvážením bychom určili hmotnost a následně vypočítali jeho hustotu. Kvůli malým hmotnostem i rozměrům jednotlivých zrn je ale i malá nepřesnost, které bychom se při měření v domácích podmínkách nejspíše dopustili, významná, protože ji musíme vztáhnout k absolutním hodnotám měření, které jsou malé, takže vzniká vysoká relativní odchylka.

Velikost této chyby by klesala s rostoucím množstvím měření. Abychom ji tedy co nejvíce potlačili, mohli bychom takto postupně změřit velké množství zrníček, což by ale bylo časově náročné. Dalším problémem je i to, že každé zrníčko má jiné rozměry a tvar, musíme tedy průměrovat hmotnost a objem zvlášť. I to lze ale udělat chytře, například vyskládáním zrníček do řady a jejich následným zvážením, jak se objevilo v jednom z účastnických řešení.

V našem řešení proto použijeme metodu, při které v objemovém měřidle (v našem případě odměrném válci) zjistíme celkový objem naspané rýže, do které následně nalijeme známý objem kapaliny, která zaplní mezery mezi jednotlivými zrny. Ze znalosti objemu kapaliny a celkového objemu rýže s kapalinou tak získáme celkový objem zrnek rýže.

Tato metoda ale není vhodná pro všechny kapaliny. Vyjděme z Archimédova zákona, který popisuje chování ponořených těles v kapalině. Matematicky je formulován jako

$$F_{\text{vz}} = V \varrho_k g,$$

kde F_{vz} je působící vztlaková síla, V objem ponořené části tělesa, ϱ_k její hustota a g tíhové zrychlení. Na těleso působí také tíhová síla F_g , takže výslednice sil F bude

$$F = F_g - F_{\text{vz}} = Vg(\varrho_t - \varrho_k),$$

¹<https://cs.wikipedia.org/wiki/Hustota>

kde ρ_t je průměrná hustota tělesa. Z tohoto vztahu vidíme, že chceme-li, aby se nám rýže potopila a my mohli změřit její celý objem, výslednice sil musí být kladná, tj. musíme užít kapaliny s nižší hustotou, než jakou má rýže – což je ostatně jednoduchá a intuitivní úvaha.

V našem řešení jako kapalinu volíme vodu, která, jak si můžeme všimnout, tuto podmínku splňuje. Měření hustoty rýže je nepřímé, protože objem rýže V_r počítáme jako

$$V_r = V - V_v = V - m_v / \rho_v,$$

tedy jako rozdíl objemu rýže s vodou a objemu dolité vody V_v . Ten můžeme najít jako podíl hmotnosti vody a její známé hustoty při pokojové teplotě $\rho_v \doteq 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Výpočet objemu vody je oproti jeho měření v odběrném válci v našich podmínkách přesnější, protože máme přesnější váhy pro změření hmotnosti a hustota je snadno dohledatelná s vysokou přesností v tabulkách. Hustotu zrnek nakonec dostaneme jako

$$\rho_r = \frac{m_r}{V_r} = \frac{m_r}{V - m_v / \rho_v},$$

I tato metoda ale má svou nevýhodu: nedáme-li si pozor a budeme u měření příliš otálet, kapalina se může nasáknout do rýže. Z pozorování ale zjistíme, že při běžných podmínkách můžeme použít vodu, aniž bychom tím výsledky výrazně znehodnotili. Měření bychom dále mohli zpřesnit volbou rýže. Klasická bílá rýže, která je u nás nejběžnější, je rýží broušenou, zbavenou své slupky. Je tedy velmi pórovitá a kapalinu tak může nasáknout snáze. Hnědá rýže by mohla být v tomto ohledu lepší variantou.

Postup měření

K samotnému měření budeme potřebovat váhu, objemovou odměrku, nádobku, ve které budeme vážit rýži a vodu, a konečně rýži i vodu samotnou.

V našem případě jsme užili standardní laboratorní válec o objemu 100 ml s 1 ml stupnicí a váhu ScaleHouse s přesností $\pm 0,01 \text{ g}$.

Zvážíme rýži a vodu – objem vody přepočteme přes hustotu, protože v našich podmínkách jsme schopni měřit hmotnost mnohem přesněji než objem. Je dobré zvolit co nejmenší objem vody, ale je bezpodmínečně nutné, aby veškerá rýže byla pod hladinou. Poté tuto vodu nalijeme do odměrky s rýží, a po ustálení hladiny odečteme celkový objem.

Výsledky

Měření opakujeme pětkrát a jako hustotu vody uvažujeme $\rho_v = 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 1.

Výpočet chyby K odhadu nejistoty se dostaneme přes standardní chybu (SE). Ta se určuje jako

$$\sigma_{\text{SE}} = \frac{s}{\sqrt{N}},$$

kde N je počet měření a s výběrová směrodatná odchylka určená jako

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\rho_i - \bar{\rho})^2},$$

Tabulka 1: Hustota rýže ϱ

č.	$\frac{m_r}{\text{g}}$	$\frac{m_v}{\text{cm}^3}$	$\frac{V}{\text{cm}^3}$	$\frac{\varrho}{\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}}$
1	44,66	63,44	93,0	1,31
2	38,10	62,86	86,5	1,30
3	38,36	60,86	85,5	1,29
4	39,18	62,92	87,0	1,31
5	38,92	60,48	85,0	1,31

kde jsou ϱ_i změřené hustoty uvedené v tabulce 1 a $\bar{\varrho}$ je aritmetický průměr těchto hustot.

Jenže naše měření, jak jsme si již ukázali výše, je nepřímé, a tedy se nám chyby skládají. U rozdílu se sčítá chyba absolutní, zatímco u podílu chyba relativní. Chybu měřicích přístrojů určíme pomocí zákonu o propagaci chyby nezávislých proměnných v nepřímých měření jako

$$\sigma_r = \varrho \sqrt{\left(\frac{\Delta m_r}{m_r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V + \Delta m_v \varrho_v}{V - \varrho_v m_v}\right)^2}.$$

Celková chyba je tedy určena jako

$$\sigma = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_{SE}^2}.$$

Finálním výsledkem je tedy hodnota $\varrho_r = (1,30 \pm 0,01) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Diskuse a závěr

Přestože jsme prohlásili chybu způsobenou vsakováním do kapaliny za zanedbatelnou, je jasné, že bychom použitím jiné metody měření mohli dojít ještě k drobnému zpřesnění.

Volba vody se ukázala jako praktická, protože se příliš nevsakuje. Volbou vhodné kapaliny bychom mohli i tento efekt potlačit, například při použití koncentrovaného solného roztoku, ve kterém díky osmotickým jevům rýže nasákne vodou ještě méně.

Ve vědecké a průmyslové praxi se pro měření hustoty porézních a sypkých látek používají metody založené na podobném principu. Jednou z nich metod je pyknometrie. V klasické, kapalinové pyknometrii je pyknometr skleněnou nádobou, která má přesný výbrus a ve své zátce úzkou kapiláru. Tu jsme schopni naplnit vždy stejným, předem známým objemem, což umožňuje velmi přesné měření. Trochu jiná a zajímavější je *plynová pyknometrie* (angl. gas pycnometry). Plynový pyknometr pracuje na základě Boyleova–Mariottova zákona, který nám říká, že při izotermickém ději v ideálním plynu platí

$$pV = \text{konst.}$$

Samotný proces měření probíhá tak, že do pyknometru vložíme náš vzorek a napustíme jej inertním plynem, který zaplní póry materiálu. Po zaplnění měřicí komory plynem se změří tlak. Ten se pak nechá rozpínat do referenční komory, jejíž objem předem známe. Díky měření tlaku při rozpínání plynu je pak možné pomocí výše zmíněného zákona dopočítat jeho počáteční objem, odkud pak najdeme i objem našeho vzorku. Jako plyn se často užívá helium, protože je

nejen inertním plynem, který se vzorkem neinteraguje, ale je tvořeno malými atomy, takže se snáze dostane do menších pórů. Levnější alternativou je pak použití dusíku.

Závěrem můžeme konstatovat, že jsme úspěšně určili hustotu rýže pomocí ponořování do méně husté kapaliny. Hustota rýže byla stanovena na $\varrho_r = (1,30 \pm 0,01) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Karel Kolář

karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.