Úloha II.5 ... trajektová

10 bodů; průměr 4,83; řešilo 63 studentů

Představme si trajekt tvaru kvádru o hmotnosti M, délce L, šířce D a výšce $H \ll L$ od kýlu po palubu. Po přiražení k molu z něj postupně vystupují cestující zadní stranou paluby tak, že se zvětšuje prázdná přední část paluby a jinak se plošná hustota lidí na zaplněné části nemění. Najděte maximální celkovou hmotnost cestujících, které může trajekt přepravovat, aby se při takovém vystupování žádná část paluby nedostala pod úroveň hladiny. Uvažujte, že v příčném směru je loď stabilní a že lidé vystupují z lodi pomalu.

Dodo byl po dlouhé době opět na moři.

Ak budú ľudia z lode vystupovať dostatočne pomaly (v porovnaní s vlastnými osciláciami lode) môžeme v každom okamihu určiť polohu lode – teda jej hĺbku ponoru a náklon – z rovnováhy síl na loď pôsobiacich a ich momentov. Na loď pôsobí vztlaková sila v ťažisku ponorenej časti lode, tiažová sila lode v jej ťažisku (ktoré sa pre prípad kvádra nachádza v jeho geometrickom strede) a tiažová sila ľudí stále na palube. Vystupovanie ľudí bude postupne znižovať celkovú silu pôsobiacu nadol, teda znižovať hĺbku ponoru a posúvať pôsobisko tiažovej sily ľudí na stranu spôsobujúc tak náklon lode. Označme dĺžku paluby zaplnenú ľudmi $l \leq L$, hmotnosť pasažierov na lodi m, náklon paluby voči vodnej hladine θ a hĺbku ponoru ξ – dĺžku ponorenej časti úsečky vedúcej od stredu paluby do stredu kýlu.

Pre rovnováhu síl máme vzťah

$$\rho g V_\mathrm{p} = Mg + m\frac{l}{L}g \quad \Rightarrow \quad \rho V_\mathrm{p} = M + m\frac{l}{L}\,,$$

kde ρ je hustota vody. Objem ponorenej časti lode tvaru kvádra je daný súčinom jej šírky a bočného prierezu ponorenej časti tvaru lichobežníka. Ľahko sa preto presvedčíme, že $V_\mathrm{p} = DL\xi$, a teda pre hĺbku ponoru dostávame vzťah

$$\xi = \frac{M + m\frac{l}{L}}{LD\rho}\,.$$

Z tohto vzťahu môžeme z podmienky $\xi \leq H$ vidieť maximálnu možnú užitočnú nosnosť lode, keď je náklad na lodi rozložený rovnomerne $l = L$

$$m_{\text{max, static}} = LDH\rho - M\,.$$

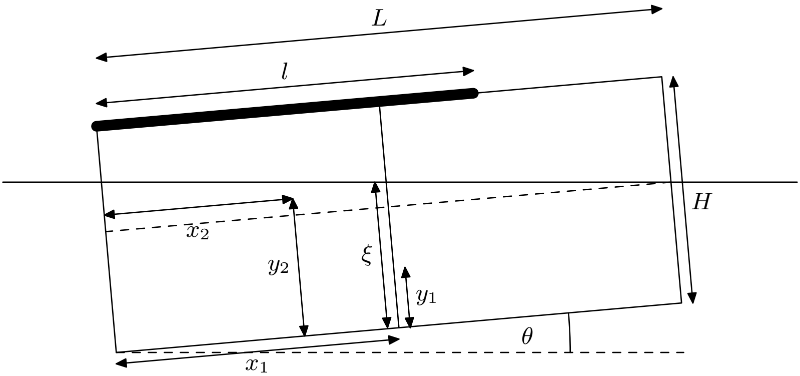
Určiť rovnováhu momentov síl bude kvôli geometrii náročnejšie. Uvažujme momenty síl okolo spodného okraja lode na strane, ktorou ľudia vystupujú. Započítaním príspevkov tiažových a vztlakovej sily máme

$$\left(\frac{L}{2}\cos\theta - \frac{H}{2}\sin\theta\right)Mg + \left(\frac{l}{2}\cos\theta - H\sin\theta\right)m\frac{l}{L}g - \left(x_\mathrm{T}\cos\theta - y_\mathrm{T}\sin\theta\right)\rho g LD\xi = 0\,,$$

kde x_T a y_T je vzdialenosť stredu ponorenej časti lode od referenčného rohu v smere dĺžky a výšky lode. Z toho ďalej dosadením za ξ a úpravou dostávame

$$\frac{ML}{2} + \frac{ml^2}{2L} - \left(M + m\frac{l}{L}\right)x_\mathrm{T} = \operatorname{tg}\theta\left(M\frac{H}{2} + m\frac{l}{L}H - y_\mathrm{T}\left(M + m\frac{l}{L}\right)\right)\,.$$

Situácia by bola jednoduchá, ak by x_T a y_T nezáviseli na θ, čo však nie je pravda. Pre výpočet polohy ťažiska si ponorenú časť pozdĺžneho prierezu trajektom rozdeľme na obdĺžnik ležiaci na dne lode vysoký po najnižší ponorený bod na hrane oproti výstupu a ostávajúci trojuholník.



Obrázek 1: Náčrtok situácie zboku aj s polohami ťažísk jednotlivých ponorených častí.

Pre určenie x_T vieme, že obdĺžnik má ťažisko v $x_1 = L/2$ a trojuholník v $x_2 = L/3$ (ťažisko trojuholníka delí ťažnicu v tretine). Pre y_T máme ťažisko obdĺžnika v $y_1 = (\xi - L/2 \operatorname{tg}\theta)/2$[1] a trojuholníka $y_2 = \xi - L/2 \operatorname{tg}\theta + L/3 \operatorname{tg}\theta$. Ďalej hmotnosti útvarov sú úmerné ich plochám $S_1 = 2Ly_1$, $S_2 = 1/2 L^2 \operatorname{tg}\theta$. Pre polohu stredu ponorenej časti lode teda máme

$$x_\mathrm{T} = \frac{\frac{L}{2} L 2y_1 + \frac{L}{3}\frac{L^2}{2}\operatorname{tg}\theta}{\xi L} = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{L}{\xi}\operatorname{tg}\theta\right),$$

$$y_\mathrm{T} = \frac{\left(\xi - \frac{L}{2}\operatorname{tg}\theta\right)^2 \frac{L}{2} + \left(\xi - \frac{L}{6}\operatorname{tg}\theta\right)\frac{L^2}{2}\operatorname{tg}\theta}{\xi L} = \frac{\xi}{2}\left(1 + \frac{1}{12}\left(\frac{L}{\xi}\right)^2 \operatorname{tg}^2\theta\right).$$

Dosadením do predošlého vzťahu pre rovnováhu momentov dostaneme

$$\frac{lm}{2}\frac{l-L}{L} + \frac{L^3 D\rho}{12}\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta\left[M\frac{H}{2} + m\frac{l}{L}H - \frac{\left(M + m\frac{l}{L}\right)^2}{2LD\rho}\left(1 + \frac{1}{12}\left(\frac{L}{\xi}\right)^2\operatorname{tg}^2\theta\right)\right].$$

Dostali sme teda kubinckú rovnicu pre $\operatorname{tg}\theta$, ktorej presný výpočet je značne nepraktický, v zadanej aproximácii $H \ll L$ sa však situácia zjednoduší. Tu si však treba dať trochu pozor, aby sme nestratili podstatné členy. Prvý člen na ľavej strane je absolútnym členom, ten si zatiaľ ponecháme. Druhý člen na ľavej strane prevedieme doprava. Prvé dva členy na pravej strane majú veľkosť rádovo MH, čo je porovnateľné s $\rho LDHH$ (hmotnosť vody vytlačenej lďou je porovnateľná s hmotnosťou lode, keď sa loď nepotápa). Zároveň ale vďaka zadaniu vieme $\rho LDHH \ll \rho L^3 D$, takže tento člen budeme môcť zanedbať. Člen s poslednou zátvorkou je zatiaľ neistý – výraz $(L/\xi)^2 \operatorname{tg}^2\theta$ je súčin veľkého a malého čísla, očakávame však, že ak sa druhý koniec spodku lode nevynorí má hodnotu menej ako 4. Toto tvrdenie ale bude nutné overiť, nie z neho vychádzať. Zatiaľ teda máme po drobnej úprave roznásobením a dosadením za ξ

$$\frac{lm}{2}\frac{L-l}{L} \approx \operatorname{tg}\theta\left[\frac{L^3 D\rho}{12} + \frac{\left(M + m\frac{l}{L}\right)^2}{2LD\rho} + \frac{LD\rho}{2}\frac{1}{12}L^2\operatorname{tg}^2\theta\right].$$

[1] Na tomto mieste by bolo vhodné upozorniť na fakt, že celý výpočet predpokladá, že sa tento bod nevynorí z vody, teda že $2\xi > L\operatorname{tg}\theta$.

Z tejto formy môžeme vidieť, že člen s tangensom na pravej strane je rovnaký ako prvý člen pravej strany. Keďže $2 \gg \operatorname{tg}^2\theta$, môžeme tento člen zanedbať, čo premení kubickú rovnicu na lineárnu. Ďalej pre prostredný člen ľavej strany máme rádové odhady

$$\frac{\left(M + m\frac{l}{L}\right)^2}{2LD\rho} \propto \frac{(LDH\rho)^2}{LD\rho} = LD\rho H^2 \ll \frac{L^3 D\rho}{12}\,,$$

preto môžeme pre dostatočne dlhú loď aj tento člen zanedbať. Finálny vzťah pre uhol náklonu je teda[2]

$$\operatorname{tg}\theta \approx \frac{lm}{2}\left(1 - \frac{l}{L}\right)\frac{12}{L^3 D\rho} = \frac{6ml\,(L-l)}{L^4 D\rho}\,.$$

Zostáva nám teda dosadiť tento náklon a ponor do podmienky ponorenia paluby na mieste výstupu

$$H > \xi + \frac{L}{2}\operatorname{tg}\theta = \frac{M + m\frac{l}{L}}{LD\rho} + \frac{l}{L}\frac{L-l}{L}\frac{3m}{LD\rho}\,,$$

$$LD\rho H - M > m\frac{l}{L} + 3m\frac{l}{L}\left(1 - \frac{l}{L}\right) = m\frac{l}{L}\left(4 - 3\frac{l}{L}\right)\,.$$

Pravá strana je kvadratická v $l/L = x$, jej maximum je teda uprostred medzi koreňmi funkcie $f(x) = x(4 - 3x)$, teda pre $x_c = l_c/L = 2/3$. Musíme tak splniť podmienku

$$LD\rho H - M > \frac{4m}{3}\,,$$

teda pre hmotnosť pasažierov

$$m_{\text{max, dynamic}} < \frac{3}{4}\left(LD\rho H - M\right) = \frac{3}{4} m_{\text{max, static}}$$

čo sú tri štvrtiny maximálnej nosnosti počas plavby.[3]

[2]Využijúc tento vzťah si overme predpoklad v predchádzajúcej poznámke.

$$L\operatorname{tg}\theta = \frac{l}{L}\frac{L-l}{L}\frac{6m}{LD\rho} < 2\frac{M + m\frac{l}{L}}{LD\rho} = 2\xi$$

je ekvivalentné podmienke

$$\frac{l}{L}\left(1 - \frac{l}{L}\right)3m < M + m\frac{l}{L}\,,$$

$$\left(2 - 3\frac{l}{L}\right)\frac{l}{L}m < M\,,$$

pričom ľavá strana nadobúda maxima na intervale $0 < l < L$ v bode $l = L/3$ s hodnotou

$$\left(2 - 3\frac{l}{L}\right)\frac{l}{L}m \leq \frac{m}{3} < M\,.$$

[3]Dokončime našu kontrolnú úvahu. Dosadením najhoršieho prípadu $m = 3M$ dostaneme

$$LD\rho H > 5M = 5LDH\rho_{\text{L}}\,,$$

teda pre hustotu lode $\rho_{\text{L}} < \rho/5 = 200\,\mathrm{kg/m^3}$, čo tiež znamená, že ponor takejto lode, keď je prázdna by bol len 1/5. V praxi je obvykle ponor prázdnej lode o čosi vyšší, v niektorých prípadoch – veľké tankery – môže byť však ešte aj o polovicu nižší. Uspokojme sa teda s tým, že sme problém vyriešili pre väčšinu lodí. Inak by sme museli výpočet realizovať ešte raz pre prípad, že ponorená časť má tvar trojuholníka. Ak by sme chceli byť realistický, reálne lode navyše nemajú tvar hranola a celý výpočet by sa preto musel realizovať numericky.

Trajekt môže viezť pasažierov o hmotnosti najviac tri štvrtiny užitočného výtlaku, ak budú z lode vystupovať postupným vysúvaním, ako bolo popísané v zadaní. Okraj lode, z ktorého sa vystupuje, bude k vodnej hladine najbližšie po vystúpení tretiny pasažierov. Nakoniec dodajme, že pre realistickú loď sa situácia bude líšiť, keďže sme uvažovali $L \gg H$, a aj to viac ako $L > 100H$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`