

Úloha I.E ... utřeme papír

12 bodů; průměr 7,48; řešilo 93 studentů

Změřte koeficient statického tření mezi dvěma listy kancelářského papíru.

Karel četl recepty napříč.

V tomto experimentu se v domácích podmínkách pokusíme změřit koeficient tření mezi dvěma listy kancelářského papíru. K měření tření se obecně používají přístroje nazývané drsnoměry neboli tribometry, které mohou být různé sofistikované. My využijeme nejjednodušší metodu, a to měření na nakloněné rovině.

Teorie

Rozklad sil, které působí na těleso na nakloněné rovině, patří mezi základní úlohy středoškolské fyziky, proto zde jen stručně připomeneme postup a výsledky. Na těleso působí pouze tři síly – tíhová, reakce podložky a třecí síla. Tíhová síla působí směrem dolů a její velikost je $F_g = mg$, kde m je hmotnost tělesa a $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení. Reakce podložky zabraňuje propadnutí tělesa skrz materiál pod ním. Způsobuje také třecí sílu, kterou na těleso podložka působí. Třecí síla pak působí proti (možnému) pohybu tělesa.

Všechny síly si rozložíme na složky kolmé a rovnoběžné s podložkou. Uvažujme, že podložka svírá s vodorovnou přímkou (která je kolmá na tíhové zrychlení) úhel α . Pak ve směru kolmém na rovinu má tíhová síla složku (říkejme jí normálová) o velikosti $F_{g\perp} = N = F_g \cos \alpha = mg \cos \alpha$. Tato síla se vyrovná s reakcí podložky, protože těleso nepadá skrz podložku dolů. Tím jsme vyřešili síly v normálovém směru.

Ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou na těleso působí tečná složka tíhové síly $T = F_g \sin \alpha = mg \sin \alpha$. Ta by mohla těleso uvádět do pohybu směrem dolů. Opačným směrem ale působí třecí síla. Ta má vždy velikost rovnu nebo menší, než je součin normálové síly a koeficientu tření $F_t = fN = fmg \cos \alpha$, kde jsme písmenem f označili právě vyšetřovaný koeficient. Dokud síla, která uvádí těleso do pohybu, je dostatečně malá, tak se jí velikost třecí síly přizpůsobí a těleso se nezačne urychlovat. V opačném případě je velikost třecí síly konstantní a rovna právě F_t . Celková síla, která na těleso působí směrem dolů podél nakloněné roviny, tak je $F = ma = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)$. nepohybuje, dokud mu nějakým vnějším působením není udělena hybnost.

Obecně se liší koeficient tření, který je mezi tělesy v klidu a tělesy v pohybu. V našem experimentu budeme postupně zvětšovat úhel náklonu α , dokud tečná složka tíhové síly nebude větší než třecí síla a těleso se nezačne pohybovat. Změříme tedy koeficient statického tření, což je v souladu se zadáním. Jakmile se těleso dostane do pohybu, zvětšování náklonu zastavíme a úhel α si zaznamenáme jako mezní úhel α_m . V tom okamžiku jsme totiž dostali podmínku, při které přibližně platí

$$F = ma = mg(\sin \alpha_m - f \cos \alpha_m) = 0,$$

odkud můžeme i bez znalosti tíhového zrychlení a hmotnosti tělesa určit koeficient tření jako

$$mg(\sin \alpha_m - f \cos \alpha_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sin \alpha_m}{\cos \alpha_m} = \text{tg } \alpha_m.$$

Změřením mezního úhlu α_m tak najdeme hledaný koeficient tření.

Uspořádání a provádění experimentu

Postup měření, který budeme aplikovat, byl popsán v předchozí kapitole. Jako nakloněnou rovinu použijeme dřevěnou desku o velikosti přibližně A3. Abychom změřili koeficient tření mezi dvěma listy kancelářského papíru, upravíme povrch desky. Upevníme na něj pomocí lepicí pásky dva listy kancelářského papíru tak, aby pokryly téměř celou desku. Na ni pak položíme rovnoběžně s delšími rozměry desky papír a začneme desku zvedat. Desku zvedáme z nízkého úhlu, při kterém tření položený papír ještě bez problémů udrží. Zvedání provádíme pomocí zasouvání tuhého předmětu (hranatého květináče) směrem pod desku tak, že ji nadzvedává. Druhá spodní strana desky je zaražena za velmi těžký předmět (svěrák). Poté, co papír začne klouzat, zastavíme zasouvání tuhého předmětu a změříme mezní úhel náklonu. Poté předmět vysuneme tak, abychom dostatečně zmenšili úhel α , položíme papír na nakloněné rovině zase o něco výše a měření opakujeme.

Úhel náklonu desky měříme pomocí mobilního telefonu, který jsme pomocí lepicí pásky připevnili na desku a zvedáme jej tak přímo s ní. Číselnou hodnotu úhlu získáme pomocí aplikace *phyphox*, v nástroji *Náklon*, v oddílu *Plane*. Aplikace by měla dokázat v tomto nastavení určit náklon desky vůči vodorovné rovině, ať je telefon na nakloněné rovině natočený jakkoli. V našem experimentu je telefon upevněný stále stejným směrem, takže naměřené hodnoty můžeme bez obav porovnávat. Před vlastním měřením jsme změřili délku desky a vzdálenost její horní strany od země, odkud jsme získali úhel náklonu a porovnali jej s údajem z mobilu. Údaje se příliš nelišily, proto se na hodnoty změřené aplikací *phyphox* můžeme v rámci dále zvoleného intervalu přesnosti spolehnout. Aplikace zobrazuje výsledek na desetiny stupně, což je výrazně přesněji než všechny ostatní pomůcky v domácích podmínkách. O přesnosti naměřených hodnot budeme diskutovat v sekcích *Výsledky* a *Diskuze*.

Pro lepší statistický soubor jsme (i díky nízké náročnosti experimentu) změřili mezní úhel náklonu α_m pro tři listy kancelářského papíru. Dva pocházeli ze zásobníku tiskárny a jeden byl vytažený z klasického balení kancelářských papírů o 500 kusech těsně před experimentem. Uvidíme tedy, jestli koeficient tření závisí na takové historii papíru. Papíry přilepené k desce jsme nevměňovali. Ze zajímavosti jsme také obalili těžký předmět (hlavu kladiva) stejným kancelářským papírem (z tiskárny) a provedli jsme experiment znovu. Na lehké listy papíru totiž mohou působit další vlivy, kvůli kterým může vyjít koeficient tření jinak. V měření s kladivem jsme měřili koeficient tření papíru na papíru, ale nemůžeme si dovolit říct, že bychom tím změřili koeficient tření mezi dvěma listy kancelářského papíru.

Níže přikládáme fotografii 1 experimentálního uspořádání i s měřenými předměty.

Výsledky

V této kapitole budeme prezentovat naměřené hodnoty α_m pro všechny tři listy kancelářského papíru i hlavy kladiva obalené v papíru. Pro každý z těchto čtyř předmětů jsme provedli měření čtrnáctkrát, z toho sedm měření bylo provedeno na jedné straně listu papíru a zbytek na druhé (otočeno bylo i kladivo), abychom např. nezašpinili jednu stranu a neovlivnilo to změřená data. Z těchto hodnot určíme koeficient tření a stanovíme jeho chybu.

Naměřené hodnoty jsou v tabulce 1 níže. Aplikace si zobrazovala naměřený úhel na dvě desetinná místa, protože se ale hodnoty na posledním zobrazovaném místě rychle měnily a asi desetina stupně nebyla při měření konstantní, rozhodli jsme se je zaokrouhlovat vždy na polovinu stupně, neboť vyšší přesností bychom si vůbec nemohli být jisti.



Obrázek 1: Fotografie experimentální aparatury. Na nakloněné rovině list kancelářského papíru, hlava kladiva zabalená v papíru a mobilní telefon. Vzadu tuhý předmět – květináč.

Pomocí odvozeného vztahu z teoretické části $f = \operatorname{tg} \alpha_{\text{m}}$ přepočítáme všechny mezní úhly na koeficienty tření. Z nich pak spočítáme pro každý předmět aritmetický průměr a směrodatnou odchylku Δf podle tradičního známého vzorce jako

$$\Delta f = \sqrt{\frac{\sum_1^n (f - \bar{f})^2}{n(n-1)}},$$

kde $n = 14$ je počet měření pro jeden předmět a \bar{f} je průměrná hodnota koeficientu tření. V čitateli v odmocnině sčítáme právě přes všech 14 měření. Směrodatná odchylka nám tak udává, jak moc jsou jednotlivá měření daleko od jejich průměrné hodnoty. Čím menší je směrodatná odchylka, tím přesnější máme měření. Výsledky tohoto postupu jsou prezentovány v tabulce 2. Stejným způsobem jsme určili i směrodatnou odchylku mezního úhlu v tabulce 1.

Při výpočtu chyb bychom se měli zajímat také o chybu samotného měřicího přístroje. Kdybychom měřili např. pravítkem, stanovili bychom ji jako polovinu nejmenšího dílku, u analogových a digitálních přístrojů by měla být stanovena výrobcem. Zde se nám ovšem nepodařilo dohledat žádné údaje o přesnosti samotného měření. Vzhledem k tomu, že je údaj na obrazovce zapsaný na čtyři platné číslice, můžeme se domnívat, že chyba měření bude poměrně malá. Na druhou stranu i při klidu se údaj mění o desetiny stupně. Proto jsme se rozhodli údaj o úhlu zaokrouhlovat na polovinu stupně a dále už chybu přístroje nebudeme uvažovat, vzhledem k domácím podmínkám a přesnosti všech ostatních pomůcek ji nemáme jak ověřit ani vyvrátit.

Naměřili jsme koeficienty tření mezi listy papíru jako $0,51 \pm 0,01$ u prvního papíru na nakloněné rovině, $0,50 \pm 0,01$ u druhého a $0,45 \pm 0,01$ u třetího. Průměrný koeficient tření pak je $0,49 \pm 0,02$, kde větší chyba reprezentuje variabilitu jednotlivých listů papíru. Koeficient tření papíru na papíru (měření s kladivem) nám pak vyšel jako $0,58 \pm 0,01$. V další kapitole budeme naměřené výsledky diskutovat.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty mezního úhlu α_m pro jednotlivé listy papíru (označeny číslem v indexu) a těžké těleso (index „t“). Vypočítaný průměr a směrodatná odchylka.

měření	$\frac{\theta_1}{\circ}$	$\frac{\theta_2}{\circ}$	$\frac{\theta_3}{\circ}$	$\frac{\theta_t}{\circ}$
1	27,5	24,0	21,0	29,0
2	25,0	26,5	25,0	30,0
3	24,0	27,0	22,0	32,5
4	28,0	24,5	24,0	32,5
5	29,5	25,5	22,5	31,5
6	28,5	26,0	21,5	28,5
7	27,0	28,5	22,5	31,5
8	28,0	27,5	28,0	31,0
9	25,5	26,5	25,0	30,0
10	27,5	26,0	24,5	28,0
11	25,5	25,0	26,5	29,5
12	26,0	25,5	21,0	28,5
13	29,5	29,0	25,5	30,0
14	26,0	28,5	26,5	29,0
průměr	27,0	26,5	24,0	30,0
sm. odch.	0,5	0,5	0,5	0,5

Tabulka 2: Koefficient tření v každém měření pro jednotlivé listy papíru (označeny číslem v indexu) a těžké těleso (index „t“). Vypočítaný průměr a směrodatná odchylka.

měření	f_1	f_2	f_3	f_t
1	0,520	0,445	0,384	0,554
2	0,466	0,498	0,466	0,577
3	0,445	0,509	0,404	0,637
4	0,531	0,455	0,445	0,637
5	0,565	0,477	0,414	0,612
6	0,543	0,487	0,394	0,543
7	0,509	0,543	0,414	0,612
8	0,531	0,520	0,531	0,600
9	0,477	0,498	0,466	0,577
10	0,520	0,487	0,455	0,531
11	0,477	0,466	0,498	0,565
12	0,487	0,477	0,384	0,543
13	0,565	0,554	0,477	0,577
14	0,487	0,543	0,498	0,554
průměr \bar{f}	0,51	0,50	0,45	0,58
sm. odch. Δf	0,01	0,01	0,01	0,01

Diskuze výsledků

Ačkoli jsme se snažili předejít všem zdrojům chyb, nedokážeme je v domácích podmínkách v tak jednoduchém uspořádání, jaké jsme použili, minimalizovat. Nepřesnost naměřených hodnot mohla vzniknout už jen kvůli tomu, že papír sklouzával po dvou listech, které k sobě sice byly umístěny tak blízko, jak to jen šlo, ale i tak mezi nimi vznikla drobná spára. Obecně ze zkušenosti bychom mohli předpokládat, že tato nehomogenita bude koeficient tření spíše zvyšovat, konce přilepených papírů ovšem nemusí být zarovnané přesně s deskou a klouzající papír se na nich může nadzvedávat, což by zase mohlo tření snížit. Je evidentní, že použití papíru velikosti A3 by měření zkvalitnilo.

Při posouvání těžkého předmětu kvůli zvedání nakloněné roviny jsme bohužel nepracovali na dokonale hladké podlaze, takže pohyb nebyl plynulý, ale drobně trhaný. Tím, že jsme desku nenaklápěly konstantní rychlostí, vznikaly v soustavě spojené s ní setrvačné síly, které mohly okamžik uvolnění papíru ze stabilní polohy výrazně ovlivnit. Pro eliminaci této systematické chyby by bylo vhodnější horní stranu desky nadzvedávat jinak, v domácích podmínkách jsme ovšem nenašli způsob, jakým zastavit přesně v okamžiku rozjždění papíru a změřit daný úhel. Také jsme pozorovali, že když se papír po nakloněné rovině rozjel, někdy se ještě na ní také zastavil. Muselo na něj začít působit větší tření, takže koeficient patrně nebyl na všech místech stejně velký.

V průběhu měření jsme si všimli, že připravit papír do přesně stejných výchozích podmínek je velmi obtížné. Již jen drobné zatlačení na položený list papíru zvyšovalo mezní úhel. Někdy se naopak přihodilo, že papír začal klouzat při položení na desku při velmi nízkém úhlu, ze kterého jsme ji zvedali. List papíru je zřejmě tak lehký, že jej ovlivňují i jiné síly než jen třecí, jak ji známe z pohybu ostatních předmětů. Zároveň je papír velmi ohebný, takže nemusel být vždy celou plochou položený na desce, některé jeho části bývaly více či méně prohnuté. Ačkoli jsme se snažili provést experiment vždy stejně, nemohli jsme zaručit, že počáteční podmínky byly pokaždé ekvivalentní.

Hodnota tření prvních dvou listů papíru vyšla v rámci směrodatné odchylky velmi podobná, u třetího listu bylo tření asi o deset procent nižší. Zde se musíme znovu zmínit o původu listů, neboť první dva pocházely ze zásobníku tiskárny, zatímco třetí přímo z balení o 500 kusech. Byl tedy méně vystaven vnějším vlivům, zřejmě byl čistější a méně pomačkaný. Vidíme proto, že tření se *výrazně mění* podle toho, jaká je historie daných listů papíru. Proto jsme také po sedmém měření papíry otáčely, neboť jsme chtěli kompenzovat vliv toho, jakou stranou dolů jsme je kde odložili.

Protože jsme tušili, že koeficient tření mezi listy kancelářského papíru může být jiný než při zvětšení normálové síly, rozhodli jsme se vyzkoušet experiment znovu pro zjištění tření přímo mezi papírem jako materiálem. Papír z tiskárny jsme tentokrát zatížili těžkým závažím (kladivem). Koeficient tření je asi o 15 % vyšší než u listů papíru ze zásobníku tiskárny. Papír byl tak zřejmě více přitisknutý a neprojevoval se zde tolik vliv jiných sil. Můžeme tedy rozhodně říci, že koeficient tření není nezávislý na normálové síle, jak jsme předpokládali v teoretické části, ale zvyšuje se s její rostoucí hodnotou. Mohlo by být zajímavé porovnat koeficient tření pro různá zatížení a také papíry s různou historií, což jsme ovšem v této úloze už netestovali.

Vypočítali jsme směrodatné odchylky a pro každý list papíru tak vyšly relativní chyby koeficientu tření okolo 2 %, což je poměrně málo. Z tohoto údaje bychom mohli konstatovat, že jsme tření pro každý předmět změřili poměrně přesně, ale mezi předměty jsou ve tření velké rozdíly. Neznáme ovšem chybu přístroje a velikost směrodatných odchylek je vzhledem k použitému domácímu vybavení a postupu podezřele malá. Je možné, že zaokrouhlení hodnoty

úhlu na polovinu stupně je pořad jenné a že chyba přístroje je ještě vyšší, což by zvýšilo celkovou chybu měření. V rámci experimentu jsme však tuto možnost netestovali.

Vzhledem k naměřeným výsledkům by mohlo být zajímavé provést experiment s ještě více listy papíru, které byly vystaveny jiným a extrémnějším podmínkám, patrně bychom dostali ještě větší interval naměřených koeficientů tření. Rovněž bychom mohli proměřit závislost koeficientu tření na normálové síle, kterou bychom na papír působili.

Závěr

Naměřili jsme mezní úhel, při kterém dochází k samovolnému rozjetí listu papíru na povrchu z kancelářského papíru a z něj vypočítali koeficient tření. Měření bylo provedeno pro tři listy papíru s výsledky $0,51 \pm 0,01$ u prvního, $0,50 \pm 0,01$ u druhého a $0,45 \pm 0,01$ u třetího papíru na nakloněné rovině. Z naměřených výsledků je zřejmé, že hodnotu koeficientu tření ovlivňuje to, čemu byl papír vystaven a jaký je jeho aktuální stav. I velmi jemné vlivy dokáží tření výrazně změnit. Průměrný koeficient tření mezi listy papíru pak je $0,49 \pm 0,02$.

Proto jsme změřili koeficient tření papíru na papíru, kdy jsme list zatížili hlavou od kladiva. Koeficient nám pak vyšel jako $0,58 \pm 0,01$. Kvůli větší normálové síle byly listy více v kontaktu, což zvýšilo koeficient tření.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.