

## Úloha I.S ... meriame čas

10 bodů; průměr 4,53; řešilo 79 studentů

1. Za ako dlho sa v dlhodobom priemere posunie jarná rovnodennosť o jeden deň pri používaní Gregoriánskeho kalendára?
2. O koľko sa zmení doba kmitu kyvadla s dobou kmitu  $t = 1$  s pri zmene teploty o  $T = 10$  °C, ak je tyč a aj na nej zavesené oveľa ťažšie závažie vyrobené z medi? Akými procesmi na takého kyvadlo vplýva zmena atmosférického tlaku a vlhkosti vzduchu?
3. Odhadnite akú dĺžku má najkratšia „tyč“ z kremeňa, ktorá rezonuje na frekvencii  $f = 5$  MHz? Uvažujte hustotu kremeňa  $\rho = 2,65$  g·cm<sup>-3</sup> a modul pružnosti  $E \approx 80$  GPa a kmity v pozdĺžnom smere s jedným koncom upevneným a druhým voľným.
4. Majme izotop <sup>a</sup>X, ktorý sa s polčasom  $T_{1/2}$  rozpadá na izotop <sup>b</sup>Y. Vo vzorke zmeriame vo viacerých miestach relatívne zastúpenie izotopov materskeho a dcérskeho nuklidu voči inému izotopu dcérskeho prvku, o ktorom predpokladáme v čase nemenné zastúpenie:  $[^aX] / [^cY]$ ,  $[^bY] / [^cY]$ . Ako určíme vek vzorky  $t$ ? Oba izotopy prvku Y sú stabilné a vyskytujú sa v pôvodnom materiále. Iné jadrové premeny neuvažujte.

1. V Gregoriánskom kalendári je v priebehu 400 rokov priestupných 97 dní na rozdiel od 100 dní v kalendári Juliánskom. Dĺžka gregoriánskeho roka je tak

$$t_G = 365 \text{ dní} + \frac{1 \text{ deň} \cdot 97}{400} = 365,2425 \text{ dňa}.$$

Dĺžka tropického roka okolo roku 2000 je  $t_T = 365,24219$  dňa, avšak s časom sa mierne mení vplyvom zmeny polohy zemskej osi a tvaru zemskej dráhy. Pomocou týchto údajov získame hľadaný čas, za ktorý bude Gregoriánsky kalendár chybný o deň ako

$$t = \frac{1 \text{ deň}}{T_T - T_G} \cdot 1 \text{ rok} \doteq 3\,200 \text{ rokov}.$$

2. Pre periódu kyvadla máme  $T \propto \sqrt{L}$ , kde  $L$  je dĺžková škála kyvadla. Pri zmene teploty sa rozmery kyvadla zmenia podľa vzťahu pre dĺžkovú rozťažnosť

$$L = L_0(1 + \alpha\Delta T),$$

kde v našom prípade máme pre meď koeficient dĺžkovej rozťažnosti  $\alpha = 16 \cdot 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>. Pre novú periódu kyvadla tak máme

$$t = t_0 \cdot \sqrt{\frac{L}{L_0}} = \sqrt{1 + \alpha\Delta T} \rightarrow \Delta t \approx \frac{t_0}{2} \alpha \Delta T = 8 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

Táto zmena sa môže zdať malá, no už za deň dosahuje kumulatívne odchýlku 7 s, čo je za mesiac až tri a pol minúty.

Zmena tlaku a vlhkosti vzduchu (spolu s teplotou) na kyvadlo pôsobí najmä prostredníctvom zmeny odporu vzduchu. Pohyb kyvadla v prostredí s odporom má za následok jednak postupný útlm kmitov – z času na čas je nutné hodinám naviniúť závažie, ktoré

nahrádza stratenú energiu, ale aj zmenu periódy samotnej – s rastúcim odporom sa perióda predlžuje. Atmosférický tlak pôsobí navyše aj inak – prostredníctvom Archimedovho zákona – vztlaková sila nadľahčuje závažie a mení tak efektívne tiažové zrýchlenie  $g_{\text{eff}} = (1 - \rho_{\text{vz}}/\rho_{\text{Cu}})g$  so zmenou hustoty vzduchu  $\rho_{\text{vz}}$ .

3. Ak budeme uvažovať kmity v kompresii pozdĺž tyče za predpokladu, že bude jeden koniec pevný a druhý voľný máme pre základný mód vzťah medzi dĺžkou tyče  $l$  a vlnovou dĺžkou kmitov  $\lambda$  vzťah  $l = \lambda/4$  – v jednom konci je uzol vlnenia a v druhom je hneď nasledujúci mód. Frekvencia a vlnová dĺžka sú previazané rýchlosťou šírenia vlnenia, teda rýchlosťou zvuku  $c$ , v prostredí ako  $\lambda f = c$ . Pre tenkú tyč o hustote  $\rho$  a module pružnosti  $E$  máme rýchlosť šírenia

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Postupným dosadením dostaneme výsledný vzťah pre dĺžku „tyče“

$$l = \frac{1}{4f} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \doteq 0,28 \text{ mm}.$$

Zaujímavou možnosťou bolo riešiť úlohu pomocou rozmerovej analýzy, keďže máme tri premenné ( $f, E, \rho$ ) a tri základné veličiny obsiahnuté v jednotkách (čas, vzdialenosť a hmotnosť). Ak budeme hľadať výsledok v tvare  $l = f^\alpha E^\beta \rho^\gamma$ , dostaneme z rovnosti exponentov jednotiek nasledujúcu sústavu rovníc

$$\begin{aligned} [\text{s}] : 0 &= -\alpha - 2\beta, \\ [\text{m}] : 1 &= -\beta - 3\gamma, \\ [\text{kg}] : 0 &= \beta + \gamma, \end{aligned}$$

ktorej riešením je  $\alpha = -1, \beta = 1/2, \gamma = -1/2$ , teda dostávame vzťah

$$l = \frac{A}{f} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

rovnaký ako v predošlom výpočte, až na číselnú konštantu  $A$ , ktorej veľkosť sa priamo rozmerovou analýzou nedá určiť. V porovnaní vidíme, že má hodnotu  $A = 1/4$ .

4. Pre zastúpenie rozpadajúceho sa izotopu v čase máme

$$[{}^{\text{a}}\text{X}](t) = [{}^{\text{a}}\text{X}](t_0) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Dcérského izotopu bude teda postupne pribúdať z pôvodného množstva  $[{}^{\text{b}}\text{Y}](t_0)$  podľa vzťahu

$$[{}^{\text{b}}\text{Y}](t) = [{}^{\text{b}}\text{Y}](t_0) + [{}^{\text{a}}\text{X}](t_0) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}\right).$$

Ak dosadíme za neznáme pôvodné zastúpenie izotopu  ${}^{\text{a}}\text{X}$  z predchádzajúcej rovnice dostávame vzťah

$$[{}^{\text{b}}\text{Y}](t) = [{}^{\text{b}}\text{Y}](t_0) + [{}^{\text{a}}\text{X}](t) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-t}{T_{1/2}}} - 1\right),$$

čo po vydedení zastúpením izotopu  ${}^c\text{Y}$  a úpravou exponenciály dáva finálny vzťah

$$\frac{[{}^b\text{Y}]}{[{}^c\text{Y}]}(t) = \frac{[{}^b\text{Y}]}{[{}^c\text{Y}]}(t_0) + \frac{[{}^a\text{X}]}{[{}^c\text{Y}]}(t) \left( 2^{\frac{t}{T_{1/2}}} - 1 \right).$$

Pomocou tohto vzťahu sa zo zmeraných zastúpení jednotlivých izotopov v čase  $t$  určia pomery  $\frac{[{}^a\text{X}]}{[{}^c\text{Y}]}(t)$  a  $\frac{[{}^b\text{Y}]}{[{}^c\text{Y}]}(t)$  v jednotlivých vzorkách s mierne odlišným chemickým zložením. Tu je dôležité podotknúť, že keďže po chemickej stránke sú si rôzne izotopy jedného prvku (takmer) totožné, pomer  $\frac{[{}^b\text{Y}]}{[{}^c\text{Y}]}(t_0)$  je preto rovnaký v každej vzorke. Použitím lineárnej regresie na závislosť

$$\frac{[{}^b\text{Y}]}{[{}^c\text{Y}]}(t) = A + B \cdot \frac{[{}^a\text{X}]}{[{}^c\text{Y}]}(t),$$

tak môžeme určiť ako pôvodný pomer  $A = \frac{[{}^b\text{Y}]}{[{}^c\text{Y}]}(t_0)$ , tak zo smernice určiť hodnotu výrazu  $B = \left( 2^{\frac{t}{T_{1/2}}} - 1 \right)$ , z ktorej už jednoducho určíme vek vzorky ako

$$t = T_{1/2} \cdot \log_2(B + 1) = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln(B + 1).$$

Táto metóda sa využíva, napríklad, pre izotopy rubídia a stroncia pri datovaní meteoritov, čo nám umožnilo určiť vek Slnecnej sústavy.

**Jozef Lipták**  
liptak.j@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.