Úloha I.5 ... otužování v létě

10 bodů; průměr 6,71; řešilo 109 studentů

V zimě Matěj našel balík polystyrenu o objemu $0{,}5\,\mathrm{m^3}$ *a rozhodl se, že ho využije. Vyrobí si z něj krabici tvaru krychle a ze zamrzlého rybníku si pak nařeže led, který v polystyrenu uschová ve sklepě, kde je konstantní teplota* $9\,^\circ\mathrm{C}$*. Jak velkou by měl Matěj vyrobit krychli, aby mu v ní po půl roce zbylo co největší množství ledu? A kolik kilogramů ledu mu zbude? Uvažujte, že led z rybníka má teplotu přesně* $0\,^\circ\mathrm{C}$*. Objem polystyrenu spotřebovaný na hrany krychle zanedbejte.*

Nápověda: *Součinitel tepelné vodivosti je nejsnadněji dohledatelný parametr polystyrenu.*

Matěj si půjčil balík polystyrenu ze stavby.

Čím větší krabici Matěj vyrobí, tím větší množství ledu bude schopna pojmout, ale tím tenčí stěny a horší izolační schopnosti bude mít.

Předpokládáme, že Matěj postavil krychli vodotěsně, takže z ní voda nevytéká. Proces tání ledu je relativně pomalý, proto budeme uvažovat, že během tání je uvnitř krychle led a voda o konstantní teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$. To si můžeme dovolit, protože voda má mnohem větší tepelnou vodivost než polystyren. Pracujeme tedy s rozdílem teplot $\Delta T = 9\,\mathrm{K}$. Zároveň neuvažujeme vliv vzduchové bubliny, která uvnitř vzniká, protože led při tání zmenšuje objem.

Matěj má k dispozici polystyren o objemu $V = 0{,}5\,\mathrm{m^3}$. Vyrobí-li krychli o hraně a, bude mít tloušťku stěn $d = V/S = V/6a^2$, kde $S = 6a^2$ je povrch krychle a zanedbali jsme materiál spotřebovaný na hrany krychle.

Podle definičního vztahu pro součinitel tepelné vodivosti λ můžeme spočítat energii, která za čas $t = 0{,}5\,\mathrm{let} = 1{,}6\cdot 10^7\,\mathrm{s}$ prosákne skrze polystyren dovnitř krabice

$$\Delta E = \lambda \Delta T \frac{S}{d} t = \lambda \Delta T \frac{36a^4}{V} t\,,$$

kde $\lambda = 0{,}035\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ pro polystyren. Vydělíme-li tuto energii měrným skupenským teplem tání ledu $l_\mathrm{t} = 334\,000\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$, dostaneme hmotnost roztátého ledu. Hmotnost zbylého ledu tedy je

$$m = a^3\rho - \frac{\Delta E}{l_\mathrm{t}} = a^3\rho - \lambda\Delta T \frac{36a^4}{V l_\mathrm{t}} t\,,$$

kde $\rho = 920\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota ledu.

Maximální možná hmotnost zbylého ledu je taková, pro kterou nabývá derivace tohoto výrazu nulovou hodnotu, tedy

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}a} = 0\,,$$

$$3a^2\rho - 4\lambda\Delta T \frac{36a^3}{V l_\mathrm{t}} t = 0\,,$$

$$\lambda\Delta T \frac{48a}{V l_\mathrm{t}} t = \rho\,,$$

$$a = \frac{\rho V\, l_\mathrm{t}}{48\Delta T\lambda t} \doteq 0{,}64\,\mathrm{m}\,.$$

Pro krabici o této délce strany mají stěny tloušťku $0{,}2\,\mathrm{m}$, čili zanedbání materiálu spotřebovaného na hrany krychle není příliš opodstatněné, ale pro hrubý odhad nám to postačí. Matějovi tak po půl roce zbyde celých $m = \left(\rho V\, l_\mathrm{t}/(48\Delta T\lambda t)\right)^3\cdot\rho/4 = 59\,\mathrm{kg}$ ledu, což je pořád dost na pravidelné letní otužovačky.

Ve skutečnosti by však ledu zbylo ještě více, protože v celém řešení jsme neuvažovali tepelnou vodivost vody (respektive vzduchu, pokud by voda odtékala pryč), která by vnitřní kus ledu ještě pomáhala izolovat.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.