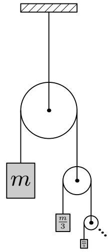
Úloha VI.4 ... nekonečné kladky

7 bodů; (chybí statistiky)

Mějme nekonečnou soustavu nehmotných kladek jako na obrázku, kde hmotnost každého dalšího závaží je třetinou hmotnosti předchozího. S jakým zrychlením se bude pohybovat první závaží o hmotnosti m?

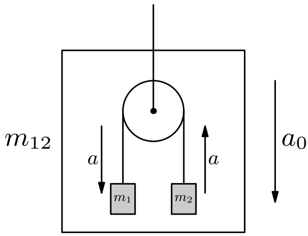
Matěj hledal rozdíl mezi spočetně a nespočetně mnoha kladkami.



Zavedení substituce

Než se pustíme do nekonečného zapojení kladek, odvodíme si pravidlo pro zjednodušení kladkového schématu, které je analogické například k pravidlům o sériovém/paralelním spojování rezistorů. Zde bude však jen jedno skládací pravidlo.

Rozebereme nejprve případ jedné samotné jednoduché kladky, která je upevněna na nějakém provázku, na který působí silou F_0. Na každé straně kladky je jedno závaží. Označme je m_1 a m_2. „Tíhové“ zrychlení, které působí na kladku, označme a_0 (pokud je kladka pověšena napevno, tak $a_0 = g$, vzhledem k neinerciální soustavě ale může být toto zrychlení jiné).



Obrázek 1: Nákres situace.

Na soustavu závaží m_1 a m_2 spojených provázkem, působí síly m_1a_0 a m_2a_0 opačnými směry a protože se obě závaží musí pohybovat se stejným zrychlením a vůči kladce, můžeme podle druhého Newtonova zákona psát

$$(m_1 + m_2)a = m_1a_0 - m_2a_0,$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}a_0, \tag{1}$$

kde jsme zvolili kladný směr a pro pohyb závaží m_1 dolů a m_2 nahoru (vůči kladce).

Vyjádříme sílu, kterou je napínán provázek pomocí zrychlení prvního závaží

$$F = m_1(a_0 - a).$$

Stejný výsledek bychom mimochodem dostali i pro druhé závaží. Dosadíme za a

$$F = m_1 \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) a_0 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}a_0.$$

Síla, která napíná provázek, na kterém je zavěšena kladka, je dvojnásobná

$$F_0 = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}a_0. \tag{2}$$

Vidíme, že tato síla je přímo úměrná zrychlení kladky. To znamená, že si celou kladku i s oběma závažími můžeme nahradit jedním závažím o hmotnosti

$$m_{12} = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}, \tag{3}$$

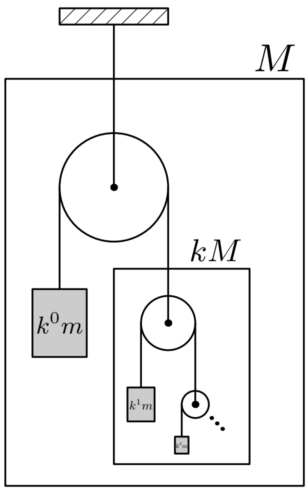
což nijak nezmění celkový silový efekt působící na horní provázek.

Nahrazení nekonečna

Označme koeficient klesání hmotností v soustavě $k = 1/3$ a řešme celý problém pro obecný případ, kdy k může být libovolné kladné číslo.

Celá naše nekonečná soustava kladek zavěšená za jeden provázek půjde také nahradit nějakým jedním závažím, jehož silové účinky na provázek budou stejné. Zatím neznámou hmotnost takového závaží označme M.

Nyní si odeberme první (největší) kladku s prvním závažím. Zbude nám tedy stejná nekonečná soustava jako minule, jen všechny hmotnosti budou $k$krát jiné. To znamená, si tuto soustavu můžeme nahradit jedním závažím o hmotnosti kM (viz. obrázek 2).



Obrázek 2: Nákres situace.

Máme tedy jednu kladku se závažími m a kM. Zároveň víme, že když tyto dvě závaží nahradíme podle (3) za jedno závaží, musíme dostat hmotnost M

$$M = \frac{4mkM}{m + kM}\,.$$

Tato rovnice má dvě řešení pro M:

$$M_1 = 0\,,$$

$$M_2 = \frac{(4k - 1)m}{k}\,.$$

Řešení I (nefyzikální)

Pro první případ $M_1 = 0$ vychází

$$a_1 = g\,.$$

V tomto případě tedy padají všechna závaží volným pádem. To si můžeme představit jako případ, kdy máme v naší soustavě zapojeno konečné (ale libovolně velké) množství kladek. Tedy existuje poslední kladka taková, že na ní už není pověšená žádná další menší kladka. Tento provázek, který je připevněný k poslednímu závažíčku v naší řadě, nesmí být zatížený žádným protizávažím (viz (2) pro případ jedné hmotnosti nulové $F_0 = 0$). Každou další kladku umístěnou výše tedy bude možné nahradit také nulovou hmotností a žádné závaží tak nebude brzdit žádné výše položené závaží a celý systém tak bude padat volným pádem.

Tato představa samozřejmě platí jenom v idealizovaném případě, kdy jsou všechny provázky i kladky nehmotné. Potom je ale vcelku pochopitelné, že všechna závaží spadnou na zem volně, protože na druhé straně jejich kladky je vždy nulová hmotnost.

Řešení II (realističtější)

Pro druhý případ máme jednu kladku se závažími m a $kM = (4k-1)m$. Zrychlení prvního závaží spočítáme podle vztahu (1) (kde dosadíme obě hmotnosti a $a_0 = g$)

$$a = \frac{m-(4k-1)m}{m+(4k-1)m}g\,,$$

$$a = \frac{1-2k}{2k}g\,.$$

Pojďme se podívat, co nám tento výsledek říká. Pokud $k = 1/2$, tak celý systém bude v rovnováze a zrychlení bude nulové. Pro větší k bude zrychlení směřovat nahoru a jeho velikost se bude limitně blížit k $-g$. Pro $k < 1/2$ bude první závaží zrychlovat směrem dolů a limitně se zrychlení blíží k g.

Pro náš konkrétní případ $k = 1/3$ vychází

$$a = \frac{1}{2}g\,.$$

Závěr

V reálné situaci nikdy nebudeme mít ∞ kladek. Ve fyzice se ∞ často používá pouze jako matematická pomůcka pro popis velkého množství předmětů nebo událostí, protože nám to velmi zjednoduší výpočty, než kdybychom měli počítat s konečně mnoha objekty. Když fyzik řekne, že nějaká veličina X je nekonečná, typicky tím myslí, že ve všech výpočtech formálně používá limitu $\lim_{X\to\infty}$. Pokud máme nekonečných veličin ve výpočtu více, v drtivé většině případů nezáleží na tom, kterou limitu provedeme jako první. V matematice ale existují příklady, kde vskutku závisí na pořadí limit. Jako příklad lze uvést

$$\lim_{x\to1^-}\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to1^-} 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to1^-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

Na něco podobného bychom narazili, pokud bychom naší úlohu s kladkami řešili rigorózně. Formální řešení by spočívalo v tom, že bychom příklad vyřešili pro jednu kladku, potom pro dvě kladky, atd. Bylo by tedy potřeba najít obecný vztah pro zrychlení první kladky v závislosti na počtu kladek n zapojených za sebou v naší soustavě. Nakonec bychom poslali $n \to \infty$ a získali bychom správný výsledek. Problém ale nastává v tom, že soustava n kladek zapojených za sebou nemá jednoznačné řešení, protože nevíme, jaké je napětí v posledním provázku. Pokud je napětí nulové (není tam žádné protizávaží), zjevně všech n kladek spadne volným pádem. Pokud ale uvážíme, že poslední provázek nemá nulové napětí, bude se systém kladek pohybovat netriviálním způsobem, který by bylo možné přesně dopočítat. Jedná se tedy o podobný problém, jako výše uvedený problém s pořadím limit u x^n. Pokud kladky přidáváme tak, že poslední provázek je volný, dostaneme řešení I, i když použijeme ∞ kladek. Pokud je v posledním provázku libovolné nenulové napětí, bude zrychlení první kladky postupně konvergovat k řešení II. A až kladek přidáme nekonečno za sebou, bude řešení II přesné.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.