

Úloha I.3 ... školka s učitelkou

5 bodů; průměr 4,19; řešilo 183 studentů

Jarda valí po náměstí rychlostí $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ směrem do své oblíbené cukrárny. Dveře jsou už jen 50 m před ním, když si všimne, že jeho cestu křížuje učitelka vedoucí zástup dětí ze školky. Učitelka se nachází právě v polovině spojnice Jardy a dveří před ním a děti se za ní šinou rychlostí $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ kolmo k této spojnici. Jarda nechce projít skrz desetimetrový zástup dětí, aby se k němu nějaké omylem nepřipojily a on je nemusel zvát na dortík. Kdy nejdříve dorazí do cukrárny, pokud nebude měnit velikost své rychlosti?

Jardu nic nezastaví při cestě do Ovocného Světozoru.

Nejprve se v našem řešení zamyslíme, jestli Jarda nemůže projít k cukrárně přímo po přímce. Na místo, kde jeho trasu protíná zástup dětí, dorazí za čas $t_0 = d/(2v) \doteq 16,7 \text{ s}$, kde $d = 50 \text{ m}$ je jeho počáteční vzdálenost k cukrárně a $v = 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ je jeho rychlost. Zástup dětí se za tu dobu posune ale pouze o $ut_0 \doteq 8,3 \text{ m}$, kde $u = 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ je rychlost dětí, takže stále ještě asi 1,7 m zástupu bude Jardovi stát v cestě. Jarda tedy musí svoji trasu nějak upravit a zástup obejít.

Abyste urazil co nejkratší vzdálenost a byl tedy v cukrárně co nejdříve, vyjde nejlépe, když při své cestě jen těsně mine buď poslední dítě, nebo první učitelku. V minulém odstavci jsme spočítali, že než dojde k zástupu, tak už jen několik posledních dětí mu bude stát v cestě, takže to vypadá, že je lepší obejít děti zezadu, a ne kolem paní učitelky. Pro jistotu ale propočítáme obě verze.

Uvažujme úhel α_1 , pod kterým se Jarda vydá obejít celý zástup. Projdeme si prvně případ s obejitím zástupu kolem paní učitelky. S tou se Jarda musí potkat v jednom bodě, a to po čase t_1 od začátku celého problému s obcházením. Zástup se za t_1 posune podél kolmice na Jardovu původní trasu o vzdálenost ut_1 . Jarda tedy musí zvolit počáteční úhel α_1 tak, aby platilo

$$\frac{d}{2} \operatorname{tg} \alpha_1 = ut_1.$$

Zároveň ale také on se do tohoto bodu musí dostat za čas t_1 , což vyjadřuje podmínka

$$\frac{d}{2} \frac{1}{\cos \alpha_1} = vt_1.$$

Z obou rovnic vyjádříme t_1 a dosadíme do vzájemné rovnosti

$$\frac{d}{2u} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{d}{2v} \frac{1}{\cos \alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha_1 = \frac{u}{v} \doteq 19,5^\circ.$$

Jarda se tedy do cukrárny dostane za čas

$$T_1 = 2t_1 = \frac{d}{u} \frac{u/v}{\sqrt{1 - (u/v)^2}} = \frac{d}{u} \operatorname{tg} \left(\arcsin \left(\frac{u}{v} \right) \right) \doteq 35 \text{ s}.$$

Nyní se podíváme na druhý jmenovaný případ, kdy Jarda obchází zástup kolem posledního dítěte. V tomto případě musí zvolit úhel α_2 (který také považujeme za kladný) a k dítěti dorazí za čas t_2 . Vzdálenost posledního dítěte od kolmice na původní Jardovu trasu je $l - ut_2$, kde $l = 10 \text{ m}$ je délka zástupu dětí a také vzdálenost onoho dítěte od jmenované kolmice v okamžiku, kdy se Jarda odchýlil od původního směru. Z Jardova pohybu vyjádříme čas t_2 stejně jako v minulé části, takže dostáváme rovnici

$$\frac{1}{u} \left(l - \frac{d}{2} \operatorname{tg} \alpha_2 \right) = \frac{d}{2v} \frac{1}{\cos \alpha_2}.$$

Pro přehlednost tuto rovnici podělíme l , vynásobíme u a zavedeme pomocné bezrozměrné proměnné $a = ud/(2vl) = 0,833$ a $b = 2d/l = 2,5$. Po těchto úpravách máme

$$a + b \sin \alpha_2 = \cos \alpha_2 .$$

Celou rovnici umocníme na druhou, zjednodušíme pomocí známé trigonometrické rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a upravíme

$$(a + b \sin \alpha_2)^2 = 1 - \sin^2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad (b^2 + 1) \sin^2 \alpha_2 + 2ab \sin \alpha_2 + a^2 - 1 = 0 ,$$

což je kvadratická rovnice pro $\sin \alpha_2$. Jejími řešeními jsou

$$\sin \alpha_2 = \frac{-ab \pm \sqrt{b^2 - a^2 + 1}}{b^2 + 1} ,$$

kde by však volba záporného znaménka vedla na záporný úhel, což není náš případ. Nakonec tedy dostáváme

$$\sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2 + 1} - ab}{b^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \doteq 3,8^\circ ,$$

přičemž jsme dosadili $a \doteq 0,833$ a $b \doteq 2,5$.

Hledaný čas, který Jarda stráví na cestě do cukrárny, tak je

$$T_2 = 2t_2 = \frac{1}{v} \frac{d}{\cos \alpha_2} = 33,4 \text{ s} .$$

Vidíme, že čas T_2 je podle předpokladu nižší než T_1 . Za zadaných číselných hodnot je navíc změna Jardaova směru minimální, stejně tak i jeho zdržení. Kdyby si však zástupu dětí všiml později, jeho zdržení na cestě do cukrárny by narostlo.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.