

## Úloha II.S ... na dlhé lakte

10 bodů; průměr 4,46; řešilo 68 studentů

1. Zmerajte koľko palcov má váš lakeť. Použiť môžete len svoje časti tela.
2. Prvým pokusom určenia vzdialenosti Zeme od Slnka boli v antike merania uhlovej vzdialenosti Mesiaca od Slnka v okamihu, keď sa Mesiac nachádzal v prvej štvrti – rozhranie svetla a tmy bolo priame. Určte veľkosť tohto uhla a porovnajte ho s uhlovým rozmerom Zeme z pohľadu Mesiaca.
3. Laserový merač vzdialenosti používajúci He-Ne laser ukazuje za štandardných podmienok (20 °C, 100 kPa) vzdialenosť presne 100 m. Ako sa táto hodnota zmení, ak sa zmení:
  - teplota o 30 °C
  - tlak o 10 kPa
  - použije sa zelený laser s vlnovou dĺžkou 532 nm
  - neprevedie sa konverzia medzi grupovou a fázovou rýchlosťou
4. Uvedte aspoň 4 rôzne spôsoby, ktorými sa meria rýchlosť dopravných prostriedkov. Vysvetlite na základe akých fyzikálnych princípov sa rýchlosť určuje a o akú rýchlosť sa jedná.

*Dodovi sa rozchádzala kalibrácia spektrografu.*

1. Jednotka palec je historicky definovaná ako šírka palca, lakeť ako vzdialenosť medzi lakťovým výbežkom a končekom vystretých prstov. Meranie som vykonal dvomi spôsobmi. Najprv som postupne prikladal palec pravej ruky na predlaktie ľavej ruky. Štyrmi meraniami som získal hodnoty 20, 22, 21 a 22 palcov v lakti. Keďže rozhodnúť, kam položiť palec po jeho odialení od ruky nie je veľmi presné – koža na ruke je elastická a navyše si človek musí pamätať, kam má palec priložiť – som sa rozhodol meranie vykonať aj vynesением polôh konca prostredníka a lakťového výbežku na stôl a následne pri meraní prikladal mierne pritlačené palce ľavej a pravej ruky na striedačku. Týmto postupom som získal hodnoty 23, 23, 22, 23 a 25 palcov na lakeť. Vidíme, že druhý postup merania dáva vyššie hodnoty bez zrejmej príčiny. Ako výslednú hodnotu uvádzam priemer všetkých spomenutých hodnôt s ich smerodajnou odchýlkou  $22,3 \pm 1,4$ . Pre porovnanie český lakeť mal dĺžku 59,3 cm a staročeský palec dĺžku 24,64 mm, teda asi 24 palcov v jednom lakti.
2. Rozhranie svetla a tmy – terminátor – bude pri pohľade zo Zeme priame, ak bude uhol zovretý Zemou, Mesiacom a Slnkom presne pravý. Uhol zovretý Slnkom, Zemou a Mesiacom  $\Phi$  tak určíme v tomto pravouhlom trojuholníku s využitím vzdialeností Zeme od Slnka  $A = 150 \cdot 10^6$  km a Mesiaca od Zeme  $a = 384 \cdot 10^3$  km pomocou funkcie kosínus ako

$$\cos \Phi = \frac{a}{A}, \quad \rightarrow \quad \Phi = \arccos \left( \frac{a}{A} \right) \doteq 89^\circ 51'.$$

Vidíme, že od presne pravého uhla sa líši len o asi 9 oblúčkových minút, zatiaľ čo polomer Zeme pri pohľade z Mesiaca je až o

$$\varphi = \arctg \left( \frac{6400 \text{ km}}{384 \cdot 10^3 \text{ km}} \right) \approx 1^\circ.$$

Poloha pozorovateľa na povrchu Zeme má teda o rád väčší vplyv na skutočne nameraný uhol.

3. V tejto úlohe budeme predpokladať, že laser samotný je voči zmenám teploty a tlaku stabilizovaný a vzduch je suchý. Zmeny vzdialenosti tak budú vznikáť najmä zmenou indexu lomu vzduchu  $n$ . Hodnota  $n - 1$  je vo vzduchu úmerná jeho hustote. Tá sa dá zo stavovej rovnice ideálneho plynu napísať ako

$$\rho = \frac{pM_m}{RT},$$

kde  $p$  je tlak,  $M_m$  molárna hmotnosť,  $R$  plynová konštanta a  $T$  termodynamická teplota. Zo znalosti indexu lomu  $n_0$  pri teplote  $T_0$  a tlaku  $p_0$  tak môžeme dopočítať index lomu pri inej teplote a tlaku ako

$$n(\lambda, T, p) = 1 + (n_0(\lambda) - 1) \frac{pT_0}{p_0T},$$

kde  $n_0(\lambda)$  je index lomu pre vlnovú dĺžku  $\lambda$  za referenčných podmienok  $T_0$ ,  $p_0$ . Zmena je v podstate spôsobená úmernosťou hodnoty  $(n - 1)$  s hustotou vzduchu, a teda počtom častíc, ktoré so žiarením interagujú. Hélium-neónový laser má vlnovú dĺžku  $\lambda = 633$  nm, pre ktorú je index lomu vzduchu  $n_0 = 1,000\,268$  pri  $T_0 = 20$  °C a  $p_0 = 100$  kPa. Novú nameranú hodnotu dĺžky  $l'$  určíme z novej doby letu svetla  $\Delta t'$  ako

$$l' = l \frac{c\Delta t'}{n_0(\lambda)} = l \frac{c \frac{n(\lambda, T, p)}{c}}{n_0(\lambda)} = l \frac{n(\lambda, T, p)}{n_0(\lambda)}.$$

Po dosadení závislosti indexu lomu a úprave dostávame pre zmenu vzdialenosti vzťah

$$\Delta l = l \frac{1 - n_0}{n_0} \left( 1 - \frac{pT_0}{p_0T} \right) \approx -l(n_0 - 1) \left( 1 - \frac{pT_0}{p_0T} \right).$$

Po dosadení tak dostávame pri poklese teploty o 30 K zmenu dĺžky  $\Delta_T l \doteq 3,1$  mm a pri poklese tlaku o 10 kPa zmenu  $\Delta_p l \doteq -2,7$  mm. Ak teplota vzrastie o danú hodnotu, potom  $\Delta_T l \doteq -2,5$  mm a pri zvýšení tlaku o danú hodnotu dostaneme  $\Delta_p l \doteq 2,7$  mm.

Pre zelený laser je index lomu  $n_2 = 1,000\,269\,87$  oproti He-Ne, kde  $n_1 = 1,000\,268\,243$ <sup>1</sup>. Táto zmena je tak pomere malá, konkrétne len

$$\Delta_\lambda l = l \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx l(n_1 - n_2) = 0,16 \text{ mm}.$$

Predchádzajúce hodnoty indexu lomu boli fázové, nie grupové. Grupový index lomu môžeme odhadnúť<sup>2</sup> z dvoch predošlých hodnôt ako

$$n_g(\lambda_1) = n(\lambda_1) - \lambda_1 \frac{n_1 - n_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1,0002784, \quad \Delta_g l \doteq 1,0 \text{ mm}.$$

K podobným zmenám dochádza napríklad aj pri meraní radiálnej rýchlosti hviezd v astronómii, ak nie je spektrograf teplotne a tlakovo stabilizovaný. Dôsledkom je, že na detekciu planét o hmotnosti Zeme je takáto stabilizácia nevyhnutná.

<sup>1</sup>Online kalkulátor NIST podľa Edlénovej rovnice <https://emtoolbox.nist.gov/Wavelength/Edlen.asp>

<sup>2</sup>Nahradením derivácie vo vzťahu v seriáli jednoduchým podielom rozdielov.

4. Najjednoduchšou metódou merania rýchlosti je úsekové meranie používané cestnou políciou. Meranou veličinou je čas  $t$ , za ktorý vozidlo urazí predom definovanú dráhu  $s$ . Rýchlosť určená ako  $v = s/t$  je tak priemernou rýchlosťou vozidla na danom úseku voči vozovke.

Inou možnosťou merania rýchlosti používanou v cestnej doprave je dopravný radar. Vyslaná rádiová vlna o frekvencii  $f$  sa odrazí od vozidla a vplyvom Doplerovho javu sa jej frekvencia zmení na  $f'$ . Meriame tak okamžitú rýchlosť vozidla voči polohe radaru v radiálnom smere

$$v = \frac{f - f'}{f} \frac{c}{2}.$$

Ďalším spôsobom merania rýchlosti, s ktorým sa bežne stretávame je tachometer, ako napríklad v aute. Toto zariadenie v jeho analógovej podobe určuje rýchlosť otáčania hriadeľa, na konci ktorého je permanentný magnet. Tento je z druhej strany obklopený hliníkovým kalíškom, v ktorom budi vírivé elektrické prúdy. Roztočeniu na rýchlosť hriadeľa bráni pružina. Vo výsledku sa tak kalíšok len pootočí o uhol úmerný rýchlosti otáčania hriadeľa. Merané okamžité otáčky kolies sú potom pomocou konštanty – polomeru kola – prevedené na indikovanú rýchlosť vozidla. Tu treba spomenúť, že takéto meranie stráca zmysel, ak vozidlo vojde do šmyku.

S komplikovanejšími spôsobmi merania rýchlosti sa stretávame v letectve, kde nedochádza ku kontaktu s pevným povrchom. Lietadlá preto používajú Pitotove trubice – zariadenia merajúce tlak vzduchu a rýchlosť prúdenia pomocou Bernoulliho princípu. Podobne sa dá určiť aj rýchlosť lodí. Z hodnôt statického tlaku  $p_0$  a dynamického tlaku  $p_1$  sa rýchlosť pohybu v nestlačiteľnej tekutine o hustote  $\rho$  určí ako

$$v = \sqrt{2 \frac{p_0 - p_1}{\rho}}.$$

V prípade stlačiteľnej tekutiny u lietadiel je situácia komplikovanejšia, navyše komplikovaná aj závislosťou tlaku na výške nad povrchom. V oboch prípadoch však určíme relatívnu rýchlosť pohybu voči tekutine, v ktorej sa pohybujeme. Inou možnosťou je určenie rýchlosti pomocou GPS z polohy a uplynutého času.

*Jozef Lipták*

liptak.j@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.