Úloha III.4 ... na velikosti záleží

8 bodů; průměr 4,20; řešilo 83 studentů

Koule s poloměrem r se valí po vodorovném povrchu rychlostí v_0. Cestu jí však blokuje kolmý schod o výšce h. Najděte podmínky, za kterých se koule na schod převalí a začne se po něm kutálet, aniž by se schodem ztratila kontakt. Za těchto podmínek určete její rychlost po překonání schodu. Předpokládejte, že jsou všechny srážky dokonale nepružné a že tření mezi koulí a schodem je velké. Schod je hranatý a je postavený kolmo na směr pohybu koule.

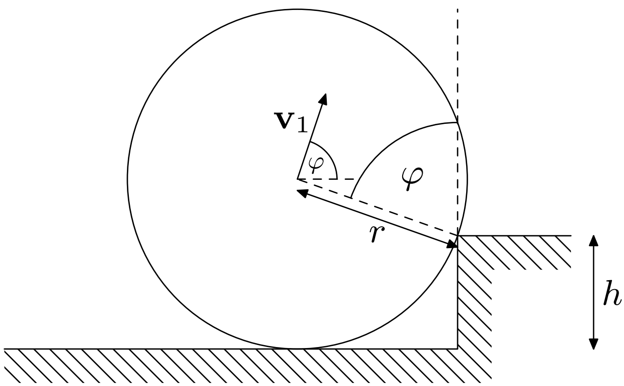
Dodo měl malá kolečka.

Začneme hledáním podmínek pro parametry úlohy, za kterých koule schod vůbec překoná. Rovnou vidíme, že pokud bude $h \geq r$, tak se koule za předpokladů úlohy na schod nikdy nedostane. Je to kvůli tomu, že při tuhém nárazu koule ztratí veškerou vodorovnou rychlost, a jediné, co jí zbyde, je úhlová rychlost. Ta při kontaktu se schodem kouli rozpohybuje pouze ve svislém směru. Tedy, i když by se koule dokázala při pohybu dostat do větší výšky než h, tak se nikdy nedostane na schod, protože dopadne zpět před něj.

Budeme se tedy zabývat jen případy, kdy je $h < r$. Schod je hranatý (můžeme si ho představit jako dlouhý kvádr), tedy se při srážce dostane koule do kontaktu pouze s jeho horní hranou. Srážka je dokonale tuhá, koule proto přijde o normálovou složku rychlosti. Normálou přitom rozumíme přímku, která prochází hranou překážky a středem koule podle obrázku 1.

Označme úhel, který svírá normála se svislým směrem, jako φ. Pak z původní rychlosti středu koule v_0 zbyde pouze

$$v_0 \cos\varphi = v_0 \cdot \frac{r-h}{r} = v \cdot \left(1 - \frac{h}{r}\right) \,.$$



Obrázek 1: Náčrt situace.

Uvědomme si, že toto není konečná rychlost koule těsně po nárazu. Koule se totiž se schodem srazí i v tečném směru, což ovlivní její úhlovou rychlost (podobně jako když při ping-pongu udělíme úderem pálky míčku rotaci). K této srážce dochází v důsledku tření (které je ze zadání velké). Pokud by byl schod dokonale hladký, rotace koule by se nezměnila.

Jelikož je tření mezi koulí a schodem velké (nebo chcete-li srážka je tuhá), bod dotyku koule se schodem při nárazu okamžitě ztratí rychlost. Bod dotyku má nulovou rychlost tehdy, když mezi rychlostí koule v_1 po srážce se schodem a její úhlovou rychlostí ω_1 platí vztah

$$v_1 = \omega_1 r\,.$$

Konečnou rychlost v_1 středu koule po nárazu bychom nyní chtěli vypočítat. Víme, že při kolmém nárazu se rychlost koule zmenší z v_0 na $v_0 \cos\varphi$ a úhlová rychlost se nezmění. Pak se bod dotyku s hranou pohybuje *proti směru* pohybu koule. Třecí síla pohyb bodu dotyku zastaví, tedy působí *ve směru* rychlosti $v_0 \cos\varphi$.

Celkem se pak při srážce v tečném směru zvětší hybnost o nějaké Δp a moment hybnosti zmenší o nějaké $\Delta L = \Delta p r$, protože moment M od třecí síly F_t je roven $F_\mathrm{t} r$.

Máme tedy

$$J\Delta\omega = mr\Delta v\,,$$
$$\frac{2}{5} r\Delta\omega = \Delta v\,,$$

kde $J = 2mr^2/5$ je moment setrvačnosti koule. Rychlost koule se při srážce změnila z $v_0 \cos\varphi$ na v_1 a úhlová rychlost z v_0/r na v_1/r. Odtud dostaneme

$$\frac{2}{5}(v_0 - v_1) = v_1 - v_0 \cos\varphi\,,$$

odkud

$$v_1 = v_0 \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\cos\varphi\right) = v_0 \cdot \left(1 - \frac{5h}{7r}\right)\,.$$

Z rychlosti v_1 nyní zvládneme určit, jestli koule schod vůbec překoná. Hraniční případ nastane, pokud bude mít koule na vrcholku přesně nulovou rychlost. Ze zákona zachování energie máme

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2 > mgh\,,$$
$$v_0^2 > \frac{\frac{10}{7}gh}{\left(1 - \frac{5h}{7r}\right)^2}\,.$$

Za této podmínky tedy koule schod překoná. Uvažujme nyní, že počáteční rychlost koule splňuje tuto podmínku. Při pohybu koule přes hranu schodu mohou nastat dva případy.

Prvním je, že se koule od schodu vůbec neodlepí, neboli se pouze otočí kolem jeho hrany. Druhá možnost potom je, že rychlost koule je tak velká, že při otáčení kolem hrany překoná odstředivá síla dostředivou složku tíhové síly a koule ztratí kontakt se schodem.

Vyšetřeme nyní tuto možnost. Koule se nikdy neodlepí od hrany, pokud bude mezi odstředivou a tíhovou silou splněna nerovnost

$$m\frac{v^2}{r} < mg\cos\theta\,,$$

kde úhel θ je definovaný stejně jako φ, ale pro situaci, kdy už se koule nedotýká vodorovné podložky, po které jela. Rychlost koule při pohybu postupně klesá a úhel θ se zmenšuje. Levá strana rovnice proto klesá a pravá roste. Nerovnost je tedy splněna po celou dobu pohybu právě tehdy, když je splněna na začátku, tj. těsně po nárazu. Když do nerovnice dosadíme vyjádření pro v_1, dostaneme

$$v_0^2 < \frac{g(r-h)}{\left(1-\frac{5h}{7r}\right)^2}\,.$$

Máme tedy horní i dolní omezení pro počáteční rychlost koule v_0. Zároveň vidíme, že pokud bude

$$\frac{\frac{10}{7}gh}{\left(1-\frac{5h}{7r}\right)^2} > \frac{g(r-h)}{\left(1-\frac{5h}{7r}\right)^2}\,,$$

$$h > \frac{7}{17}r\,,$$

nemůže situace, kdy koule vůbec nenadskočí, nastat pro žádnou rychlost v_0.

Uvažujme nyní, že r, h a v_0 splňují odvozené podmínky a spočítejme rychlost koule poté, co se převalí na schod. Jelikož se bod dotyku koule s hranou schodu nepohybuje, nepůsobí tření a při otáčení se tak zachovává energie (jak jsme uvažovali už v případě, kdy jsme hledali podmínku pro překonání schodu). Pro rychlost koule v_2 po převalení přes schod platí

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J\omega_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2 - mgh\,.$$

S využitím podmínky neprokluzování máme $v_2 = \omega_2 r$, a tedy

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{10}{7}gh} = \sqrt{v_0^2\left(1-\frac{5h}{7r}\right)^2 - \frac{10}{7}gh}\,.$$

Jakmile se koule převalí a dostane se na schod, tak už k žádným dalším srážkám nedochází, a tedy vypočítaná v_2 je rychlost jejího kutálení po překonání schodu.

Jiří Kohl
`jiri.kohl@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.