Úloha III.5 ... vzduch pod vodou

10 bodů; průměr 3,97; řešilo 72 studentů

Uvažujme válcovou skleničku o zanedbatelné hmotnosti, ploše vnitřního průřezu S a výšce h, kterou obrátíme dnem vzhůru a její otevřený okraj zarovnáme s hladinou vody v rezervoáru. Potom začneme pomalu tlačit směrem dolů. Jakou práci vykonáme, jestliže takto posuneme sklenici i se vzduchem uvnitř tak, aby byla její podstava $d > 0$ pod hladinou?

Bonus: *Uvažujme nyní realističtější případ. Jakou práci musíme vykonat, abychom sklenici o stejných rozměrech, ale hmotnosti m, úplně ponořili na dno nádoby o ploše A, v níž voda dosahuje na začátku výšky H? Uvažujte, že sklenice je po dosažení dna celá potopená.*

Jarda by se na Titanic podívat nejel...

Protože úloha není tak jednoduchá, jak by se na první pohled mohla zdát. Proto ukážeme několik způsobů řešení, které se výrazně liší svou matematickou obtížností. Nejprve vyřešíme úlohu pomocí triku se zavřenou sklenicí, poté úlohu převedeme pouze na počítání těžiště, ve třetím řešení použijeme termodynamický potenciál entalpii a čtvrtý způsob, kde práci spočítáme přímo ze silového působení, bude myšlenkově nejvíce přímočarý, zato matematicky více komplikovaný.

Nejdříve ovšem zavedeme značení veličin. Dno sklenice je po otočení nahoře, horní okraj je dole. Výška vnitřního objemu sklenice (t.j. výška sklenice) zůstává h, plocha průřezu vnitřku je S. Jakmile se sklenice ponoří, výška objemu vzduchu uvnitř se zmenší a budeme ji značit x (od dna sklenice směrem dolů). Písmenem y budeme značit vzdálenost dna nádoby od hladiny směrem dolů, v počáteční poloze proto $y = -h$. Hustota vody je ρ, tíhové zrychlení g, atmosférický tlak p_a a tlak uvnitř sklenice je p (na začátku tedy $p = p_\mathrm{a}$). Jestliže je sklenice ponořená při $y = d$, pak označíme $x = x^*$. Pro $y = 0$ zase výšku objemu vzduchu uvnitř sklenice budeme značit $x = x_0$.

Myšlenkový experiment se zavřenou skleničkou

Na začátku úlohy je nutné si uvědomit, kde všude se naše vykonaná práce projeví. Na sklenici ve vodě působí vztlaková síla $F_\mathrm{v} = V\rho g$, kde V je objem vzduchu, který je ve sklenici pod hladinou vody, ρ je hustota vody a g je tíhové zrychlení. Tato síla působí směrem vzhůru, a proto na posouvání sklenice dále pod vodu potřebujeme konat práci. Další silou je tíhová síla vzduchu, který má ve sklenici vždy hmotnost m, takže jeho tíhová síla je $F_g = mg$. Hustota vzduchu je ovšem za normálního tlaku a teploty přibližně o tři řády nižší než vody, proto ji v našem řešení můžeme zanedbat.

Další práci musíme spotřebovat na stlačování vzduchu uvnitř. Práce potřebná ke stlačení vzduchu u tlaku p o malý objem $\mathrm{d}V$ je $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V = pS\,\mathrm{d}x$, kde jsme diferenciál objemu $\mathrm{d}V$ zapsali jako součin podstavy S a změny výšky vzduchu ve sklenici $\mathrm{d}x$.

Protože se objem vzduchu ve sklenici vlivem stlačování v závislosti na hloubce ponoření mění, vyřešíme úlohu trikem. Koncový stav sklenice a vzduchu v ní nezávisí na procesu, kterým se ho dosáhne (pokud jsou všechny části procesu reverzibilní a vratné, takže se při nich neztrácí energie například ve formě tepla).

Představíme si, že nějakým pístem, se kterým později budeme moci ve sklenici posunovat, utěsníme i spodní (při normálním používání horní) otvor sklenice. Píst necháme zatím na okraji sklenice, tedy ve vzdálenosti h od jejího normálního dna, a celou sklenici ponoříme do vody tak, že její dno (horní podstava) je y pod hladinou. Tím jsme vykonali práci na překonání vztlakové síly.

Nyní když ovšem uvolníme píst, tak se změní jeho poloha, protože tlak vody je vyšší než atmosférický tlak p_a, který zůstal ve sklenici. Píst se bude pohybovat nahoru, dokud se tlaky nevyrovnají. Pokud bychom píst jenom pustili, stlačil by plyn až moc a třeba začal kmitat. Kdybychom ho ale pouštěli pomalu, mohli bychom práci, kterou vykoná voda svým hydrostatickým tlakem, nějak využít. Tím bychom tuto práci mohli odečíst od práce, kterou jsme vykonali ponořením sklenice pod vodu.

Budeme tedy postupovat přesně tímto způsobem. Práce potřebná na překonání vztlakové síly je rovna

$$W_{\mathrm{v}} = \int_{-h}^{0} (h+y)\, S\rho g \,\mathrm{d}y + \int_{0}^{d} hS\rho g \,\mathrm{d}y \,.$$

Druhý člen popisuje situaci, kdy už je celá sklenice ponořená pod vodou. V takovém případě je působící vztlaková síla $F_{\mathrm{v}} = Sh\rho g$ konstantní. První člen popisuje situaci, kdy je část sklenice nad vodou a vztlaková síla vody je úměrná jen ponořené části o výšce $h+y$. Souřadnice y popisuje vzdálenost dna sklenice od hladiny, na začátku tedy $y = -h$, zatímco když se celá sklenice ponoří, tak $y = 0$. Na konci pak $y = d$. Celková vykonaná práce tedy je

$$W_{\mathrm{vz}} = \frac{h^2}{2} S\rho g + hS\rho g d \,.$$

Vykonáním této práce jsme dostali sklenici do hloubky d pod hladinu. Nyní píst začneme pomalu pouštět nahoru. Označme x jako vzdálenost pístu od dna sklenice (takže na začátku $x = h$). Tlak vody v závislosti na x je dán jako součet atmosférického tlaku p_{a} a hydrostatického tlaku

$$p_{\mathrm{v}} = (x+d)\,\rho g + p_{\mathrm{a}} \,.$$

Proti tlaku vody působí zevnitř sklenice na píst tlak

$$p = p_{\mathrm{a}} \frac{h}{x} \,,$$

přičemž jeho vyjádření v závislosti na x jsme dostali z izotermického děje z podmínky $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Síla působící na píst tak je

$$F = S\,(p_{\mathrm{v}} - p) = S\left((x+d)\,\rho g + p_{\mathrm{a}} - p_{\mathrm{a}}\frac{h}{x}\right) \,.$$

Práci, kterou voda vykoná, tak najdeme jako

$$W_{\mathrm{v}} = \int_{h}^{x^*} S\left((x+d)\,\rho g + p_{\mathrm{a}} - p_{\mathrm{a}}\frac{h}{x}\right)(-\,\mathrm{d}x) \,,$$

kde x^* je rovnovážná poloha pístu, kdy se vyrovná tlak stlačeného vzduchu uvnitř sklenice a tlak vody. Integrací dostáváme

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{v}} &= S\left[\left(x^2/2 + dx\right)\rho g + p_{\mathrm{a}} x - p_{\mathrm{a}} h \ln x\right]_{x^*}^{h} = \\ &= S\left(\left(\frac{h^2 - {x^*}^2}{2} + d\,(h - x^*)\right)\rho g + p_{\mathrm{a}}\,(h - x^*) - p_{\mathrm{a}} h \ln\frac{h}{x^*}\right) \,. \end{aligned}$$

Nyní už jenom zbývá najít onu rovnovážnou polohu pístu. Tu najdeme tehdy, když je síla působící na píst nulová, tedy

$$(x^* + d)\,\rho g + p_{\mathrm{a}} = p_{\mathrm{a}} \frac{h}{x^*} \,,$$

což je kvadratická rovnice pro x, jejímž řešením je

$$ {x^*}^2\rho g + x^* d\rho g + x^* p_\mathrm{a} - p_\mathrm{a} h = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{-\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right) + \sqrt{\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + 4p_\mathrm{a} h\rho g}}{2\rho g}\,, $$

kde jsme museli vybrat kladný kořen, protože pro záporný by x^* bylo záporné, což nedává smysl. Dosazením do rovnice výše dostaneme práci, kterou vykonala voda, jako

$$ W_\mathrm{v} = S\left(\left(\frac{h^2 - {x^*}^2}{2}\right)\rho g + \left(h - x^*\right)\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right) - p_\mathrm{a} h \ln\frac{h}{x^*}\right)\,. $$

Celková práce, kterou jsme museli vykonat, je tedy

$$ W_\mathrm{celk} = S\left(\frac{{x^*}^2\rho g}{2} - hp_\mathrm{a} + x^* d\rho g + x^* p_\mathrm{a} + p_a h \ln\frac{h}{x^*}\right)\,. $$

Dosazením z kvadratické rovnice člen $-{x^*}^2\rho g = -p_\mathrm{a} h + x^* d\rho g + x^* p_\mathrm{a}$ dostáváme

$$ W_\mathrm{celk} = S\left(-\frac{{x^*}^2\rho g}{2} + p_a h \ln\frac{h}{x^*}\right)\,, $$

což po dosazení rovnovážné polohy konečně vede na výsledek

$$ \begin{aligned} W_\mathrm{celk} = S\frac{-2\rho g p_\mathrm{a} h - \left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + \sqrt{\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + 4p_\mathrm{a} h\rho g}\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)}{4\rho g} + \\ + S p_a h \ln\frac{2h\rho g}{-\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right) + \sqrt{\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + 4p_\mathrm{a} h\rho g}}\,. \end{aligned} $$

Myšlenkový experiment se zrníčky

Celý takový proces lze myšlenkově popsat i trochu jinak. Představme si, že pod hladinou až do hloubky h jsou na (spojitých) poličkách rozmístěna zrnka písku. Píst, kterým jsme uzavřeli spodní otvor ve sklenici, je dutý, takže do něj můžeme zrníčka posouvat. Píst se ze začátku nemůže ve sklenici hýbat. Nasuneme nejvyšší zrníčka do pístu, takže celá sklenice se trochu ponoří, protože jsme zvětšili tíhovou sílu. Nasuneme další zrníčka a sklenice znovu klesne. Totéž opakujeme až do doby, než jsou všechny zrníčka v pístu a celá sklenice je ponořená těsně pod hladinou a to tak, že tíha zrníček vyváží vztlakovou sílu vody. V takovém případě $m = V\rho$, kde m je hmotnost zrníček a V objem sklenice.

Nyní je výslednice sil, které působí na sklenici s pístem a zrníčky, nulová. Sklenici můžeme posunout do libovolné hloubky bez konání práce. Při dosažení požadované hloubky d (od dna sklenice k hladině) sklenici na chvíli připevníme tak, aby se nemohla hýbat (např. ji připoutáme ke dnu). Všechen písek z pístu vysuneme a vrátíme na původní místo pod hladinou. Právě tady tímto vytahováním písku vykonáme práce, která je potřeba k ponoření uzavřené sklenice do vody. Vykonaná práce je změna těžiště písku v tíhovém poli a je rovna

$$ W_\mathrm{vz} = mg\left(d + h - \frac{h}{2}\right) = Sh\rho g\left(d + \frac{h}{2}\right)\,, $$

což je v naprostém souladu s výrazem výše.

Nyní najdeme na poličce $d + h$ pod hladinou u ponořené sklenice další zrníčka písku. Do pístu jich nasuneme tolik, abychom píst mohli uvolnit z vazby, ale aby se nikam nepohnul, tedy aby tlaková síla vzduchu uvnitř a tíhová síla zrníček vyrovnaly tlak vody. Poté zrníčka začneme pomalu odebírat a přesouvat na poličky vedle pístu. Po odebrání zrníčka se píst posune nahoru, aby se vyrovnaly síly. Hmotnost zrníček v pístu je tak v závislosti na objemu vzduchu ve sklenici z rovnosti sil

$$M(x)\,g + Sp_\mathrm{a}\frac{h}{x} = (x+d)\,\rho g S + p_\mathrm{a} S \quad \Rightarrow \quad M(x) = \frac{S}{g}\left((x+d)\,\rho g + p_\mathrm{a} - p_\mathrm{a}\frac{h}{x}\right)\,.$$

Označme $M_0 = M(h) = S\,(h+d)\,\rho$ hmotnost zrníček na začátku posouvání pístu. Budeme ji potřebovat záhy.

Poslední zrníčko z pístu odstraníme u rovnovážné polohy x^*. Hustota zrníček písku na poličkách vedle sklenice pak je

$$\lambda(x) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = \frac{S}{g}\left(\rho g + p_\mathrm{a}\frac{h}{x^2}\right)\,.$$

Tlak vody tedy kromě stlačení vzduchu vykonal i práci na zvednutí zrníček písku. Stačí nám proto najít jejich těžiště a dostaneme velikost této vykonaná mechanické práce. Vzdálenost těžiště od dna sklenice najdeme jako

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{M_0}\int_{x^*}^{h} \lambda(x)\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(h+d)\,\rho g}\left(\rho g\frac{h^2 - {x^*}^2}{2} + p_\mathrm{a} h \ln\frac{h}{x^*}\right)\,.$$

Těžiště zrníček se tedy z poličky v hloubce $h + d$ pod hladinou zvedlo o

$$t = h - x_\mathrm{T} = \frac{1}{(h+d)\,\rho g}\left(hd\rho g + \rho g\frac{h^2}{2} + \rho g\frac{{x^*}^2}{2} - p_\mathrm{a} h \ln\frac{h}{x^*}\right)\,,$$

takže jejich potenciální energie se zvýšila o

$$W_\mathrm{v} = M_0 g t = S\left(hd\rho g + \rho g\frac{h^2}{2} + \rho g\frac{{x^*}^2}{2} - p_\mathrm{a} h \ln\frac{h}{x^*}\right)\,.$$

Tuto potenciální energii zrníček lze nějak využít, proto ji odečteme od práce, kterou jsme vykonali při zvedání prvních zrníček. Celková práce, kterou jsme museli vykonat, je proto

$$W_\mathrm{celk} = W_\mathrm{vz} - W_\mathrm{v} = S\left(-\rho g\frac{{x^*}^2}{2} + p_\mathrm{a} h \ln\frac{h}{x^*}\right)\,,$$

což dosazením za ${x^*}^2$ vede opět na stejný výsledek jako v minulé části.

Řešení pomocí entalpie

Entalpie je energie potřebná k vytvoření systému o vnitřní energii U a objemu V v okolním prostředí o tlaku P. Jakožto stavová veličina nezávisí na ději, pouze na aktuálním stavu systému. Vypočítáme ji jako

$$H = U + PV\,,$$

kde člen PV je energie potřebná k tomu, abychom v okolním prostředí pro vytvoření našeho systému uvolnili místo.

Předpokládejme tedy, že ve vzdálenosti $y \in [d, d + x^*]$ pod hladinou potřebujeme vytvořit místo pro vzduch, který je aktuálně ve sklenici při tlaku p_a a objemu Sh. Potřebný objem, který takové množství vzduchu bude mít v hloubce d, je Sx^*. Protože tlak v okolí se mění, jak se mění hloubka, musíme člen PV integrovat, takže entalpie takového systému je

$$H_\mathrm{f} = U + S \int_0^{x^*} \left(\left(d + x\right)\rho g + p_\mathrm{a}\right) \mathrm{d}x = U + S\left(\left(dx^* + \frac{{x^*}^2}{2}\right)\rho g + p_\mathrm{a} x^*\right) .$$

Na začátku jsme ovšem měli systém (vzduch ve sklenici) s entalpií

$$H_\mathrm{i} = U + S p_\mathrm{a} h .$$

Vnitřní energie plynu se nezměnila, protože se jedná o izotermický děj. Na změnu entalpie jsme proto vykonali práci

$$H_\mathrm{f} - H_\mathrm{i} = S\left(\left(dx^* + \frac{{x^*}^2}{2}\right)\rho g + p_\mathrm{a} x^* - p_\mathrm{a} h\right) .$$

Dosazením z rovnice ${x^*}^2 \rho g + dx^* \rho g + p_\mathrm{a} x^* = p_\mathrm{a} h$ můžeme předchozí výraz upravit na

$$H_\mathrm{f} - H_\mathrm{i} = -\rho g S \frac{{x^*}^2}{2} .$$

Ještě jsme ovšem vykonali práci ke stlačení plynu, což je při izotermickém ději

$$W_\mathrm{s} = \int_h^{x^*} p \,\mathrm{d}x = \int_h^{x^*} \frac{p_\mathrm{a} h}{x} \,\mathrm{d}x = p_\mathrm{a} h \ln \frac{h}{x^*} .$$

Tato práce odešla ze sklenice skrz stěny ve formě tepla do okolního rezervoáru vody. Celkově jsme tak vykonali práci

$$W_\mathrm{celk} = -\rho g S \frac{{x^*}^2}{2} + p_\mathrm{a} h \ln \frac{h}{x^*} .$$

Přímý výpočet pomocí sil

Abychom sklenici mohli ponořit, musíme na ni působit silou směrem dolů. V tom nám pomáhá atmosférický tlak a později, jak je dno sklenice ponořené, tak i hydrostatický tlak vody nad sklenicí. Naopak na sklenici působí tlak vzduchu uvnitř, který je stejný jako součet hydrostatického a atmosférického tlaku v místě, kde voda na vzduch ve sklenici tlačí.

Řešení opět rozdělme na dvě části, první, když je část sklenice ještě nad vodou a druhé, kdy už je celá sklenice pod vodou. Pro první případ má síla, kterou musíme překonat pro další ponoření sklenice, tvar

$$F_1 = S\left(p - p_\mathrm{a}\right) ,$$

ve druhém pak přibyde hydrostatické působení na dno sklenice

$$F_2 = S\left(p - \left(y \rho g + p_\mathrm{a}\right)\right) ,$$

kde p je tlak uvnitř sklenice. Rovnice pro rovnost tlaků na hladině vody ve sklenici je v obou případech

$$\left(x + y\right)\rho g + p_\mathrm{a} = p = \frac{p_\mathrm{a} h}{x} ,$$

kde $y \in [-h, 0]$ a x je stále výška vzduchu ve sklenici. Označení x^* necháme pro takovou výšku x, kterou zaujme vzduch v případě ponoření pod hladinu d, tedy stejně jako v předchozích případech. Znovu najdeme výšku x_0 v okamžiku, kdy se sklenice celá ponoří pod vodu, jako $x_0 = (-p_\mathrm{a} + \sqrt{p_\mathrm{a}^2 + 4\rho g p_\mathrm{a} h})/(2\rho g)$.

Když silou F_1 posuneme sklenici dolů po dráze $\mathrm{d}y$, vykonáme práci

$$\mathrm{d}W_1 = F_1\,\mathrm{d}y = S\,(p - p_\mathrm{a})\,\mathrm{d}y\,.$$

Z rovnosti tlaku ve sklenici a na hladině vody ve sklenici můžeme pro diferenciál práce psát

$$\mathrm{d}W_1 = Sp_\mathrm{a}\left(\frac{h}{x} - 1\right)\mathrm{d}y\,.$$

Práce vykonaná touto silou slouží jednak k posunutí sklenice hlouběji a jednak ke stlačení vzduchu uvnitř. Stojíme ovšem před otázkou, podle jaké proměnné budeme integrovat? Podle x, nebo podle y? V předchozích řešeních jsme viděli, že výsledek měl kompaktní tvar pro x^*, budeme proto integrovat v proměnné x, což by mělo být matematicky jednodušší. Následně vyzkoušíme integrovat i podle y, abychom si ukázali, že vhodná volba proměnné je důležitá z hlediska matematické obtížnosti. Nyní však musíme vyjádřit $\mathrm{d}y(x)$. Z proměnných v rovnici pro tlaky uděláme diferenciály a dostaneme

$$(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)\,\rho g = -\frac{p_\mathrm{a} h}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}y = -\frac{p_\mathrm{a} h + x^2\rho g}{x^2\rho g}\,\mathrm{d}x\,.$$

Vidíme, že změna vnitřního objemu je záporná, když se posouváme se sklenicí hlouběji, což je výsledek, který bychom očekávali.

Práce potřebná k ponoření celé sklenice pod vodu pak je daná integrálem ze síly F_1

$$\begin{aligned}
W_1 &= -Sp_\mathrm{a}\int_h^{x_0}\left(\frac{h}{x} - 1\right)\frac{p_\mathrm{a} h + x^2\rho g}{x^2\rho g}\,\mathrm{d}x = \\
&= Sp_\mathrm{a}\int_{x_0}^{h}\left(\frac{p_\mathrm{a} h^2}{x^3\rho g} - \frac{p_\mathrm{a} h}{x^2\rho g} + \frac{h}{x} - 1\right)\mathrm{d}x = \\
&= Sp_\mathrm{a}\left(-\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}\left(1 - \frac{h^2}{x_0^2}\right) + \frac{p_\mathrm{a}}{\rho g}\left(1 - \frac{h}{x_0}\right) + h\ln\frac{h}{x_0} - h + x_0\right) = \\
&= Sp_\mathrm{a}\left(\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}\left(1 - \frac{h}{x_0}\right)^2 + h\ln\frac{h}{x_0} - h + x_0\right).
\end{aligned}$$

Když sklenici dále posouváme pod hladinu, vykonáme práci

$$\mathrm{d}W_2 = F\,\mathrm{d}y = S\,(p - (y\rho g + p_\mathrm{a}))\,\mathrm{d}y\,.$$

Z rovnosti tlaku ve sklenici a na hladině vody ve sklenici můžeme pro diferenciál práce psát

$$\mathrm{d}W_2 = Sx\rho g\,\mathrm{d}y\,.$$

Dosazením za dy a integrací dostaneme

$$
\begin{aligned}
W_2 = S\rho g \int_{x_0}^{x^*} x \, \mathrm{d}y = \\
= S\rho g \int_{x^*}^{x_0} x \frac{p_\mathrm{a} h + x^2 \rho g}{x^2 \rho g} \, \mathrm{d}x = \\
= S \int_{x^*}^{x_0} \frac{p_\mathrm{a} h}{x} \, \mathrm{d}x + S\rho g \int_{x^*}^{x_0} x \, \mathrm{d}x \\
= S p_\mathrm{a} h \ln \frac{x_0}{x^*} + S\rho g \frac{x_0^2 - {x^*}^2}{2} \,.
\end{aligned}
$$

Celková vykonaná práce je součtem $W_1 + W_2$, tedy

$$
W_{celk} = S p_\mathrm{a} h \ln \frac{h}{x^*} - S\rho g \frac{{x^*}^2}{2} + \left(S\rho g \frac{x_0^2}{2} + S p_\mathrm{a} \left(\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g} \left(1 - \frac{h}{x_0}\right)^2 - h + x_0 \right) \right) ,
$$

kde celá závorka je nulová.

$$
\begin{aligned}
S\rho g \frac{x_0^2}{2} + S p_\mathrm{a} \left(\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g} \left(1 - \frac{h}{x_0}\right)^2 - h + x_0 \right) = \\
= S\rho g \frac{x_0^2}{2} + S p_\mathrm{a} \left(\left(\frac{x_0^2 \rho g}{2 p_\mathrm{a}} \right) - h + x_0 \right) = \\
= S\rho g x_0^2 - h S p_\mathrm{a} + S p_\mathrm{a} x_0 = 0 \,,
\end{aligned}
$$

proto dostáváme náš tradiční výsledek

$$
W_{celk} = S p_\mathrm{a} h \ln \frac{h}{x^*} - S\rho g \frac{{x^*}^2}{2} \,.
$$

Co by se stalo, kdybychom jako integrační proměnnou zvolili y, a ne x? To naznačíme na výpočtu W_2, který by v tomto případě byl

$$
W_2 = S\rho g \int_0^d x \, \mathrm{d}y = S \int_0^d \frac{-(y\rho g + p_\mathrm{a}) + \sqrt{(y\rho g + p_\mathrm{a})^2 + 4 p_\mathrm{a} h \rho g}}{2} \, \mathrm{d}y \,.
$$

Integrál z první závorky v integrandu je jednoduše roven $-\left(y^2 \rho g + 2 y p_\mathrm{a}\right) \cdot S/4$. Pro výpočet odmocniny bychom ovšem museli volit substituci s hyperbolickým sinem

$$
\begin{aligned}
\frac{y\rho g + p_\mathrm{a}}{\sqrt{4 p_\mathrm{a} h \rho g}} = \sinh \xi, \\
\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{4 p_\mathrm{a} h \rho g}}{\rho g} \cosh \xi \, \mathrm{d}\xi \,,
\end{aligned}
$$

což vede na

$$\frac{S}{2}\int\sqrt{(y\rho g+p_\mathrm{a})^2+4p_\mathrm{a}h\rho g}\,\mathrm{d}y=$$
$$=S2p_\mathrm{a}h\int\sqrt{\sinh^2\xi+1}\cosh\xi\,\mathrm{d}\xi=$$
$$=S2p_\mathrm{a}h\int\cosh^2\xi\,\mathrm{d}\xi=$$
$$=Sp_\mathrm{a}h\int(\cosh 2\xi+1)\,\mathrm{d}\xi=\frac{Sp_\mathrm{a}h}{2}\sinh 2\xi+Sp_\mathrm{a}h\xi=$$
$$=Sp_\mathrm{a}h\sinh\xi\cosh\xi+Sp_\mathrm{a}h\xi\,.$$

Jednotlivé kroky a seznámení se s hyperbolickými funkcemi necháváme čtenáři za domácí úkol. Zpětným dosazením ze substituce a uvážením integračních mezí dostáváme práci W_2 jako

$$W_2=\frac{S}{4\rho g}\left((d\rho g+p_\mathrm{a})\sqrt{(d\rho g+p_\mathrm{a})^2+4p_\mathrm{a}h\rho g}-p_\mathrm{a}\sqrt{p_\mathrm{a}^2+4p_\mathrm{a}h\rho g}\right)$$
$$+Sp_\mathrm{a}h\left(\operatorname{argsinh}\frac{d\rho g+p_\mathrm{a}}{\sqrt{4p_\mathrm{a}h\rho g}}-\operatorname{argsinh}\frac{p_\mathrm{a}}{\sqrt{4p_\mathrm{a}h\rho g}}\right)-\frac{S}{4}\left(d^2\rho g+2dp_\mathrm{a}\right)\,.$$

Dalšími úpravami bychom se přesvědčili, že dostaneme stejný výsledek jako v předchozí části. Cesta k němu je ovšem matematicky výrazně složitější.

Řešení bonusu

Poté, co jsme si důkladně rozebrali řešení základní části úlohy, je řešení bonusu téměř triviální. Uvažujme, že v původní výšce hladiny H uděláme ve stěně nádoby otvor. Při postupném ponořování skleničky se tak bude voda držet na konstantní výšce H a situace je tak stejná jako v předchozí částí.

Předpokládejme však, že voda, která z nádoby vytéká, nepadá někam dolů, ale držíme ji všechnu ve výšce H. Jakmile ponoříme skleničku až na dno, tak je toto množství vody úměrné objemu vzduchu ve sklenici

$$m_\mathrm{v}=\rho Sx^*\,.$$

Abychom však skončili s požadovanou situací, je potřeba vodu dostat zpátky do nádoby. Ta je ale plná až do výšky H, proto je potřeba zvýšit těžiště vytlačené vody. Pro výšku vody poté, co ji vrátíme do sklenice, bude ze zachování objemu platit $A\Delta H=x^*S$, takže na zvednutí jejího těžiště o $\Delta H/2$ potřebujeme vykonat práci

$$W_\mathrm{zv}=\frac{m_\mathrm{v}g\Delta H}{2}=\frac{\rho S^2{x^*}^2g}{2A}\,.$$

Ponořením samotné sklenice o hmotnosti m jsme ještě získali práci

$$W_\mathrm{pon}=mgH\,,$$

neboť se její těžiště snížilo o H. Celková práce, která je potřebná k ponoření hmotné sklenice na dno nádoby tak je

$$W_\mathrm{bonus}=S\left(-\rho g\frac{{x^*}^2}{2}+p_\mathrm{a}h\ln\frac{h}{x^*}\right)+\frac{\rho S^2{x^*}^2g}{2A}-mgH\,.$$

Po dosazení $d = H - h$ do $x^* = \left(-\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right) + \sqrt{\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g}\right)/(2\rho g)$ a následně do předchozí rovnice dává

$$W_\mathrm{bonus} = \frac{S}{8\rho g}\left(\frac{S}{A} - 1\right)\left(-\left(\left(H-h\right)\rho g + p_\mathrm{a}\right) + \sqrt{\left(\left(H-h\right)\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g}\right)^2 + p_\mathrm{a}Sh\ln\frac{2\rho g h}{-\left(\left(H-h\right)\rho g + p_\mathrm{a}\right) + \sqrt{\left(\left(H-h\right)\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g}} - mgH\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.