

## Úloha II.4 ... perpetuum mobile

7 bodů; průměr 3,13; řešilo 82 studentů

*Lego si chtěl dát pauzu od problému ve své diplomce, kde se jeden kvantový tepelný stroj choval jako perpetuum mobile. Pomocí následující úvahy proto vymyslel perpetuum mobile i v klasické fyzice. Někde v jámě pomocí tepla vypaříme vodu. Ta vystoupá nahoru jako vodní pára, kde ji zase zkondenzujeme, takže se teplo uvolní zpátky. Ale voda má nyní vyšší potenciální energii! Odkud se tato energie vzala? Nebo by měl Lego běžet na patentový úřad, aby vešel do historie jako vynálezce perpetua mobile? Podložte svá tvrzení výpočtem.*

*Lego pracoval na diplomce.*

V myšlienke za týmto perpetom mobile sú schované 2 neoverené predpoklady. Jeden z nich sa týka latentného tepla: na začiatku sme museli dodať vode nejaké latentné teplo a na konci sa zas nejaké latentné teplo uvoľnilo. Prečo by sme ale mali predpokladať, že tieto teplá budú rovnaké? Latentné teplo zrejme nebude závisieť na nadmorskej výške „explicitne“ (čiže priamo), ale môže závisieť „implicitne“, nakoľko s nadmorskou výškou klesá tlak a tak dáva zmysel, že latentné teplo môže závisieť od tlaku. To isté ale môžeme povedať aj o teplote varu. Aj tá závisí od okolitého tlaku! Čiže keď vodu skondenzujeme, bude mať zrejme nižšiu teplotu než pri odparovaní, a preto aj nižšiu vnútornú energiu.

Dôležité je všimnúť si tiež, že rozdiel v tlaku okolitého vzduchu po tom, ako voda vystúpa je nevyhnutný – tento tlak je totiž vo svojej podstate hydrostatický tlak, čiže rozdiel medzi dvomi výškami bude rovný tiaži vzduchu nachádzajúceho sa medzi nimi, na meter štvorcový. Jediný spôsob, ako sa toho rozdielu zbaviť by bolo odsáť vzduch, lenže potom by nebol žiaden vztlak, ktorý by tú vodnú paru vytlačil hore.

Máme tu teda 2 kandidátov, odkiaľ sa mohla energia na nárast polohovej potenciálnej energie vody zobrať – rozdiel v latentných teplách a rozdiel v teplotách varu (oba spôsobené rozdielom v okolitom tlaku). Poďme sa na ne pozrieť podrobnejšie. Nakoniec sa ešte pozrieme aj na zmenu potenciálnej energie vzduchu.

*Teplota*

Povedzme, že necháme vypariť  $m = 1$  kg vody na úrovni mora ( $h_0 = 0$  m. n. m.) a skondenzujeme ho vo výške  $h_2 = 500$  m. n. m. Tým narastie polohová potenciálna energia o  $\Delta E_p = mg(h_2 - h_0) = 4905$  J. Atmosférický tlak v  $h_0$  je  $p_0 = 101\,325$  Pa<sup>1</sup> a vo výške  $h_2$  je  $p_2 = 95\,457$  Pa.

Keď dosadíme do empirického vzorca pre závislosť teploty varu od tlaku<sup>2</sup>, dostaneme teplotu na začiatku ako  $T_1 = 99,97$  °C a na konci  $T_2 = 98,32$  °C, čiže rozdiel vody na začiatku a na konci je  $\Delta T = 1,6$  °C. Merná tepelná kapacita vody je  $c = 4\,200$  J·kg<sup>-1</sup>·°C<sup>-1</sup>, preto rozdiel vnútornej energie vody bude  $\Delta U = mc\Delta T = 6\,900$  J >  $\Delta E_p$ . Môžeme povedať, že nárast potenciálnej energie mohol celý vzniknúť z rozdielu vo vnútornej energii.

Prečo sa ale vodná para bude cestou nahor ochladzovať? Samozrejme, v realite sa trochu ochladí tepelnou výmenou s okolitým vzduchom. Lenže čo keby sme ju zavreli do nejakého nehmotného obalu, ktorý ju odizoluje? Aj v takom prípade sa bude ochladzovať, a to práve preto, že bude klesať tlak. Para sa teda bude adiabaticky rozpínať. Mohli sme tak počítať

<sup>1</sup><https://www.treking.cz/pocasi/atmosfericky-tlak.htm>

<sup>2</sup><http://fyzikalnipokusy.cz/1671/zavislost-teploty-varu-vody-na-tlaku>

teplotu, ktorú bude vodná para mať, keď vystúpa nahor aj pomocou adiabatického deja, pre ktorú platí

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \rightarrow p_1^{1-\kappa} T_1^\kappa = p_2^{1-\kappa} T_2^\kappa$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}},$$

kde  $\kappa = 1,33$  je Poissonova konštanta pre vodnú paru. Dosadením dostaneme (nesmieme zabúdať dosádzať teploty v Kelvinoch!), že teplota, ktorú bude mať vodná para po vystúpaní do  $h_2$  bude  $T_2 = 94,5^\circ\text{C}$ , čo je ešte menej než je teplota vyparovania v danej výške! Z toho plynie, že bude potrebné vode cestou nahor dodávať energiu, aby neskondenzovala už skôr. Potenciálna energia, ktorú voda získa môže preto pochádzať aj z tohto ohrievania.

### Latentné teplo

V prípade latentného tepla je situácia zložitejšia, nikde sa nám nepodarilo nájsť tabuľkové hodnoty, preto si tú závislosť musíme spočítať sami. Použijeme Clausius-Clapeyronovu rovnicu<sup>3</sup>, podľa ktorej

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta v},$$

kde  $T$  je teplota varu,  $dP/dT$  je derivácia tlaku, pri ktorom k varu dochádza podľa teploty varu a  $\Delta v$  je nárast objemu pri vyparení. Teplotu varu  $T$  pre oba prípady už máme,  $dP/dT$  spočítame tiež z už použitého vzťahu medzi teplotou varu a tlakom. Konkrétne, ak pre  $T$  platí  $T = 71,6^\circ\text{C} + 7/25^\circ\text{C}\cdot\text{kPa}^{-1}P$ , tak  $dP/dT = 25\,000/7\text{Pa}^\circ\text{C}^{-1}$ . Zmenu objemu na mól vody  $\Delta v$  dostaneme tak, že zanedbáme objem kvapalenej vody a objem pary vyjadríme zo stavovej rovnice pre ideálny plyn

$$\Delta v \approx v = \frac{V}{n} = \frac{TR}{P}.$$

Keď tento vzťah dosadíme, dostávame

$$\frac{dP}{dT} = \frac{PL}{T^2R}.$$

Keď sa na tento vzťah pozrieme, zistíme, že vzorec v tomto tvare sme mohli nájsť už na wikipédii. Keď doň všetko podosádzame, dostaneme odhad pre latentné teplo na úrovni mora  $L_0 = 41\,000\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$ . Keď dosadíme hodnoty vo výške  $h_2$ , dostaneme  $L_2 = 43\,000\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$ . Vidíme, že latentné teplo má tendenciu s výškou skôr stúpať, než klesať. Tým pádom energia potrebná na nárast potenciálnej energie nemôže pochádzať z poklesu latentného tepla, nakoľko to v skutočnosti zrejme vôbec neklesne.

### Potenciálna energia vzduchu

Ešte by sa patrilo predsa spomenúť, že počas tohto procesu poklesne potenciálna energia vzduchu v atmosfére. Ale o koľko? Počas samotného kroku, v ktorom vodná para stúpa, si vlastne kus vzduchu vymení miesto s vodnou parou. Tým pádom, nakoľko vzduch má väčšiu hustotu než vodná para, jeho potenciálna energia počas tohto kroku klesne o viac, než potenciálna

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Clausius-Clapeyron\\_relation](https://en.wikipedia.org/wiki/Clausius-Clapeyron_relation)

energia vodnej pary stúpne. Pokles potenciálnej energie vzduchu teda úplne vysvetľuje, prečo vodná para stúpa.

Ale my sme sa v zadaní nepýtali iba na to, prečo stúpa vodná para. Nás zaujíma energetická bilancia od momentu, kedy máme kvapalnú vodu dole, až po moment, kedy je zas kvapalná voda hore. V prvom kroku, keď vyparujeme vodu, tým vytlačíme vzduch nahor, a tak výrazne zvyšujeme potenciálnu energiu vzduchu.

Vo výsledku sa počas tohto celého procesu len objem vody  $V = m/\rho_V = 0,001 \text{ m}^3$  presunie z výšky  $h_0$  do výšky  $h_2$ . Preto sa v súčte presunie objem vzduchu  $V$  z výšky  $h_2$  do výšky  $h_0$ . Môžeme teda spočítať, o koľko klesne potenciálna energia vzduchu  $\Delta E_{\text{pvz}} = V\rho_{\text{vz}}g(h_2 - h_0) = 4,9 \text{ J}$ . Vidíme, že potenciálna energia vzduchu počas celého procesu klesne, ale o menej, než o koľko potenciálna energia vody stúpne, čiže to nie je dostatočné vysvetlenie.

### Záver

V zadaní sa pýtame, odkiaľ sa vzala energia na nárast potenciálnej energie vody. Identifikovali sme „troch podozrivých“: zmenu teploty vody, zmenu latentného tepla a pokles energie vzduchu. Výpočtami sme ukázali, že teplota vody skutočne klesne tak, že tepelná energia vody klesne o viac, než stúpne potenciálna. Dokonca sme ukázali, že je potrebné vode dodávať energiu, aby sa vôbec hore dostala. Naopak latentné teplo má tendenciu s výškou rásť. Potenciálna energia vzduchu síce klesne, ale o menej, než o koľko potenciálna energia vody narastie, čiže to ako vysvetlenie nestačí. Výsledok teda je, že táto energia pochádza z rozdielu tepelnej energie vody na začiatku a na konci procesu.

*Šimon Pajger*  
legolas@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.