Úloha II.2 ... nahuštěná pneumatika

3 body; průměr 2,31; řešilo 107 studentů

Říká se, že když chcete dofouknout kola u auta, máte to dělat, když jsou studená. Jarda proto dojel k benzínce s kompresorem, zašel si na párek v rohlíku a čekal, až se kola ochladí. Pro zajímavost ale změřil tlak v pneumatikách před svačinou i po ní. Z původních 2,7 bar *klesl na* 2,5 bar. *Napadlo ho ovšem, jestli se dá tlak v pneumatikách poznat podle výšky vozidla nad povrchem silnice. Jak moc se karoserie auta kvůli snížení teploty v kolech přiblížila v tomto případě k zemi? Hmotnost auta je* 1,3 t. *Vnější poloměr pneumatiky je* 32 cm, *vnitřní* 22 cm *a šířka* 21 cm. *Předpokládejte, že se pneumatika vlivem tíhy auta deformuje jen na spodní straně v místě dotyku se zemí.*

Jarda by pro FYKOS vypustil duši.

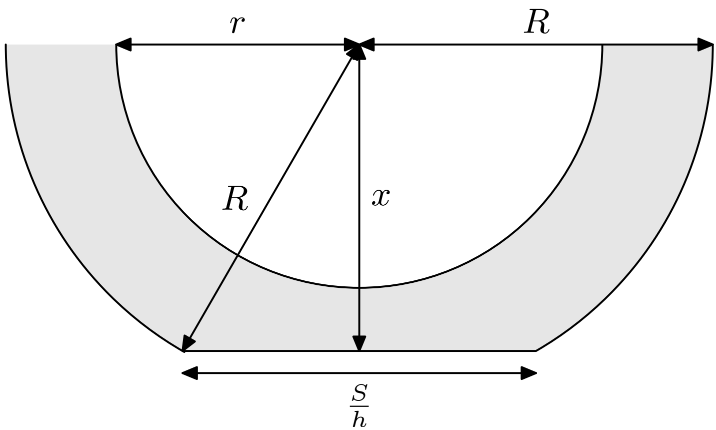
Na ploše dotyku kol auta se zemí platí rovnost tíhové a tlakové síly

$$mg = 4Sp\,,$$

kde m je hmotnost auta, p tlak uvnitř kol a S plocha dotyku. Dle zadání předpokládáme, že kolo má tvar kružnice, která je na spodní straně uťatá. Délku této sečny spočítáme z plochy S, odkud pak z Pythagorovy věty najdeme její vzdálenost od středu kola

$$x = \sqrt{R^2 - \left(\frac{S}{2h}\right)^2}\,,$$

kde R je vnější poloměr pneumatiky a h je její šířka.



Obrázek 1: Náčrtek k výpočtu vzdálenosti x země od středu kola.

Pro teplejší i studenější pneumatiku můžeme z dat ze zadání najít hledaný rozdíl vzdáleností x jako

$$\Delta x = \sqrt{R^2 - \left(\frac{mg}{8hp_1}\right)^2} - \sqrt{R^2 - \left(\frac{mg}{8hp_2}\right)^2}\,.$$

Do tohoto výrazu dosadíme a dostaneme správný výsledek. Protože je však $R^2 \gg (mg/(8hp_i))^2$, kde $i \in \{1,2\}$, můžeme použít matematickou pomůcku jménem Taylorův rozvoj. Ten říká, že pro $x \ll 1$ můžeme s dobrou přesností psát

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}\,.$$

Z odmocnin tedy vytkneme R^2 a provedeme právě zmíněnou aproximaci. Po několika přímočarých úpravách dostaneme

$$\Delta x \approx \frac{1}{2R}\left(\frac{mg}{8h}\right)^2\left(\frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_1^2}\right) \doteq 0{,}2\,\mathrm{mm}\,.$$

Číselně jsme dostali prakticky stejný výsledek, jako kdybychom dosazovali do přesné rovnice pro Δx. Chyba je ovšem mnohem menší než přesnost zadaných jednotek a dosazování je jednodušší. Taylorův rozvoj se ve fyzice v těchto situacích velmi často používá právě pro znatelné zjednodušení výrazů.

Můžeme však zkonstatovat, že v běžných podmínkách je nemožné poznat nafouknutí pneumatiky podle výšky vozidla nad povrchem silnice, neboť změna výšky je velmi malá.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.