

Úloha II.3 . . . rozpadající se planeta

5 bodů; průměr 3,15; řešilo 91 studentů

Uvažujte planetu o celkové hmotnosti a poloměru jako Země. Kolik by musela obsahovat uranu ^{238}U , aby její povrch měl 15°C , jestliže by nebyla osvětlována žádnou blízkou hvězdou?

Jarda se spálil na slunci.

Vyzářený výkon podle Stefan-Boltzmannova zákona

$$P = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

musí být v rovnováze dodáván rozpady jader. V našem případě je poloměr planety stejný jako poloměr Země, tedy $R = R_{\oplus}$, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a $T = 288 \text{ K}$ je termodynamická teplota planety.

Na jedno jádro ^{238}U nakonec připadá energie $E = 51,8 \text{ MeV}^1$. Musíme totiž uvažovat celou rozpadovou řadu, ne jen rozpad přímo uranu. V ní jsou poločasy rozpadu ostatních prvků o několik řádů rychlejší než poločas rozpadu ^{238}U , který je $4,47 \cdot 10^9 \text{ y}$. Můžeme tedy uvažovat, že rychlost vzniku všech izotopů v řadě se na škálách v řádu milionů let nemění. Jádra, která se nyní rozpadají, tak mohla vzniknout před desítkami tisíc let (např. jádra ^{234}U s poločasem rozpadu asi $250\,000 \text{ y}$), ale stále se jich objevuje stejně, proto si můžeme představit, že se rozpadají okamžitě. Dále tak uvažujeme, že se uran rozpadá přímo s energií E . Důležitý je převod z jednotky eV do J, který je jednotkou SI. Platí $51,8 \text{ MeV} = 8,3 \cdot 10^{-12} \text{ J}$.

Aktivita uranu je $A = N \cdot \ln 2 / T_{1/2}$, kde N je počet atomů v kůře planety. Vzhledem k velmi dlouhému poločasu rozpadu můžeme počet jader považovat za konstantní. Výkon je roven součinu aktivity a energie uvolněné na jeden rozpad, takže počet jader v planetě musí být:

$$N = \frac{4\pi T_{1/2} R^2 \sigma T^4}{\ln 2 E}$$

Celková hmotnost potřebného uranu je pak daná součinem počtu jader N a hmotnosti jednoho jádra $A_U m_u$, kde $A_U = 238$ je relativní atomová hmotnost uranu a $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ atomová hmotnostní jednotka, takže

$$m = A_U m_u \frac{4\pi T_{1/2} R^2 \sigma T^4}{\ln 2 E} = 1,94 \cdot 10^{21} \text{ kg}.$$

Pro případ Země, která má hmotnost $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, tak nejde ani o tisícinu hmotnosti. Na druhou stranu, hmotnost uranu v zemské kůře je asi o pět řádů menší, proto by na Zemi bez Slunce bylo výrazně chladněji, než je tomu ve skutečnosti.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹Můžeme najít např. zde: <https://en.wikipedia.org/wiki/Uranium-238>.