

Úloha I.4 ... padající čočka

8 bodů; průměr 5,52; řešilo 104 studentů

V jedné ruce držíme předmět ve vzdálenosti D od stropu. Kam na svislou osu procházející předmětem musíme umístit spojnou čočku s ohniskovou vzdáleností f , aby na stropě vznikl zaostřený obraz?

Umístíme nyní čočku do této vzdálenosti. Předmět nám poté vypadne z ruky, tj. padá volným pádem. Jak musíme pohybovat čočkou, aby obraz zůstal ostrý? Bude se pozice čočky po velmi dlouhé době blížit nějaké hodnotě? Předpokládáme, že výška místnosti je mnohem větší než D i f . Adamovi upadly brýle.

Označme a vzdálenost zobrazovaného předmětu od čočky a a' vzdálenost zaostřeného obrazu tohoto předmětu od čočky. Protože dle zadání potřebujeme zaostřený obraz na stropě, musí platit

$$D = a + a'.$$

Z Gaussovy zobrazovací rovnice známe vztah mezi a , a' a ohniskovou vzdáleností f

$$a' = \frac{af}{a - f}.$$

Dosazením do první rovnice a úpravami dostáváme kvadratickou rovnici

$$a^2 - Da + Df = 0,$$

takže máme dvě počáteční polohy čočky ve vzdálenosti a' od stropu

$$a' = (D - a) = \frac{D}{2} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 4Df}}{2}.$$

Pro spojnou čočku (podle zadání) platí $f > 0$, pro $D > 4f$ nám tedy vyjdou dvě možnosti. Pro $D = 4f$ musíme čočku umístit přesně doprostřed mezi předmět a strop, pro $D < 4f$ není možné takový bod vybrat. Zabývejme se proto na chvíli pouze případem $D \geq 4f$.

Po upuštění předmětu se mění vzdálenost podle vztahu $d(t) = D + gt^2/2$, takže vzdálenost čočky od stropu se mění dle vztahu

$$a' = \frac{d(t)}{2} \pm \frac{\sqrt{d(t)^2 - 4d(t)f}}{2} = \frac{D + \frac{1}{2}gt^2}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(D + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 - 4f\left(D + \frac{1}{2}gt^2\right)}}{2}.$$

Pokud však platilo $D \leq 4f$, pak se kvůli rostoucímu d objeví časem pozice pro čočku, kde bude podmínka zaostření splněna. Nastane to v okamžiku

$$D + \frac{1}{2}gt_0^2 = 4f \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{8f - 2D}{g}}.$$

Nakonec se situace ustálí, pro pozdní časy platí $d \gg f$, tedy

$$a' = \frac{d}{2} \pm d \frac{\sqrt{1 - 4\frac{f}{d}}}{2} \approx \frac{d}{2} \pm d \frac{1}{2} \left(1 - 4\frac{f}{2d}\right) = \begin{cases} d - f, \\ f. \end{cases}$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.