## Úloha I.3 ... školka s učitelkou

5 bodů; (chybí statistiky)

*Jarda valí po náměstí rychlostí* $1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *směrem do své oblíbené cukrárny. Dveře jsou už jen* $50\,\mathrm{m}$ *před ním, když si všimne, že jeho cestu křižuje učitelka vedoucí zástup dětí ze školky. Učitelka se nachází právě v polovině spojnice Jardy a dveří před ním a děti se za ní šinou rychlostí* $0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *kolmo k této spojnici. Jarda nechce projít skrz desetimetrový zástup dětí, aby se k němu nějaké omylem nepřipojily a on je nemusel zvát na dortík. Kdy nejdříve dorazí do cukrárny, pokud nebude měnit velikost své rychlosti?*

*Jardu nic nezastaví při cestě do Ovocného Světozoru.*

Nejprve se v našem řešení zamyslíme, jestli Jarda nemůže projít k cukrárně přímo po přímce. Na místo, kde jeho trasu protíná zástup dětí, dorazí za čas $t_0 = d/(2v) \doteq 16{,}7\,\mathrm{s}$, kde $d = 50\,\mathrm{m}$ je jeho počáteční vzdálenost k cukrárně a $v = 1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ je jeho rychlost. Zástup dětí se za tu dobu posune ale pouze o $ut_0 \doteq 8{,}3\,\mathrm{m}$, kde $u = 0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ je rychlost dětí, takže stále ještě asi $1{,}7\,\mathrm{m}$ zástupu bude Jardovi stát v cestě. Jarda tedy musí svoji trasu nějak upravit a zástup obejít.

Aby urazil co nejkratší vzdálenost a byl tedy v cukrárně co nejdříve, vyjde nejlépe, když při své cestě jen těsně mine buď poslední dítě, nebo první učitelku. V minulém odstavci jsme spočítali, že než dojde k zástupu, tak už jen několik posledních dětí mu bude stát v cestě, takže to vypadá, že je lepší obejít děti zezadu, a ne kolem paní učitelky. Pro jistotu ale propočítáme obě verze.

Uvažujme úhel $\alpha_1$, pod kterým se Jarda vydá obejít celý zástup. Projdeme si prvně případ s obejitím zástupu kolem paní učitelky. S tou se Jarda musí potkat v jednom bodě, a to po čase $t_1$ od začátku celého problému s obcházením. Zástup se za $t_1$ posune podél kolmice na Jardovu původní trasu o vzdálenost $ut_1$. Jarda tedy musí zvolit počáteční úhel $\alpha_1$ tak, aby platilo

$$\frac{d}{2}\operatorname{tg}\alpha_1 = ut_1\,.$$

Zároveň ale také on se do tohoto bodu musí dostat za čas $t_1$, což vyjadřuje podmínka

$$\frac{d}{2}\frac{1}{\cos\alpha_1} = vt_1\,.$$

Z obou rovnic vyjádříme $t_1$ a dosadíme do vzájemné rovnosti

$$\frac{d}{2u}\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{d}{2v}\frac{1}{\cos\alpha_1} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha_1 = \frac{u}{v} \doteq 19{,}5\,^\circ\,.$$

Jarda se tedy do cukrárny dostane za čas

$$T_1 = 2t_1 = \frac{d}{u}\frac{u/v}{\sqrt{1-(u/v)^2}} = \frac{d}{u}\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{u}{v}\right)\right) \doteq 35\,\mathrm{s}\,.$$

Nyní se podíváme na druhý jmenovaný případ, kdy Jarda obchází zástup kolem posledního dítěte. V tomto případě musí zvolit úhel $\alpha_2$ (který také považujeme za kladný) a k dítěti dorazí za čas $t_2$. Vzdálenost posledního dítěte od kolmice na původní Jardovu trasu je $l - ut_2$, kde $l = 10\,\mathrm{m}$ je délka zástupu dětí a také vzdálenost onoho dítěte od jmenované kolmice v okamžiku, kdy se Jarda odchýlil od původního směru. Z Jardova pohybu vyjádříme čas $t_2$ stejně jako v minulé části, takže dostáváme rovnici

$$\frac{1}{u}\left(l - \frac{d}{2}\operatorname{tg}\alpha_2\right) = \frac{d}{2v}\frac{1}{\cos\alpha_2}\,.$$

Pro přehlednost tuto rovnici podělíme $l$, vynásobíme $u$ a zavedeme pomocné bezrozměrné proměnné $a = ud/(2vl) = 0{,}833$ a $b = 2d/l = 2{,}5$. Po těchto úpravách máme

$$a + b\sin\alpha_2 = \cos\alpha_2 \,.$$

Celou rovnici umocníme na druhou, zjednodušíme pomocí známé trigonometrické rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a upravíme

$$(a + b\sin\alpha_2)^2 = 1 - \sin^2\alpha_2 \quad\Rightarrow\quad \left(b^2 + 1\right)\sin^2\alpha_2 + 2ab\sin\alpha_2 + a^2 - 1 = 0\,,$$

což je kvadratická rovnice pro $\sin\alpha_2$. Jejími řešeními jsou

$$\sin\alpha_2 = \frac{-ab \pm \sqrt{b^2 - a^2 + 1}}{b^2 + 1}\,,$$

kde by však volba záporného znaménka vedla na záporný úhel, což není náš případ. Nakonec tedy dostáváme

$$\sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2 + 1} - ab}{b^2 + 1} \quad\Rightarrow\quad \alpha_2 \doteq 3{,}8^\circ\,,$$

přičemž jsme dosadili $a \doteq 0{,}833$ a $b \doteq 2{,}5$.

Hledaný čas, který Jarda stráví na cestě do cukrárny, tak je

$$T_2 = 2t_2 = \frac{1}{v}\frac{d}{\cos\alpha_2} = 33{,}4\,\mathrm{s}\,.$$

Vidíme, že čas $T_2$ je podle předpokladu nižší než $T_1$. Za zadaných číselných hodnot je navíc změna Jardova směru minimální, stejně tak i jeho zdržení. Kdyby si však zástupu dětí všiml později, jeho zdržení na cestě do cukrárny by narostlo.

***Jaroslav Herman***
`jardah@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.