

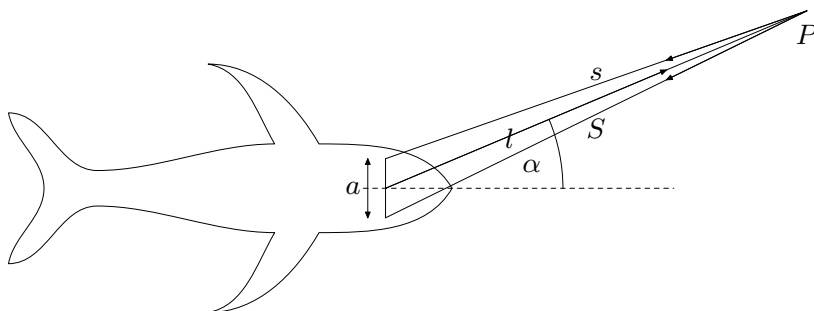
Úloha I.1 ... Moby Dick

3 body; průměr 1,66; řešilo 122 studentů

Některé druhy živočichů, jako jsou kytovci, se orientují pomocí echolokace. Předpokládejme, že kytovec vydává zvukový signál hrtanem umístěným přesně mezi ušima vzdálenými a . Uvažujme, že ve stejné hloubce jako velryba pluje ponorka. Vydaný zvuk se od ní odrazí a k bližšímu uchu dorazí za čas t od okamžiku vyslání. Je-li časový posun mezi zachycením zvuku pravým a levým uchem Δt , jaká je vzdálenost a směr k ponorce?

Výprava velrybářská se Radce poněkud vymkla z rukou.

Nejprve si načrtne obrázek 1 dané situace. Jelikož předpokládáme, že ponorka i velryba se nacházejí ve stejné hloubce, můžeme uvažovat pouze ve dvou rozměrech. Vzdálenost mezi ušima velryby značíme a , vzdálenost ponorky a k ní bližšího ucha označme jako s . Vzdálenost k ponorce l , kterou počítáme, zadefinujeme jako vzdálenost ponorky od velrybího hrtanu. Dále definujeme ostrý úhel α , který svírá osa velryby a spojnice ponorky s velrybím hrtanem, viz obrázek.



Obrázek 1: Náčrt situace. Písmeno P označuje polohu ponorky. Šipky naznačují směr šíření zvuku.

Označme rychlost šíření zvuku ve vodě jako v . Pro celkový čas šíření signálu t tak můžeme psát

$$l + s = vt.$$

Pro rozdíl drah mezi pravým a levým uchem Δ můžeme psát obdobně

$$\Delta = v\Delta t.$$

Povšimněme si, že z trojúhelníkové nerovnosti plyne $v\Delta t \leq a$. Vzdálenost ponorky ke vzdálenějšímu uchu potom vyjádříme jako

$$S = s + \Delta.$$

Nyní můžeme napsat kosinovou větu pro trojúhelník hrtan-bližší ucho-ponorka

$$s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + l^2 - 2\frac{a}{2}l \cos(90^\circ - \alpha).$$

Po úpravě

$$s^2 = \frac{a^2}{4} + l^2 - al \sin(\alpha).$$

Kosinovou větu lze psát také pro druhý trojúhelník: hrtan-vzdálenější ucho-ponorka

$$S^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + l^2 - 2\frac{a}{2}l \cos(90^\circ + \alpha),$$

což upravíme na

$$s^2 + 2s\Delta + \Delta^2 = \frac{a^2}{4} + l^2 + al \sin(\alpha).$$

Sečtením těchto dvou rovnic dostaneme

$$2s^2 + 2s\Delta + \Delta^2 = 2\frac{a^2}{4} + 2l^2$$

a dosazením za s a Δ pomocí t a Δt potom

$$2v^2t^2 + 2l^2 - 4vlt + 2(vt - l)v\Delta t + v^2(\Delta t)^2 = \frac{a^2}{2} + 2l^2.$$

Můžeme si všimnout, že kvadratické členy v l se odečtou a ze vzniklé lineární rovnice snadno vyjádříme vzdálenost ponorky l jako

$$l = \frac{v^2t^2 - \frac{a^2}{4} + vtv\Delta t + \frac{v^2(\Delta t)^2}{2}}{2vt + v\Delta t},$$

neboli (vytkneme $vt/2$)

$$l = \frac{vt}{2} \frac{1 - \frac{a^2}{4v^2t^2} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{(\Delta t)^2}{2t^2}}{1 + \frac{\Delta t}{2t}}.$$

Odečtením dvou kosinových vět naopak získáme rovnici

$$2al \sin \alpha = 2s\Delta + \Delta^2 = 2(vt - l)v\Delta t + v^2\Delta t^2,$$

odkud snadno vyjádříme

$$\sin \alpha = \frac{2(vt - l)v\Delta t + v^2\Delta t^2}{2al} = \frac{v\Delta t}{a} \frac{vt - l + \frac{v\Delta t}{2}}{l} = \frac{v\Delta t}{a} \left[\frac{vt}{l} \left(1 + \frac{\Delta t}{2t}\right) - 1 \right].$$

Po dosazení za l a přímočarých algebraických úpravách získáme konečný výraz

$$\sin \alpha = \frac{v\Delta t}{a} \frac{1 + \frac{a^2}{4v^2t^2} + \frac{\Delta t}{t}}{1 - \frac{a^2}{4v^2t^2} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{(\Delta t)^2}{2t^2}}.$$

Obzvláště zajímavé je zkoumat limitní případ, kdy

$$\frac{a}{vt} = \frac{a}{s+l} \ll 1,$$

neboli, kdy vzdálenost ponorky je výrazně větší než šířka velryby (jak bychom ostatně typicky čekali). To zároveň (skrže trojúhelníkovou nerovnost) implikuje

$$\frac{\Delta t}{t} \leq \frac{a}{vt} \ll 1,$$

neboli, že zpoždění signálu Δt je zanedbatelné oproti celkové době šíření signálu t . Při pohledu na výsledky pro l a α v této limitě dostáváme jednoduché výrazy

$$l \approx s = \frac{vt}{2}$$

a

$$\sin \alpha \approx \frac{v\Delta t}{a}.$$

Radka Křížová
radka.krizova@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.