Úloha I.5 ... napružený kondenzátor

9 bodů; průměr 4,68; řešilo 79 studentů

Uvažujme vzduchový deskový kondenzátor, jehož desky jsou ke zbytku obvodu připojeny pružinkami o tuhosti k. V klidové poloze jsou od sebe vzdáleny d a mají plochu A ($A \gg d^2$). Kondenzátor začneme nabíjet tak, že se desky začnou přitahovat a přibližovat. Určete práci, kterou musíme vykonat, abychom kondenzátor nabili nábojem Q. Jaké maximální napětí můžeme v kondenzátoru vytvořit? *Jarda by rád zvýšil kapacitu své hlavy.*

Z Gaussova zákona je intenzita v okolí jedné desky $E = q/(2\varepsilon_0 A)$. Síla, kterou je jedna deska přitahována ke druhé, tak je $F = q^2/(2\varepsilon_0 A)$. Tato síla je kompenzována natažením pružinky, která se prodlouží o $\Delta x = F/k$. Vzdálenost mezi deskami se tak při nabití nábojem q vyrovná na

$$x = d - 2\Delta x = d - \frac{q^2}{\varepsilon_0 k\ A}\,.$$

Kondenzátor nabíjíme tak, že přenášíme náboj z jedné desky na druhou. Práce, kterou vykonáme přenesením malého náboje $\mathrm{d}q$, je

$$\mathrm{d}W = U(q)\,\mathrm{d}q = \frac{q}{C(q)}\,\mathrm{d}q\,,$$

kde $U(q)$ je napětí mezi deskami jako funkce náboje na nich a $C(q)$ je kapacita kondenzátoru v závislosti na náboji. Kapacita se totiž mění tím, jak se desky k sobě přibližují. Použijeme pro ni klasický vztah, ve kterém tuto změnu musíme uvážit

$$C(q) = \frac{\varepsilon_0 A}{x} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - \frac{q^2}{\varepsilon_0 k\ A}}\,.$$

Vykonanou práci tak získáme jako integrál

$$W(Q) = \int_0^Q \mathrm{d}W = \int_0^Q \frac{q\left(d - \frac{q^2}{\varepsilon_0 k\ A}\right)}{\varepsilon_0 A}\,\mathrm{d}q = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{4\varepsilon_0^2 A^2 k}\,.$$

K výsledku se dá analogicky dojít tak, že k energii samotného kondenzátoru v nabitém stavu $Q^2/(2C(Q))$ přičteme energii potřebnou na natažení pružin. Vidíme, že na nabití kondenzátoru na náboj Q je v případě pohybu desek potřeba vykonat menší práci, než kdyby se desky k sobě přibližovat nemohly (to odpovídá nekonečné tuhosti k), ačkoli jsme museli vykonat práci právě na natažení pružinek.

Když známe závislost energie na náboji a převodní vztah mezi nábojem na deskách a napětím

$$U = \frac{Q\left(d - \frac{Q^2}{\varepsilon_0 k\ A}\right)}{\varepsilon_0 A}\,,$$

vidíme, že budeme-li zvyšovat náboj na deskách, budou se přitahovat čím dál více, než se dotknou a napětí klesne na nulu. Je tedy zřejmé, že existuje maximální napětí, které lze v kondenzátoru vytvořit. To najdeme pomocí derivace funkce $U(Q)$ a nalezení jejího nulového bodu

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}Q} = \frac{d}{\varepsilon_0 A} - 3\frac{Q^2}{\varepsilon_0^2 A^2 k} \quad\Rightarrow\quad Q_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 d A k}{3}}\,.$$

Dosazením $Q_{\max}$ do vztahu pro napětí dostaneme maximální napětí na kondenzátoru jako

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{4k\ d^3}{27\varepsilon_0 A}}\,.$$

Dosazením do vzorce pro vzdálenosti pak můžeme ukázat, že toto maximální napětí nastává pro $x = 2d/3$. Je zřejmé, že při dostatečně vysoké tuhosti pružin můžeme dosáhnout libovolně vysokého napětí.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.