Úloha IV.E ... kyvadlo ve větru

12 bodů; průměr 9,13; řešilo 47 studentů

Změřte periodu kmitů torzního kyvadla v závislosti na délce vlákna. Použijte alespoň dva druhy materiálu závěsu. Co nejpřesněji určete všechny podstatné parametry, na kterých perioda závisí.

Terky zachránily experiment.

V řešení se nejdříve seznámíme s teorií k experimentu, představíme si uspořádání, pomocí kterého budeme měřit, budeme prezentovat získané výsledky, diskutovat je a nakonec z nich vyvodíme co nejpřesnější závěry.

Naším měřicím přístrojem budou stopky na mobilním telefonu. Pro porovnání použijeme dva druhy lanka – kovový drátek a tenký kabel.

Teorie

Podobně jako při stlačování nebo natahování pevných látek, i při jejich skrucování vzniká v materiálu napětí, které působí proti deformaci. Uvažujme válcový objekt (např. kovový drátek), jehož jednou podstavou začneme kroutit podél osy symetrie. Tím v materiálu způsobíme zmiňované pnutí. V prvním přiblížení můžeme předpokládat, že napětí bude úměrné úhlu otočení. Bude zde také vystupovat materiálová konstanta G, známá jako modul pružnosti ve smyku (modul torze, Coulombův modul), která má jednotku Pa a dá se nalézt vztah s Youngovým modulem pružnosti E.

Protože zde mluvíme o otáčivém pohybu, budeme dynamiku kmitů popisovat pomocí momentu sil. Pro válcový závěs můžeme v literatuře nebo na internetu nalézt vztah pro moment sil M, který vzniká mezi jednotlivými podstavami válce, jako

$$M = -D\varphi = -\frac{\pi G r^4}{2d}\varphi\,,$$

kde r je poloměr a d délka závěsu a φ je úhel otočení mezi podstavami. Konstanta D se nazývá direkční moment a její různá hodnota pro stejné závaží a jiné závěsy by znamenala rozdílnou periodu kmitů, jak uvidíme později. Znaménko mínus znamená, že moment sil působí proti vychýlení a vrací materiál do původní pozice. Tento vztah platí s dostatečnou přesností pouze pro malé úhly, proto nebudeme závaží příliš vychylovat z rovnovážné polohy.

Nalezený moment sil tedy bude působit na závaží, které bude periodicky roztáčet a zpomalovat. Vztah mezi úhlovým zrychlením ε a momentem sil M je

$$M = J\varepsilon\,,$$

kde J je moment setrvačnosti roztáčeného předmětu. V našem případě jsme použili dlouhou tenkou tyč upevněnou ve středu, takže její moment setrvačnosti je

$$J = \frac{1}{12}ml^2\,,$$

přičemž m je její hmotnost a l její délka. Pohybová rovnice

$$\frac{1}{12}ml^2\varepsilon = -\frac{\pi G r^4}{2d}\varphi$$

je analogická pohybové rovnici pro lineární harmonický oscilátor a vede na periodu kmitů

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2 d}{6\pi G r^4}}\,.$$

Zadání se ptá na závislost periody na délce závěsu, vidíme teď, že se perioda zvětšuje s odmocninou z d (tedy exponent, na který umocňujeme délku závěsu ve vztahu pro periodou, je $k = 1/2$). Také je větší se zvětšujícím se momentem setrvačnosti závaží, naopak se rychle zmenšuje s poloměrem a také s modulem pružnosti ve smyku.

Uspořádání a provedení experimentu

Experiment provedeme se dvěma druhy závěsu - kovovým drátkem a tenkým kabelem potaženým gumou. Není vhodné experiment měřit s tenkými lanky nebo nitěmi – ty mohou mít složitou vnitřní strukturu a náš teoretický model nemusí být úplně vhodný, ale hlavně mohou periody kmitů dosáhnout minutových časů, kdy už se výrazně projevují ztráty vlivem tření nebo odporu vzduchu. Už náš kabel není vhodným materiálem pro tento experiment vzhledem k prezentované teorii, je totiž složen se dvou druhů materiálu – kovu uvnitř a gumového obalu kolem. Na druhou stranu zadání nespecifikuje žádné požadavky na druh lanka a je možné, že nakonec bude teorie platná i pro takový závěs.

Jako závaží použijeme dřevěnou tyč. Tyč omotáme lankem a uděláme uzel co nejblíže tělu tyče. Druhý konec zavěsíme na další tyč, která je umístěna jako trám vodorovně v dostatečné výšce nad zemí. Postupujeme při měření od největší délky závěsu po nejmenší tak, že po změření periody vždy otočíme horní tyč tak, abychom na ní namotali trochu závěsu. Tím získáme dobře definované a vždy přibližně stejné zkrácení závěsu.

Na měření periody použijeme stopky na mobilním telefonu, přičemž pro zvýšení přesnosti měříme vždy několik po sobě jdoucích kmitů. Tím snížíme vliv reakční doby člověka. Pro měření po ustálení tyče v nehybné poloze do ní lehce ťukneme, aby se začala otáčet, a sledujeme, kdy dojde k jejímu zastavení. Jakmile vidíme první pohyb směrem zpět do rovnovážné polohy, spustíme stopky. Podobně po uplynutí několika kmitů při stejném pohybu stopky zastavíme.

Pro kovový drátek měříme čas deseti po sobě jdoucích kmitů, přičemž se při nejdelším závěsu dostáváme k době pod jednu minutu, což je experimentálně přijatelné. Pro měření s kabelem je perioda jednoho kmitu při nejdelším závěsu okolo půl minuty, měříme proto vždy jen dobu dvou kmitů.

Výsledky

Nejprve uvedeme naměřené hodnoty parametrů tyče a drátků a poté číselné hodnoty period kmitů.

Tabulka 1: Důležité parametry použitých předmětů.

	délka tyče	hmotnost tyče	poloměr drátku	poloměr kabelu vnitřní kov	poloměr kabelu celkem
	$\frac{l}{\mathrm{cm}}$	$\frac{m}{\mathrm{g}}$	$\frac{r_\mathrm{d}}{\mathrm{mm}}$	$\frac{r_\mathrm{k}}{\mathrm{mm}}$	$\frac{r_\mathrm{c}}{\mathrm{mm}}$
průměr	50,1	68	0,37	0,35	0,80
chyba	0,1	1	0,01	0,01	0,01

Tyč měla mít podle výrobce délku 50 cm, kterou jsme také naměřili pomocí krejčovského metru, chybu jsme proto odhadli na jeden milimetr. Poloměry drátků jsme změřili pomocí mikrometrického šroubu, abychom dosáhli co největší přesnosti. Pomocí kuchyňské váhy jsme našli hmotnost tyče, přičemž ani několik měření neukázalo jinou hodnotu, proto chybu odhadujeme jako nejmenší dílek na displeji, tedy 1 g.

Nyní již uvedeme naměřené hodnoty period pro oba závěsy s různými délkami. V následující tabulce už jsou uvedeny periody po vydělení naměřeného času počtem kmitů.

Tabulka 2: Naměřené periody kmitů v závislosti na délce závěsu.

kovový drátek		kabel	
$\frac{d_\mathrm{d}}{\mathrm{cm}}$	$\frac{T_\mathrm{d}}{\mathrm{s}}$	$\frac{d_\mathrm{k}}{\mathrm{cm}}$	$\frac{T_\mathrm{k}}{\mathrm{s}}$
71,4	4,95	70,5	27,8
66,4	4,83	65,1	27,0
61,4	4,61	59,9	25,1
56,4	4,43	53,8	24,6
51,4	4,20	48,5	23,3
46,4	3,98	43,3	22,0
41,4	3,71	37,8	21,0
36,4	3,49	32,5	19,1
31,4	3,23	26,5	17,7
26,4	2,96	21,3	15,7
21,4	2,68	15,8	13,6
16,4	2,30	10,5	10,9
11,4	2,07	7,4	9,6
		5,0	7,9
		2,3	5,8

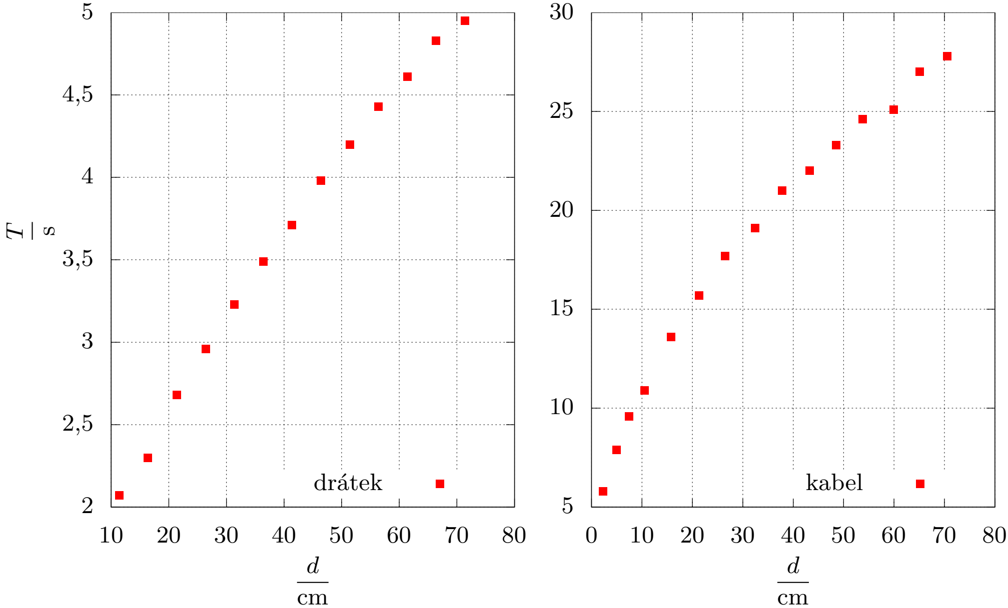
V případě kovového drátku máme hodnoty uvedené na setiny sekundy, protože chyba změření celkového času se do chyby jednotlivých period rovnoměrně rozprostřela díky vysokému počtu period v jednom měření. Pro případ kabelu jsou hodnoty uvedené na desetiny sekundy, protože počet period v jednom měření byl výrazně nižší.

Závislost periody na délce závěsu jsme vynesli do grafů na obrázku 1. Opravdu vidíme rostoucí periodu s délkou závěsu ve tvaru odmocniny. Pro ověření průběhu data proložíme mocninnou závislostí. Druhou, avšak ekvivalentní možností, je délky závěsu i časy period zlogaritmovat a následně proložit přímkou. Pokud použijeme vztah ze zadání, měli bychom dostat

$$\ln(T) = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{6\pi G r^4}}\sqrt{d}\right) = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{6\pi G r^4}}\right) + \frac{1}{2}\ln(d)\ ,$$

což po vynesení do grafu s hodnotami $y = \ln(T)$, $x = \ln(d)$ a $A = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{6\pi G r^4}}\right)$ dává rovnici přímky

$$y = \frac{1}{2}x + A\ .$$



Obrázek 1: Závislost periody kmitu tyčky na délce závěsu pro obě lanka. Všimněme si rozdílných rozsahu os.

Z naměřených dat tedy očekáváme přímku se sklonem 1/2. Právě tuto hodnotu budeme porovnávat s koeficientem, který nám vyjde, když zlogaritmovaná data proložíme přímkou, jak je vidět v grafech 2. Další možností, jak data vizualizovat, by bylo vynesení periody v závilosti na odmocnině z délky lana, kde by závislost byla opět lineární.

Nalezené hodnoty jsou pro kovový drátek $A_\mathrm{d} = (-0{,}53 \pm 0{,}03)$, $k_\mathrm{d} = (0{,}50 \pm 0{,}01)$ a pro kabel $A_\mathrm{k} = (1{,}33 \pm 0{,}01)$, $k_\mathrm{k} = (0{,}46 \pm 0{,}01)$. Z koeficientů k je tedy zřejmé, že naše teorie je pro dané závěsy dobře použitelná, jelikož jsme očekávali hodnotu $k = 1/2$.

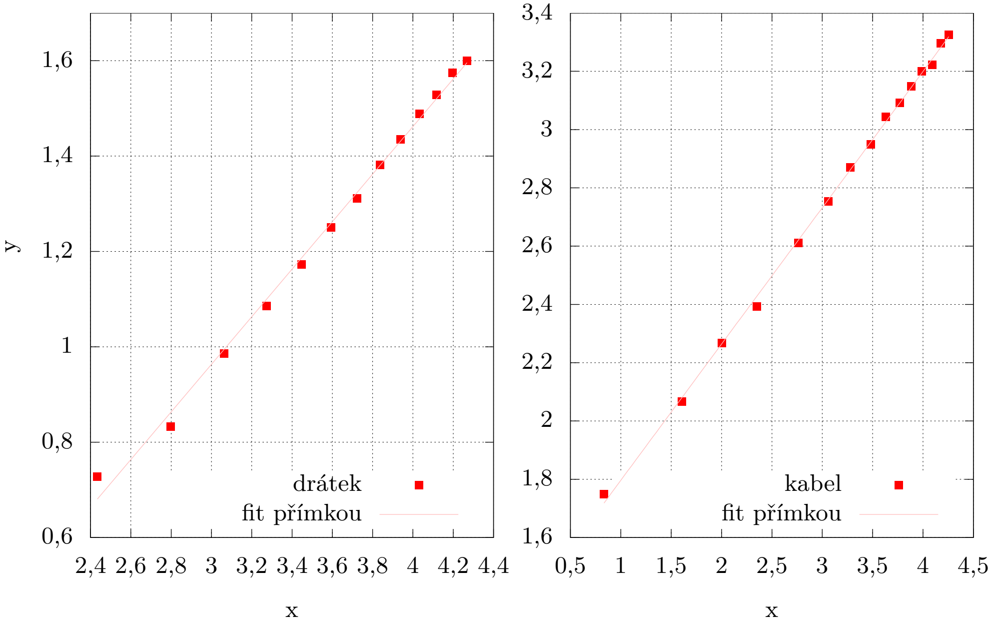
U kovového drátku využijeme hodnotu A_d pro stanovení modulu pružnosti ve skluzu. Získáme jej jako

$$G_\mathrm{d} = \left(\frac{2\pi}{\exp(A_\mathrm{d})}\right)^2 \frac{ml^2}{6\pi r^4} = (5\,500 \pm 200)\,\mathrm{GPa}\,.$$

U kabelu takový výpočet nemá úplně smysl, protože je složen z více materiálů. Přeci jenom ale můžeme určit konstantu, která bude určovat závislost doby kmitů na materiálu pro danou délku. Direkční moment neobsahuje žádné materiálové vztahy a tvoří pouze úměrnost mezi úhlovým vychýlením a momentem sil. Jak jsme ale viděli, závisí direkční moment na délce závěsu. Pokud spolu vynásobíme obě hodnoty, dostáváme konstantu pro daný materiál závěsu, která nám může porovnávat, jaké budou periody pro dvě rozdílná vlákna při stejně dlouhém závěsu. Zaveďme tedy konstantu $B = D \cdot d$ a spočítejme její hodnotu pro kabel i kovový drátek.

U kabelu dostáváme

$$B_\mathrm{k} = D_\mathrm{k} \cdot d = \frac{1}{12} ml^2 \left(\frac{2\pi}{\exp(A_\mathrm{k})}\right)^2 = (3{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m{\cdot}rad^{-1}}\,,$$



Obrázek 2: Závislost logaritmu periody kmitu tyčky na logaritmu délky závěsu pro obě lanka. Všimněme si rozdílných rozsahů os.

zatímco pro kovový drátek máme

$$B_\mathrm{d} = \frac{1}{12} m l^2 \left(\frac{2\pi}{\exp(A_\mathrm{d})} \right)^2 = (1{,}61 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-1}\,\mathrm{N{\cdot}m{\cdot}rad^{-1}}\,.$$

Diskuze

Z naměřených dat v logaritmických škálách je zřejmé, že se opravdu jedná o mocninné závislosti s exponentem, který jsme předpokládali. U závěsu z kabelu vyšel koeficient k_k o něco nižší než předpokládaných 0,5, což může být způsobeno tím, že se jedná o lanko složené ze dvou materiálů a nemusí pro něj přesně platit naše teorie. Odchylka od předpokládané hodnoty se ale liší jen v řádu procent, proto naše měření můžeme považovat za uspokojivé.

Podobně nemělo smysl pro tento závěs počítat modul pružnosti ve smyku, jelikož je složen ze dvou materiálů. Stanovili jsme tak pouze konstantu B, což je součin direkčního momentu vlákna a délky vlákna. Tato hodnota byla o téměř dva řády nižší u kabelu než u kovového drátku, což také odpovídá výrazně větším periodám. Takto velký rozdíl tkví v rozdílné kompozici obou závěsů, kdy v kabelu je výrazně méně kovu než v drátku a gumová izolace ze z běžné zkušenosti deformuje mnohem jednodušeji.

Podle parametrů všech použitých předmětů jsme vypočítali modul pružnosti ve skluzu pro kovový drátek jako 5 500 GPa. To je nesmyslně moc, protože běžné kovy dosahují hodnot v desítkách GPa.[1] Drátek tak vůči otáčení vykazuje větší odpor, než je dáno pouze jeho materiálem.

[1] https://www.engineersedge.com/materials/shear_modulus_of_rigidity_13122.htm

Můžeme to odůvodnit tím, že jsme nepoužili dokonale rovný válec, když byl použitý kus kovu odmotaný z většího množství, takže už dříve podléhal nějakým změnám tvaru. Tyto změny tvaru mohly mít za následek, že se drátek nestáčel po celé své délce stejně, jako jsme tomu předpokládali v teoretické části. Na druhou stranu je ovšem závislost na délce opravdu odmocninná, což je v souladu s použitou teorií.

Jelikož chyby výsledků se pohybovaly v řádu jednotek procent, můžeme konstatovat, že naše teorie i provedení experimentu byly konzistentní. Jako zdroje chyb můžeme uvést například odpor prostředí, který způsoboval tlumení amplitudy výchylky. Pokud bychom uvažovali odpor úměrný úhlové rychlosti, z teorie bychom dostali závislost periody na velikosti odporové síly (jak je tomu např. u tlumeného harmonického oscilátoru), čímž by se analýza dat stala výrazně složitější. Snažili jsme se proto pracovat v oblasti malých výchylek, aby rychlosti otáčení nebyly moc velké a mohli jsme tento efekt zanedbat. I naše teorie předpokládá malé výchylky, při velkých by nemusel moment síly být lineárně závislý na amplitudě výchylky. Také jsme v celém řešení neuvažovali moment setrvačnosti samotného lanka, protože vzhledem k jeho hmotnosti a rozměrům je o mnoho řádů menší než moment setrvačnosti tyče.

Závěr

Změřili jsme závislost periody torzních kmitů závaží na délce závěsu. Pro kovový drátek jsme dospěli k tomu, že perioda je úměrná odmocnině z délky závěsu, jak předpokládala naše teorie. U kabelu jsme naměřili lehce odlišnou závislost, což mohlo být způsobeno dvěma rozdílnými druhy materiálů ve struktuře vlákna.

Konstantu B (součin direkčního momentu vlákna a délky závěsu) pro kovové vlákno jsme určili jako $D_\mathrm{k} = (3{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m{\cdot}rad^{-1}}$, zatímco u kabelu byla výrazně menší, a to $D_\mathrm{d} = (1{,}61 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-1}\,\mathrm{N{\cdot}m{\cdot}rad^{-1}}$. Stanovili jsme modul pružnosti kovu drátku na $G_\mathrm{d} = (5\,500 \pm 200)\,\mathrm{GPa}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.