

Úloha III.E ... akustický teploměr

12 bodů; průměr 8,35; řešilo 49 studentů

Upevněte strunu ve dvou bodech o pevné vzdálenosti L a zajistěte, aby byla při měření vždy napnutá. Určete závislost základní frekvence jejích kmitů na teplotě.

Honzovi Bendovi hráblo.

Teorie

Hlavní podmínka ze zadání je, že vzdálenost upevnění drátu musí být pořád konstantní. Tento systém umíme buďto zkonstruovat nebo využijeme strunný nástroj například kytaru. Teorie úlohy je poté shodná se zadáním úlohy XXXVI.III.5¹ v níž se zkoumá vliv frekvence, kterou struny kytary vydávají, na teplotě. Výsledný vztah, který v úloze získáme je

$$f = \sqrt{\frac{f_0^2 - \frac{E\alpha}{4L^2\rho}\Delta T}{1 + \alpha\Delta T}},$$

kde E je Youngův modul pružnosti, α délková teplotní roztažnost, ρ hustota struny, L vzdálenost upevnění struny, f_0 je původní frekvence struny a ΔT teplotní rozdíl struny.

Z řešení je nedůležitější poznatek, že pro zápornou změnu teploty, tedy její ochlazení, očekáváme vyšší frekvenci. To intuitivně očekáváme, jelikož máme pevné úchyty a při ochlazení se bude struna chtít zkrátit. To kvůli pevným úchytům nemůže a dojde ke zvýšení napětí uvnitř struny, tudíž i zvýšení vydávané frekvence. Při ohřátí strun nastane pokles její frekvence.

Postup měření

K měření použijeme klasickou šestistrunnou kytaru, osazenou až na nejtenčí strunu E. Vzdálenost napnuté struny mezi pražcem a kobylkou je $d = 65,0$ cm. Teplotu strun budeme měnit vložením do prostředí se zkoumanou teplotou a k měření frekvence použijeme mobilní telefon s aplikací Spectriod.

Struny se skládají z ocelových drátů, které jsou od struny G ovinuty ještě bronzovým drátem. Důležitý parametr, který se pro struny měnil byl jejich průměr pro nejtenčí strunu $d_B = 0,38$ mm až po nejtlustší s bronzovým vynutím $d_E = 1,32$ mm. Avšak pro ovinuté struny víme pouze celkovou tloušťku, nevíme zda se mění tloušťka ocelového drátu nebo pouze vinutí. Bronz i ocel jsou slitiny, a ty mívají v závislosti na poměru kovů různé mechanické vlastnosti. Proto je budeme považovat za neznámé, kterými budeme při prokládání fitovat.

První měření jsme provedli za teploty 20,1 °C, při které jsme naladili struny, co nejlépe jejich základní frekvenci.

Strunu jsme uhodili vždy, co nejsilněji a přes trsátko, aby nedošlo k přenosu tepla na strunu z prstu. Při opakovaném uhození jsme naměřili již stejnou frekvenci. Při měření Spectriodem vidíme vždy celé spektrum pro daný čas. Struna nevydává pouze jednu základní frekvenci, nýbž i její módy, tedy celočíselné násobky. Při měření jsme vždy vybírali pouze základní frekvenci, jelikož její amplituda byla největší.

Kytaru jsme následně přenesli do tří dalších prostředí s různými teplotami a nechali jsme celou kytaru přejít do tepelné rovnováhy s prostředím.

Při prokládání bychom chtěli použít vzorec z teorie, pojďme si, ale nejdříve odhadnout velikosti jednotlivých členů. Pokud budeme předpokládat, že se struny skládají z kovů můžeme

¹https://fykos.cz/_media/rocnik36/ulohy/pdf/uloha36_3_5.pdf

Tabulka 1: Frekvence strun při teplotě 20,1 °C.

struna	$\frac{f}{\text{Hz}}$
B	246,6(1)
G	195,5(1)
D	146,6(1)
A	109,7(1)
E	81,90(1)

Tabulka 2: Frekvence jednotlivých strun při různých teplotách.

$\frac{t}{\text{°C}}$	$\frac{\Delta t}{\text{°C}}$	$\frac{f_B}{\text{Hz}}$	$\frac{f_G}{\text{Hz}}$	$\frac{f_D}{\text{Hz}}$	$\frac{f_A}{\text{Hz}}$	$\frac{f_E}{\text{Hz}}$
26,5(1)	6,4(2)	246,1(1)	195,1(1)	146,3(1)	109,5(1)	81,8(1)
20,1(1)	0,0(2)	246,6(1)	195,5(1)	146,6(1)	109,7(1)	81,9(1)
12,0(1)	-8,1(2)	247,7(1)	196,1(1)	146,9(1)	110,0(1)	82,1(1)
5,8(1)	-14,3(2)	248,5(1)	196,5(1)	147,1(1)	110,2(1)	82,3(1)

očekávat, že materiálové hodnoty řádově budou $\alpha \approx 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $E \approx 10^{11} \text{ Pa}$ a $\rho \approx 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Vzhledem k předpokládané velikosti teplotní roztažnosti a dosaženého teplotního rozdílu desítky stupňů Celsia, můžeme jmenovatel považovat za jednotku. Při prokládání, zavedeme nový parametr $\beta \equiv E\alpha/\rho$, který bude charakterizovat materiálové vlastnosti struny. Výsledná teoretická závislost bude

$$f(x) = \sqrt{f_0^2 - \frac{\beta}{4L^2} x}.$$

Graf s hodnotami a proložením je vidět níže spolu s tabulkou hodnot fitů.

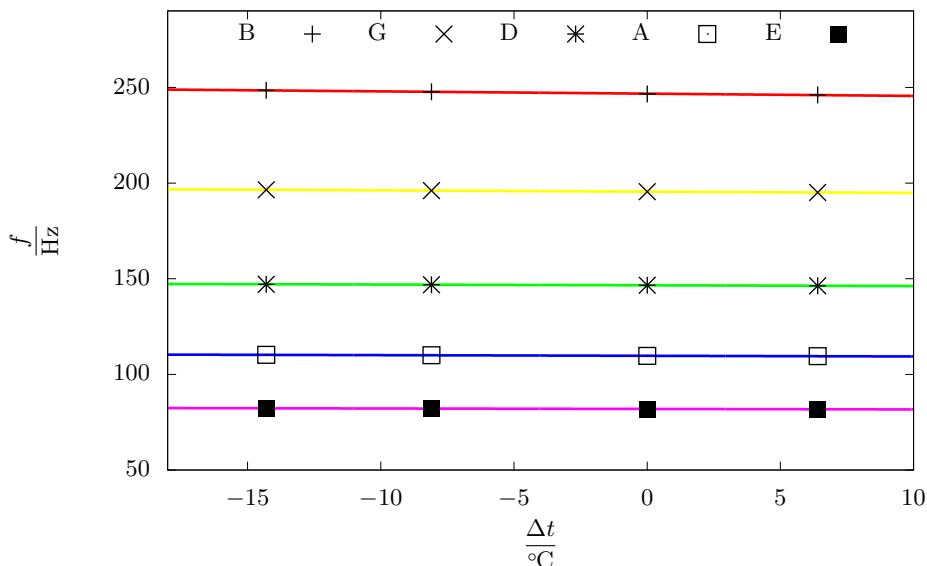
Tabulka 3: Parametry proložení.

struna	B	G	D	A	E
f_0 [Hz]	246,76(8)	195,53(1)	146,57(2)	109,71(1)	81,93(2)
β [Hz \cdot m 2 \cdot K $^{-1}$]	99(7)	45(1)	19(1)	12,7(3)	6,7(7)

Z grafu a naměřených dat je jasné, že pro tlustší struny je změna frekvence méně zřetelná. To může souviset s dodatečným bronzovým vynutím, se kterým náš teoretický model nepočítal. Z grafu jde vidět, že změny frekvence vlivem teploty jsou malé vzhledem k rozdílu základních harmonických frekvencí strun.

Diskuze

Vzhledem ke zvolenému způsobu měření mohlo naše výsledky ovlivnit několik faktorů. Největší faktor hrál způsob zahřívání, resp. ochlazování, strun. Nepodařilo se nám měnit teplotu výhradně strun, ale vždy jsme nechávali dosáhnout finální teploty celou kytaru, čímž muselo nutně



Obrázek 1: Závislost frekvence strun a změně teploty. Vzhledem k malým změnám frekvence vypadají závislosti jako konstantní.

docházet i ke změně délky těla kytary. Tento vliv by šel ovlivnit elektrickým ohřevem strun. Strunou bychom nechali téct elektrický proud, struna by se chovala jako odpor a tepelnými ztrátami by se zahřála. Připojením termistoru bychom určili i teplotu struny.

V extrémním případě, kdy by se kytara roztáhla více než struna bychom mohli dokonce pozorovat pokles frekvence struny při snížení teploty. To by byl důsledek snížení napětí ve struně.

Tento vliv jsme při měření i nejspíše pozorovali při snižující se materiálové konstantě β . Pro strunu B řádově odpovídá očekávané hodnotě pro kovy $\beta_t = 10^{11} \cdot 10^{-5}/10^4 \text{ Hz} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-1} = 100$, avšak pro další struny klesá a rozdíl ve frekvencích je menší. Teplotními změnami prochází i další veličiny hlavně plošný průřez struny a hustota struny. To mohlo mít vliv pro jinak tlusté struny, avšak jelikož se jedná o plošné případně objemové veličiny, bude škálování méně výrazné. Zároveň změna napětí probíhá pouze ve směru struny, tudíž nepředpokládáme, že se budou příčné rozměry výrazně měnit. Teoreticky je to propočteno v závěru úlohy, na kterou se v teorii odkazujeme.

Dále bychom se mohli zaměřit nad určením teploty strun. Kvůli malé tepelné kapacitě strun jsme nemohli přiložit teploměr přímo na strunu, aniž by nedošlo ke změně teploty. To by nebylo realizovatelné ani kvůli jejich malé ploše. Museli jsme tedy počkat až se ustálí teplota kytary s okolím a předpokládat, že stejnou teplotu mají i struny.

Zároveň jsme nepředpokládali skokové změny upevnění kytary. Při velkých změnách napětí může dojít k pohybu upevňujících kolíků v kobylce, či u navinutí pražce. Tuto změnu bychom pozorovali jako výraznou změnu frekvence jedné struny oproti ostatním.

Nakonec bychom mohli použít nástroj s delšími strunami, kde by došlo k větší změně

např. basu, či harfu, která má výhodu ve velkém počtu strun o různých frekvencích.

Výsledky

Podařilo se nám ověřit trend rostoucí frekvence pro klesající teplotu. Změřili jsme tuto závislost pro 5 kytarových strun, u nichž jsme pozorovali rozdílný parametr β . Ten charakterizoval materiálové vlastnosti strun a mohl být ovlivněn např. vnutím, které se vyskytovalo u tlustších strun.

Patrik Kašpárek

patrik.kasperek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.