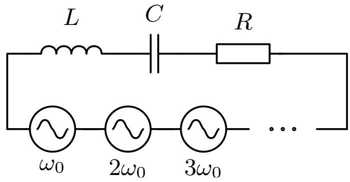
## Úloha V.5 ... ladíme obvod

9 bodů; průměr 1,64; řešilo 22 studentů




*Uvažujme sériově zapojený obvod s rezistorem o odporu $R$, cívkou a kondenzátorem s kapacitou $C$. Sériově k těmto prvkům jsou zapojeny zdroje střídavého napětí vždy se stejnou amplitudou $U$, které se ovšem liší svou frekvencí, která je $n\omega_0$, kde $n$ je přirozené číslo. Jaká může být frekvence $\omega_0$, abychom dokázali najít cívku s takovou indukčností $L$, aby na rezistoru byla napětí s frekvencí jinou než $N\omega_0$ potlačena alespoň o 90 %? $N$ je předem známé přirozené číslo (tj. hodnota $\omega_0$ na něm může záviset) a napětí s frekvencí $N\omega_0$ naopak více než o 90 % potlačit nechceme.*

*Jarda chtěl mít v obvodu co nejvíce různých zdrojů.*

Podívejme se nejprve na jednodušší situaci. Pro napětí na rezistoru v sériovém RLC obvodu s impedancí $z_n$ se zdrojem napětí o průběhu $U_n = U \sin(n\omega_0 t)$ platí

$$U_R = IR = \frac{U}{|z|}R = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 c}\right)^2}}U\,.$$

Chceme-li, ať je napětí na tomto rezistoru utlumeno alespoň o 90 %, musí platit $U_R \leq \alpha U$ pro $\alpha = 0{,}1$.

Zapojíme-li nyní do obvodu více zdrojů jako v zadání, bude celkové napětí dáno jejich superpozicí. Z lineárního chování RLC obvodu ale plyne, že můžeme napětí o různých frekvencích řešit zvlášť – pro každé si spočítáme impedanci a dle vztahu výše odvodíme dílčí napětí na rezistoru.

Podmínka ze zadání pak tedy říká, že pro všechna $n \neq N$ musí platit

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 c}\right)^2}} \leq \alpha \tag{1}$$

a zároveň

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(N\omega_0 L - \frac{1}{N\omega_0 c}\right)^2}} > \alpha\,. \tag{2}$$

Nechť nyní $n \neq N$ a řešme nerovnici (1):

$$\left(\frac{R}{\alpha}\right)^2 \leq R^2 + \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C}\right)^2\,,$$

$$R\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \leq \left|n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C}\right|\,, \tag{3}$$

odkud

$$L \in \mathbb{R}^+ \setminus \left(\frac{1}{n^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{n\omega_0}, \frac{1}{n^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{n\omega_0}\right)\,,$$

kde $A = R\sqrt{1/\alpha^2 - 1}$ a $n \neq N$; pro úplnou korektnost také zmiňme, že množinou $\mathbb{R}^+$ formálně nerozumíme množinu kladných reálných čísel, ale množinu přípustných hodnot indukčností cívek (rozdíl je v jednotce). Analogicky také vyřešíme rovnici (2), odkud dostaneme

$$L \in \left(\frac{1}{N^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{N\omega_0}, \frac{1}{N^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{N\omega_0}\right)\,.$$

Pokud pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$
\begin{aligned}
l_n &= \frac{1}{n^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{n\omega_0}\,,\\
p_n &= \frac{1}{n^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{n\omega_0}\,,
\end{aligned}
$$

a $J_n = (l_n,\, p_n)$ interval s těmito krajními body, můžeme podmínku ze zadání přepsat jako

$$
L \in \left[\mathbb{R}^+ \cap J_N\right] \setminus \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq N}} J_n\,.
$$

Toto můžeme interpretovat tak, že ve zkoumaném systému intervalů $J_n$ s krajními body $l_n$ a $p_n$ zjišťujeme, kdy $J_N$ obsahuje kladnou hodnotu $L$, kterou zároveň neobsahuje žádný z intervalů $J_n$ pro $n \neq N$.

Budeme nyní tvrdit, že umíme nalézt vyhovující $L$ právě tehdy, když $p_{N+1} < l_{N-1}$. Za tímto účelem učiníme několik pozorování.

1. Posloupnost $p_n$ je tvořena kladnými čísly a monotónně klesá k nule.

2. Posloupnost $l_n$ taktéž konverguje k nule, navíc zřejmě od nějakého $n_0$ vždy budou její členy záporné.

3. Je-li $\omega_0$ takové, že $l_{N-1} \leq 0$, pak nutně z monotonie $p_n$ bude platit

   $$
   \mathbb{R}^+ \cap (l_{N-1},\, p_{N-1}) \supseteq \mathbb{R}^+ \cap (l_N,\, p_N)\,,
   $$

   tedy nelze splnit podmínku ze zadání. Proto nás budou zajímat takové frekvence $\omega_0$, při kterých platí $l_{N-1} > 0$.

4. Podívejme se, kdy je posloupnost $l_n$ monotónní. Po spojitém rozšíření definičního oboru[1] můžeme psát

   $$
   0 > \frac{\mathrm{d}l_n}{\mathrm{d}n} = \frac{1}{n^2\omega_0}\left(A - \frac{2}{n\omega_0}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad n < \frac{2}{\omega_0 C A}\,,
   $$

   což je speciálně splněno, platí-li $l_{n+1} > 0$. Z toho důvodu je posloupnost $l_n$ klesající, dokud jsou její hodnoty kladné.

5. Pokud tedy platí $p_{N+1} < l_{N-1}$, má interval $(p_{N+1},\, l_{N-1})$ neprázdný průnik s intervalem $J_N$. V tomto průniku můžeme zvolit $L$, to bude tedy prvkem intervalu $J_N$, ale protože $L > p_{N+1} > p_{N+2} > \ldots$, nebude prvkem intervalů $J_{N+1}$, $J_{N+2}$ ani následujících. Stejně tak $0 < L < l_{N-1} < l_{N-2} < \cdots < l_1$, tedy není ani prvkem intervalů $J_1$ až $J_{N-1}$.

6. Pokud naopak platí $p_{N+1} \geq l_{N-1}$, máme též $l_{N+1} < l_N < l_{N-1} \leq p_{N+1} < p_N < p_{N-1}$, tedy

   $$
   J_N \subseteq J_{N-1} \cap J_{N+1}\,,
   $$

   tedy podmínku ze zadání nelze splnit.

[1] abychom mohli derivovat

Díky všemu výše uvedenému tedy víme, že musí platit $p_{N+1} < l_{N-1}$, pišme tedy

$$\begin{aligned}\frac{1}{(N+1)^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{(N+1)\omega_0} &< \frac{1}{(N-1)^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{(N-1)\omega_0}\,,\\ \omega_0 A \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N-1}\right) &< \frac{1}{C}\left(\frac{1}{(N-1)^2} - \frac{1}{(N+1)^2}\right),\\ \omega_0 &< \frac{2}{AC}\frac{1}{N^2-1}\,,\end{aligned}$$

což je požadovaná podmínka.

Nakolik je uvedené řešení spíše matematické, uvedeme ještě trochu fyzikální intuice. RLC obvod má svou rezonanční frekvenci a čím více se frekvence zdroje liší od této rezonanční frekvence, tím více bude utlumená. Proto stačí kontrolovat pouze utlumení dvou sousedních frekvencí – protože pokud dostatečně utlumíme je, budou napětí s frekvencemi ještě vzdálenějšími od rezonanční frekvence obvodu utlumené ještě více (toto je přesně ona monotónnost, kterou jsme několikrát zmiňovali výše). Hodnota $L$ tedy bude volená tak, aby rezonanční frekvence $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ byla blízko $N\omega_0$. Fyzikálnější přístup, kdy předpokládáme známý tvar rezonanční křivky, by pak mohl vypadat například takto: Útlum RLC obvodu podle dané frekvence vyjadřuje rezonanční křivka, která má jedno maximum v rezonanční frekvenci, jejíž šířka je určena parametry obvodu. Šířku křivky v bodě 90% útlumu můžeme vyjádřit z rovnice (3). S využitím substituce $A = R\sqrt{1/\alpha^2 - 1}$ dostáváme pro krajní body s uvážením pouze kladných frekvencí

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{-AC + \sqrt{A^2C^2 + 4LC}}{2LC}\,,\\ \omega_2 &= \frac{AC + \sqrt{A^2C^2 + 4LC}}{2LC}\,.\end{aligned}$$

Vzdálenost mezi nimi $\Delta\omega = A/L$ pak musí být menší než $2\omega_0$, aby v intervalu s útlumem menším než 90 % byla pouze frekvence $N\omega_0$ a ne frekvence jiných zdrojů. Z toho usuzujeme, že hledáme hranici pro $\omega_0$, kdy sousední frekvence $(N-1)\omega_0$ a $(N+1)\omega_0$ jsou právě mezní frekvence $\omega_1$ a $\omega_2$. Cílová frekvence $N\omega_0$ bude tedy v tomto případě přesně uprostřed intervalu, tedy průměrem $\omega_1$ a $\omega_2$

$$N\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\sqrt{A^2 + C^2 + 4LC}}{2LC} = \sqrt{\frac{A^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}\,.$$

Z tohoto vztahu nyní vyjádříme vhodnou indukčnost (volíme kladný výsledek)

$$\begin{aligned}0 &= 4L^2CN^2\omega_0^2 - 4L - A^2C\,,\\ L &= \frac{1 + \sqrt{1 + A^2C^2N^2\omega_0^2}}{2N^2\omega_0^2 C}\,.\end{aligned}$$

Dosazením indukčnosti do podmínky $\Delta\omega < 2\omega_0$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
2\omega_0 &> \frac{A}{L} = \frac{2N^2\omega_0^2 CA}{1 + \sqrt{1 + A^2C^2N^2\omega_0^2}}\,,\\
\sqrt{1 + A^2C^2N^2\omega_0^2} &> N^2\omega_0 CA - 1\,,\\
1 + A^2C^2N^2\omega_0^2 &> N^4\omega_0^2 C^2A^2 - 2N^2\omega_0 CA + 1\,,\\
AC(1 - N^2)\omega_0 &> -2\,,\\
\omega_0 &< \frac{2}{AC}\frac{1}{N^2 - 1}\,.
\end{aligned}
$$

Dostáváme tedy stejný výsledek jako předchozím postupem.

***Vojtěch David***
vojtech.david@fykos.cz

***Kateřina Rosická***
kacka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.