Úvodem

Milí řešitelé
v rukou držíte zadání poslední série letošního ročníku FYKOSu. Těšit se můžete na bombardování neutriny, implodující ponorku nebo nekonečné kladky. V problémové úloze pak odhadnete, kolik tepla je potřeba k uvaření světového oceánu a v experimentální úloze budete zkoumat bod tání roztoků. Poslední díl seriálu se bude týkat svítivosti a její veličiny kandely.

V nedávné době proběhlo soustředění, které se letos konalo v Jiřetíně pod Jedlovou a účastníci se v jeho průběhu přesunuli do doby průmyslové revoluce, kdy stavěli co nejlepší vozidla z dostupných materiálů či se snažili patentovat svůj vynález nebo založit odbory. Na další soustředění se budeme těšit na podzim, kdy budeme zvát nejlepší řešitele z druhé poloviny tohoto ročníku, máte tedy poslední možnost zlepšit si své umístění.

Body se vám budou hodit i k získání diplomu úspěšného řešitele, za který můžete požádat o odpuštění přijímaček na Matfyz. Pokud již maturujete a chystáte se na vysokou školu (ať už na MFF nebo jinam), rádi Vás přivítáme v našem organizátorském týmu. Na ostatní řešitele se těšíme v dalším ročníku s dalšími úlohami a akcemi.

Pěkné prázdniny a maturantům hodně štěstí u maturit

Organizátoři

Zadání VI. série

Termín odeslání: 14. 05. 2024 23.59

Úloha VI.1 ... balónková podle Martina — 3 body

Auto stojí na rovné silnici, přičemž uvnitř něj je uvázaný balónek s héliem, který se volně vznáší. Najednou auto začne akcelerovat se zrychlením $a = 5{,}0\,\mathrm{km{\cdot}min^{-2}}$. O jaký úhel bude balónek vychýlený oproti svislici? Kterým směrem se vychýlí?

Úloha VI.2 ... bombardovaný organizátor — 3 body

Odhadněte, kolik antineutrin vytvořených v českých jaderných elektrárnách projde tělem průměrného organizátora FYKOSu za jednu poradu k soustředění. Porada trvá 4 hodiny a probíhá v desátém patře v budově Matfyzu v areálu Trója.

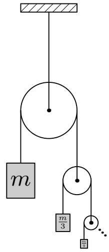
Úloha VI.3 ... ponorková choroba — 5 bodů

Ponorka s objemem $V = 6\,\mathrm{m^3}$, pevnými stěnami z uhlíkových vláken zanedbatelné tloušťky a vnitřní teplotou $t = 20\,\mathrm{^\circ C}$ se ponořila do hloubky $d = 3\,\mathrm{km}$. Najednou přestaly stěny držet a ponorka se smrštila. Jaká v ní bude teplota?

Předpokládejte, že se ponorka neroztrhla, ale smrštila (i když z praxe víme, že nejde o realistický předpoklad) a též, že pasažéři a náklad ponorky působí jen zanedbatelným odporem proti smrštění (jedná se o realistický předpoklad).

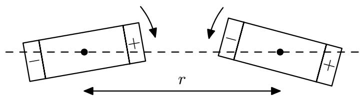
Úloha VI.4 ... nekonečné kladky — 7 bodů

Mějme nekonečnou soustavu nehmotných kladek jako na obrázku, kde hmotnost každého dalšího závaží je třetinou hmotnosti předchozího. S jakým zrychlením se bude pohybovat první závaží o hmotnosti m?



Úloha VI.5 ... kmitající magnety — 10 bodů

Mějme dva identické dipólové magnety, které upevníme tak, že se mohou bez tření otáčet ve stejné rovině. Jejich osy otáčení jsou tedy rovnoběžné a magnety leží v jedné rovině. Když magnety mírně vychýlíme z rovnovážné polohy, začnou kmitat. Najděte vlastní módy těchto kmitů a spočítejte jejich frekvence. Diskutujte, jak bude vypadat pohyb magnetů pro obecnou počáteční výchylku (tento případ už tedy nemusíte počítat). Magnety mají magnetický moment m, moment setrvačnosti kolem osy otáčení J a vzájemná vzdálenost jejich středů je r.



Úloha VI.P ... uvařit oceán — 10 bodů

Jak dlouho by trvalo ohřát světový oceán na teplotu varu? Uvažujte různé zdroje energie, ale jen takové, které jsou dostupné na Zemi (včetně slunečního záření).

Úloha VI.E ... koligativní vlastnosti roztoků — 12 bodů

Změřte kryoskopickou konstantu, tedy konstantu úměrnosti teploty tání roztoku na jeho molalitě. Tuto konstantu určete pro několik roztoků a ověřte třetí Raoultův zákon, který říká, že hodnota konstanty nezávisí na rozpouštěné látce, ale pouze na rozpouštědle.

Úloha VI.S ... osvetlené jednotky — 10 bodů

1. Kolmo nad stredom stolu sa nachádza izotropný (jeho vlastnosti nezávisia na smere) zdroj svetla. Stred stola je osvetlený $E_1 = 500\,\mathrm{lx}$. Na okraj stola vo vzdialenosti $R = 0{,}85\,\mathrm{m}$ od stredu dopadá osvetlenie $E_2 = 450\,\mathrm{lx}$. Ako ďaleko od stredu stola sa svetelný zdroj nachádza? Akú má svietivosť?

2. Odmerajte svietivosť vašej obľúbenej lampičky pomocou jednej z vizuálnych fotometrických metód spomenutých v seriáli. Ako jednotku svietivosti použite čajovú sviečku z bieleho parafínu. Nezabudnite svoju experimentálnu zostavu popísať a priložiť fotografiu alebo schému. S akou presnosťou sa vám podarilo určiť výsledok?

3. Zostavme „Zemskú“ sústavu jednotiek využitím hodnôt priemernej hustoty Zeme, štandardného atmosférického tlaku na hladine mora, štandardného tiažového zrýchlenia a magnetickej indukcie meranej na južnom magnetickom póle Zeme $B_0 = 67\,\mu\mathrm{T}$. Vypočítajte hodnoty sekundy, metra, kilogramu a ampéru v tomto systéme a ďalej určite hodnoty rýchlosti svetla, Planckovej konštanty, gravitačnej konštanty a permitivity vákua v Zemských jednotkách.

Řešení V. série

Úloha V.1 ... anexe Kaliningradu

3 body; průměr 2,62; řešilo 74 studentů

Velitel operace převzetí ruské enklávy si hoví ve svém rekreačním člunu ve tvaru kvádru s plochou podstavy S a výšce H, když v tom diverzní skupina prorazí na dně Viselského zálivu přímo pod ním díru do alkoholovodu – potrubí přivádějící do Královce z Budějovic kvalitní českou nedostatkovou surovinu o hustotě ρ_B. Zjistěte, za jakých podmínek se člun potopí, jestliže před nehodou byl ponořen do hloubky h a vrstva piva na hladině po nehodě je Δh.

Adam má bujnou fantazii, ale obcházet fyziku s ní nechce.

Primární podmínka, která není v zadání explicitně zmíněna, ale musí být splněna, je $\rho_\mathrm{B} < \rho$, kde ρ_B je hustota piva a ρ hustota vody. V zadání je totiž řeč o vytvoření vrstvy piva na vodě, takže jeho hustota musí být nižší než hustota vody.

Protože člun na počátku určitě plul po hladině, musí být jeho horní okraj nad hladinou vody, nutně tedy musí platit $H > h$, jinak by dovnitř natekla voda. Objem ponořené části v takovém případě je Sh, takže podle Archimédova zákona působí na člun směrem vzhůru vztlaková síla o velikosti $F_\mathrm{v} = Sh\rho g$, kde g je tíhové zrychlení. Hmotnost celé lodi i s nákladem a posádkou musí být $m = Sh\rho$, neboť se její tíhová síla vyrovnala právě se silou vztlakovou.

Jakmile se na hladině ustanoví vrstva piva, musíme vztlakovou sílu rozdělit na dvě části – tu od části lodi ponořené v pivu a tu od části lodi, která je ještě ponořená ve vodě. Samozřejmě, pokud po nehodě platí $\Delta h > H$, pak je člun potopen pouze v pivu. V takovém případě je limitujícím faktorem hustota piva – pokud je příliš nízká, člun se potopí. Hraniční případ nastane při rovnosti tíhové a vztalkové síly v situaci, kdy je člun potopen až po svůj horní okraj, tedy hloubka ponořené části je H

$$mg = HS\rho_\mathrm{B} g \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_\mathrm{B}}{\rho} = \frac{m}{HS} = \frac{h}{H}\,.$$

Pokud je tloušťka vrstvy piva větší než výška člunu a zároveň je hustota piva nižší než $\rho h/H$, pak je vztlaková síla menší než tíhová a člun se potopí.

Obtížnější situace nastane, pokud $\Delta h < H$. Stále se ovšem může stát, že člun bude ponořen pouze v pivu. V takovém případě musí být hloubka ponořené části menší než Δh, takže není možné, aby se člun ponořil. Musíme se nyní proto zaměřit na případ, že část loďky bude ponořena i ve vodě.

Vztlakovou sílu tedy rozdělíme na dvě části podle druhu kapaliny a objemu, který v tom kterém druhu loďka zabírá. Dostáváme velikost vztlakové síly jako

$$F_\mathrm{v} = S\left(\Delta h \rho_\mathrm{B} + \rho h'\right) g\,,$$

kde h' je vzdálenost od rozhraní vody s pivem ke spodu člunu. Aby se loďka potopila, musí do ní natéct voda zeshora, tedy musí platit $\Delta h + h' = H$, a zároveň musí být tíhová síla loďky pořád větší než vztlaková. Dosazením do předchozí rovnice za h' dostáváme

$$mg > S\left(\Delta h \rho_\mathrm{B} + \rho\left(H - \Delta h\right)\right) g \quad \Rightarrow \quad \Delta h \rho_\mathrm{B} + \rho H - \rho \Delta h < h\rho\,.$$

Pokud na jednu stranu rovnice srovnáme hustoty a na druhou vertikální vzdálnosti, dostaneme vztah

$$\frac{\rho_\mathrm{B}}{\rho} < 1 - \frac{H-h}{\Delta h}\,.$$

Už víme, že poměr hustot je menší než 1. Zároveň ale víme, že $H > h$, takže i výraz na pravé straně je menší než 1. Nyní již závisí na konkrétních hodnotách veličin. V limitním případě $\Delta h = H$ dostáváme stejný výraz, jako když jsme předpokládali, že $\Delta h > H$.

Nakonec můžeme konstatovat, že naše výsledky nezávisí ani na ploše podstavy člunu S, ani na tíhovém zrychlení g.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha V.2 ... základní úloha akustiky

3 body; průměr 1,79; řešilo 78 studentů

Adam si umí psát smysluplné poznámky rychlostí v_1. Bohužel jeho přednášející analýzy mluví rychlostí v_2. V přednáškové síni je průvan, který vane ve směru od Adama k přednášejícímu a vzduch se v něm pohybuje rychlostí v_3. Jak rychle a jakým směrem po přímce procházející Adamem a přednášejícím se musí Adam pohybovat, aby si byl vše, co přednášející řekne, schopen přepsat do sešitu?

Adam má rád slovo „smysluplný".

Rýchlosť Adamovho písania v_1 a rýchlosť hovorenia prednášajúceho v_2 si prepíšeme použitím frekvencií. Rýchlosť produkcie (resp. záznamu) slov u je vlastne počet vyprodukovaných (resp. zaznamenaných) slov N za čas T, preto $u = N/T = Nf$, kde f je frekvencia produkcie. Teda rozdiel medzi v_1, v_2 a f_1, f_2 je v násobení konštantou N.

Na to, aby si Adam stihol napísať poznámky šikovne využije Dopplerov jav. Ak sa bude pohybovať v smere od prednášajúceho rýchlosťou v, tak bude počuť prednášajúceho s menšou frekvenciou

$$f_2' = f_2 \frac{(c - v_3) - v}{c - v_3}\,,$$

kde c je rýchlosť zvuku vo vzduchu v pokoji. Nájdeme rýchlosť v, pre ktorú sa frekvencia f_2' rovná frekvencii f_1

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_2 \frac{(c - v_3) - v}{c - v_3}\,,\\
v_1 &= v_2 \frac{(c - v_3) - v}{c - v_3}\,,\\
\frac{v_1}{v_2}(c - v_3) &= (c - v_3) - v\,,\\
v &= (c - v_3)\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right)\,.
\end{aligned}$$

To znamená, že ak si chce Adam stihnúť všetko zapísať tak musí bežať od prednášajúceho rýchlosťou $v \geq (c - v_3)\,(1 - v_1/v_2)$.

Tomáš Tuleja
`tomas.tuleja@fykos.cz`

Úloha V.3 ... bowling

6 bodů; průměr 4,38; řešilo 60 studentů

Jirka hrál s kamarády bowling. Kouli házel tak, že při dopadu na dráhu měla vodorovnou rychlost v_0 a klouzala po dráze bez otáčení. Mezi dráhou a koulí byl však koeficient tření f, a proto se po čase t^* koule začala otáčet bez prokluzování. Určete finální rychlost v^* při tomto rovnovážném stavu, čas t^* a vzdálenost s^*, kterou koule urazí, než dosáhne rovnováhy. Koule je plná, má poloměr r a hmotnost m.

Jirka nevěřil přednášejícímu, tak si vymyslel vlastní úlohu.

Pohyb koule na bowlingové dráze ovlivňuje třecí síla T od podložky. Ta má při tom tu zajímavou vlastnost, že působí buď pokud se bod dotyku s podložkou pohybuje, nebo pokud se nějaká další síla pokouší bod dotyku do pohybu uvést. V obou případech působí proti směru pohybu a její maximální možná velikost je

$$T = F_\mathrm{N} f\,,$$

kde F_N je normálová síla. V našem případě třecí síla působí pouze dokud koule prokluzuje, protože v opačném případě se bod dotyku koule s podložkou nepohybuje a žádná další síla ve směru pohybu na kouli nepůsobí. Dokud koule prokluzuje, máme z druhého Newtonova zákona (nebo z 1. impulsové věty, chcete-li)

$$T = ma\,.$$

Třecí síla zároveň kouli roztáčí, působí totiž momentem síly $M = Tr$. Z druhé impulsové věty pak máme

$$Tr = J\varepsilon\,,$$

kde $J = \frac{2}{5}mr^2$ je moment setrvačnosti koule a ε úhlové zrychlení koule. Máme tedy soustavu dvou rovnic, vyloučením třecí síly dostaneme

$$a = \frac{2}{5}r\varepsilon\,.$$

Víme, že $v \to v^*$ a $\omega \to \omega^*$, přičemž pro kouli, která se kutálí bez prokluzování, platí mezi rychlostí a úhlovou rychlostí koule vztah

$$\omega^* = \frac{v^*}{r}\,.$$

Z pohybových rovnic vidíme, že zrychlení i úhlové zrychlení jsou konstantní (působí konstantní síla i moment síly). Finální rychlosti v^* a ω^* potom spočítáme jako

$$v^* = v_0 - at^*$$
$$\omega^* = \varepsilon t^*\,,$$

kde t^* je doba do rovnováhy. Dosazením $\omega^* = v^*/r$ a $a = \frac{2}{5}r\varepsilon$ získáme

$$\frac{2}{5}v^* = at^*\,,$$

odkud jednoduše

$$v^* = \frac{5}{7}v_0\,.$$

Viděli jsme, že třecí síla je rovna $T = mgf$, dokud platí $v \neq \omega r$. Pro zrychlení tedy máme

$$a = gf\,.$$

Čas t^* pak spočítáme jednoduše jako dobu potřebnou na změnu rychlosti z v_0 na v^*, tedy

$$t^* = \frac{v_0 - v^*}{a} = \frac{2v_0}{7gf}\,.$$

Pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu s počáteční rychlostí v_0 platí

$$s^* = v_0 t^* - \frac{1}{2}a(t^*)^2\,,$$

odkud dosazením předchozích výsledků dostaneme

$$s^* = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{gf}\,.$$

Dráhu bychom mohli také spočítat z práce, kterou vykonala třecí síla. Tato práce se vykonala na překonání tření a na roztáčení koule a je dána rozdílem translačních energií koule na začátku a po dosažení rovnovážného stavu

$$W = Fs^* = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{1}{2}\frac{49-25}{49}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad s^* = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{gf}\,.$$

Jiří Kohl
`jiri.kohl@fykos.cz`

Úloha V.4 ... centrifuga

7 bodů; průměr 4,73; řešilo 44 studentů

Uvažujme centrifugu o délce $L = 30\,\mathrm{cm}$*, ve které jsou v roztoku homogenně rozmístěny malé kulovité částice o poloměru* $r = 50\,\mathrm{\mu m}$ *a hmotnosti* $m = 5{,}5\cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}$*. Hustota roztoku je* $\rho_\mathrm{r} = 1\,050\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ *a jeho viskozita* $\eta = 4{,}8\,\mathrm{mPa\cdot s}$*. Nádoba s roztokem se nachází ve vodorovné pozici a náhle se začne otáčet úhlovou rychlostí* $\omega = 0{,}5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$*. Určete, za jak dlouho se 90 % všech částic dostane na konec centrifugy. Vzájemné srážky a pohyb částic vlivem difúze neuvažujte. Nádoba se otáčí kolem vertikální osy umístěné na jednom z jejích konců.*

Jarda rád vyrábí obohacený uran.

Vzhledem k vysoké hodnotě viskozity a nízkým předpokládaným rychlostem částic v odstředivce uvažujme laminární obtékání částic. Proto se odporová síla bude řídit Stokesovým vztahem

$$F_\mathrm{o} = 6\pi\eta r v\,,$$

kde η je dynamická viskozita prostředí, r poloměr částic a v jejich rychlost.

Na částice dále působí odstředivá síla směrem od středu centrifugy. Nesmíme ale zapomenout ani na vztlakovou sílu, která působí opačným směrem v analogii s ponořováním tělesa do kapaliny v homogenním tíhovém poli. Obecně má odstředivá síla v každém bodě částice jinou velikost, ale protože velikost síly roste se vzdáleností od středu lineárně a díky symetrii částic, můžeme částice považovat za hmotné body. Podobně můžeme argumentovat pro nalezení velikosti vztlakové síly. Jejich rozdíl tak můžeme zapsat jako

$$F_\mathrm{c} = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho_\mathrm{č} - \rho_\mathrm{r}\right)\omega^2 x\,,$$

kde x je vzdálenost od osy otáčení, $\rho_{č}$ je hustota částic, ρ_{r} hustota roztoku a ω je úhlová rychlost otáčení centrifugy. Hustotu částic najdeme z hodnot ze zadání jako $\rho_{č} = 3m/(4\pi r^3) \doteq \doteq 1050{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Pokud by byla hustota částic nižší než hustota roztoku, vztlaková síla by převýšila odstředivou a částice by putovaly směrem ke středu odstředivky.

Dostáváme pohybovou diferenciální rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_{\mathrm{c}} - F_{\mathrm{o}} = \frac{4\pi r^3\left(\rho_{č} - \rho_{\mathrm{r}}\right)\omega^2}{3}x - 6\pi\eta r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - ax = 0\,,$$

kde jsme označili zrychlení jako $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ a rychlost jako $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a pro zkrácení zápisu jsme zavedli konstanty $a = 4\pi r^3\left(\rho_{č} - \rho_{\mathrm{r}}\right)\omega^2/(3m)$ a $b = 6\pi\eta r/m$, přičemž m je hmotnost částic.

Naše rovnice je homogenní diferenciální rovnicí druhého řádu, takže její řešení hledáme ve tvaru

$$x(t) = c_1\exp(\lambda_1 t) + c_2\exp(\lambda_2 t)\,,$$

kde $\lambda_{1,2}$ jsou řešení kvadratické rovnice

$$\lambda^2 + b\lambda - a = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}, \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2}\,.$$

Úlohu je možné dopočítat obecně, můžeme si ale všimnout, že podle hodnot ze zadání $b^2 \gg 4a$, takže ve argumentech exponenciál provedeme Taylorův rozvoj pro odmocninu

$$\lambda_1 = \frac{-b + b\sqrt{1 + \frac{4a}{b^2}}}{2} \approx \frac{-b + b\left(1 + \frac{2a}{b^2}\right)}{2} = \frac{a}{b}, \lambda_2 \approx -\frac{b^2 + a}{b}\,.$$

Exponenciála s argumentem $\lambda_2 t$ však klesá mnohem rychleji, než roste exponenciála s $\lambda_1 t$. Než tedy částice dorazí na konec odstředivky, bude tento člen již zanedbatelný.

Pro jistotu ale najdeme oba koeficienty c_1 i c_2. Nechť má v čase $t = 0$ částice vzdálenost x_0 od středu centrifugy a její rychlost je nulová. Počáteční poloha částice x_0 nám dává podmínku

$$c_1 + c_2 = x_0\,,$$

zatímco její nulová rychlost při začátku procesu vede na rovnici

$$\dot{x}(t) = \lambda_1 c_1\exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 c_2\exp(\lambda_2 t)\,,$$
$$\dot{x}(0) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2\,,$$
$$c_1\frac{a}{b} = c_2\frac{b^2 + a}{b}\,,$$

což nám dává řešení pro koeficienty

$$c_1 = x_0\frac{b^2 + a}{b^2 + 2a}, c_2 = x_0\frac{a}{b^2 + 2a}\,.$$

Je evidentní, že koeficient c_2 je mnohem menší než c_1. Pro ten navíc platí $c_1 \approx x_0$. Díky diskuzi výše je zřejmé, že celý člen s argumentem λ_2 můžeme zanedbat a pro polohu $x(t)$ můžeme psát

$$x(t) = x_0\exp\frac{a}{b}t = x_0\exp\frac{2r^2\left(\rho_{č} - \rho_{\mathrm{r}}\right)\omega^2}{9\eta}t\,.$$

Tato rovnice platí pro každou částici s počáteční polohou x_0. Částice, které jsou blíže ke středu, se na konec dostanou později.

Hledaný čas tedy dostaneme jako dobu, za kterou se na konec dostane částice z polohy $x_0 = L/10$, protože je evidentní, že čím blíže byla částice ke konci trubice na začátku procesu, tím rychleji se k jejímu konci dostane. Protože byly částice v trubici na začátku rozděleny homogenně, tak 90 % se nachází za pozicí $L/10$ od středu otáčení. Proto potřebujeme zjistit čas přesunu právě z tohoto bodu. Konec leží ve vzdálenosti $x = L$, takže hledaný čas je

$$T = \frac{9\eta}{2r^2\left(\rho_{\check{c}} - \rho_{\mathrm{r}}\right)\omega^2} \ln 10 \doteq 2\,200\,\mathrm{d}\,.$$

Potřebný čas je tedy asi 2 200 d, což je přes pět a půl roku.

Můžeme si všimnout, že toto řešení je řešením rovnice

$$b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax\,,$$

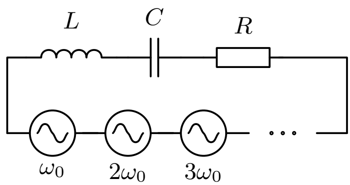
tedy to odpovídá situaci, kdy jsme v původní diferenciální rovnici úplně zanedbali člen se zrychlením. Jelikož je člen u odporové síly velký oproti členu a, pak odporová síla vždy velmi rychle vyrovnává odstředivou a tělíska tak zrychlují pouze velmi pomalu.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha V.5 ... ladíme obvod

9 bodů; průměr 1,64; řešilo 22 studentů

Uvažujme sériově zapojený obvod s rezistorem o odporu R, cívkou a kondenzátorem s kapacitou C. Sériově k těmto prvkům jsou zapojeny zdroje střídavého napětí vždy se stejnou amplitudou U, které se ovšem liší svou frekvencí, která je $n\omega_0$, kde n je přirozené číslo. Jaká může být frekvence ω_0, abychom dokázali najít cívku s takovou indukčností L, aby na rezistoru byla napětí s frekvencí jinou než $N\omega_0$ potlačena alespoň o 90 %? N je předem známé přirozené číslo (tj. hodnota ω_0 na něm může záviset) a napětí s frekvencí $N\omega_0$ naopak více než o 90 % potlačit nechceme.



Jarda chtěl mít v obvodu co nejvíce různých zdrojů.

Podívejme se nejprve na jednodušší situaci. Pro napětí na rezistoru v sériovém RLC obvodu s impedancí z_n se zdrojem napětí o průběhu $U_n = U\sin(n\omega_0 t)$ platí

$$U_R = IR = \frac{U}{|z|}R = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 c}\right)^2}}U\,.$$

Chceme-li, ať je napětí na tomto rezistoru utlumeno alespoň o 90 %, musí platit $U_R \leq \alpha U$ pro $\alpha = 0{,}1$.

Zapojíme-li nyní do obvodu více zdrojů jako v zadání, bude celkové napětí dáno jejich superpozicí. Z lineárního chování RLC obvodu ale plyne, že můžeme napětí o různých frekvencích řešit zvlášť – pro každé si spočítáme impedanci a dle vztahu výše odvodíme dílčí napětí na rezistoru.

Podmínka ze zadání pak tedy říká, že pro všechna $n \neq N$ musí platit

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 c}\right)^2}} \leq \alpha \tag{1}$$

a zároveň

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(N\omega_0 L - \frac{1}{N\omega_0 c}\right)^2}} > \alpha \,. \tag{2}$$

Nechť nyní $n \neq N$ a řešme nerovnici (1):

$$\left(\frac{R}{\alpha}\right)^2 \leq R^2 + \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C}\right)^2 ,$$

$$R\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \leq \left|n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C}\right| , \tag{3}$$

odkud

$$L \in \mathbb{R}^+ \setminus \left(\frac{1}{n^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{n\omega_0}, \frac{1}{n^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{n\omega_0}\right) ,$$

kde $A = R\sqrt{1/\alpha^2 - 1}$ a $n \neq N$; pro úplnou korektnost také zmiňme, že množinou $\mathbb{R}^+$ formálně nerozumíme množinu kladných reálných čísel, ale množinu přípustných hodnot indukčností cívek (rozdíl je v jednotce). Analogicky také vyřešíme rovnici (2), odkud dostaneme

$$L \in \left(\frac{1}{N^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{N\omega_0}, \frac{1}{N^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{N\omega_0}\right) .$$

Pokud pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$l_n = \frac{1}{n^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{n\omega_0} ,$$

$$p_n = \frac{1}{n^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{n\omega_0} ,$$

a $J_n = (l_n,\, p_n)$ interval s těmito krajními body, můžeme podmínku ze zadání přepsat jako

$$L \in \left[\mathbb{R}^+ \cap J_N\right] \setminus \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq N}} J_n \,.$$

Toto můžeme interpretovat tak, že ve zkoumaném systému intervalů J_n s krajními body l_n a p_n zjišťujeme, kdy J_N obsahuje kladnou hodnotu L, kterou zároveň neobsahuje žádný z intervalů J_n pro $n \neq N$.

Budeme nyní tvrdit, že umíme nalézt vyhovující L právě tehdy, když $p_{N+1} < l_{N-1}$. Za tímto účelem učiníme několik pozorování.

1. Posloupnost p_n je tvořena kladnými čísly a monotónně klesá k nule.
2. Posloupnost l_n taktéž konverguje k nule, navíc zřejmě od nějakého n_0 vždy budou její členy záporné.

3. Je-li ω_0 takové, že $l_{N-1} \leq 0$, pak nutně z monotonie p_n bude platit

$$\mathbb{R}^+ \cap (l_{N-1},\, p_{N-1}) \supseteq \mathbb{R}^+ \cap (l_N,\, p_N)\,,$$

tedy nelze splnit podmínku ze zadání. Proto nás budou zajímat takové frekvence ω_0, při kterých platí $l_{N-1} > 0$.

4. Podívejme se, kdy je posloupnost l_n monotónní. Po spojitém rozšíření definičního oboru[1] můžeme psát

$$0 > \frac{\mathrm{d}l_n}{\mathrm{d}n} = \frac{1}{n^2\omega_0}\left(A - \frac{2}{n\omega_0}\right) \quad\iff\quad n < \frac{2}{\omega_0 CA}\,,$$

což je speciálně splněno, platí-li $l_{n+1} > 0$. Z toho důvodu je posloupnost l_n klesající, dokud jsou její hodnoty kladné.

5. Pokud tedy platí $p_{N+1} < l_{N-1}$, má interval $(p_{N+1},\, l_{N-1})$ neprázdný průnik s intervalem J_N. V tomto průniku můžeme zvolit L, to bude tedy prvkem intervalu J_N, ale protože $L > p_{N+1} > p_{N+2} > \dots$, nebude prvkem intervalů J_{N+1}, J_{N+2} ani následujících. Stejně tak $0 < L < l_{N-1} < l_{N-2} < \dots < l_1$, tedy není ani prvkem intervalů J_1 až J_{N-1}.

6. Pokud naopak platí $p_{N+1} \geq l_{N-1}$, máme též $l_{N+1} < l_N < l_{N-1} \leq p_{N+1} < p_N < p_{N-1}$, tedy

$$J_N \subsetneq J_{N-1} \cap J_{N+1}\,,$$

tedy podmínku ze zadání nelze splnit.

Díky všemu výše uvedenému tedy víme, že musí platit $p_{N+1} < l_{N-1}$, pišme tedy

$$\frac{1}{(N+1)^2\omega_0^2 C} + \frac{A}{(N+1)\omega_0} < \frac{1}{(N-1)^2\omega_0^2 C} - \frac{A}{(N-1)\omega_0}\,,$$

$$\omega_0 A\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N-1}\right) < \frac{1}{C}\left(\frac{1}{(N-1)^2} - \frac{1}{(N+1)^2}\right),$$

$$\omega_0 < \frac{2}{AC}\frac{1}{N^2-1}\,,$$

což je požadovaná podmínka.

Nakolik je uvedené řešení spíše matematické, uvedeme ještě trochu fyzikální intuice. RLC obvod má svou rezonanční frekvenci a čím více se frekvence zdroje liší od této rezonanční frekvence, tím více bude utlumená. Proto stačí kontrolovat pouze utlumení dvou sousedních frekvencí – protože pokud dostatečně utlumíme je, budou napětí s frekvencemi ještě vzdálenějšími od rezonanční frekvence obvodu utlumené ještě více (toto je přesně ona monotónnost, kterou jsme několikrát zmiňovali výše). Hodnota L tedy bude volená tak, aby rezonanční frekvence $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ byla blízko $N\omega_0$. Fyzikálnější přístup, kdy předpokládáme známý tvar rezonanční křivky, by pak mohl vypadat například takto: Útlum RLC obvodu podle dané frekvence vyjadřuje rezonanční křivka, která má jedno maximum v rezonanční frekvenci, jejíž šířka je určena parametry obvodu. Šířku křivky v bodě 90% útlumu můžeme vyjádřit z rovnice (3).

[1] abychom mohli derivovat

S využitím substituce $A = R\sqrt{1/\alpha^2 - 1}$ dostáváme pro krajní body s uvážením pouze kladných frekvencí

$$\omega_1 = \frac{-AC + \sqrt{A^2C^2 + 4LC}}{2LC}\,,$$
$$\omega_2 = \frac{AC + \sqrt{A^2C^2 + 4LC}}{2LC}\,.$$

Vzdálenost mezi nimi $\Delta\omega = A/L$ pak musí být menší než $2\omega_0$, aby v intervalu s útlumem menším než 90 % byla pouze frekvence $N\omega_0$ a ne frekvence jiných zdrojů. Z toho usuzujeme, že hledáme hranici pro ω_0, kdy sousední frekvence $(N-1)\omega_0$ a $(N+1)\omega_0$ jsou právě mezní frekvence ω_1 a ω_2. Cílová frekvence $N\omega_0$ bude tedy v tomto případě přesně uprostřed intervalu, tedy průměrem ω_1 a ω_2

$$N\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\sqrt{A^2 + C^2 + 4LC}}{2LC} = \sqrt{\frac{A^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}\,.$$

Z tohoto vztahu nyní vyjádříme vhodnou indukčnost (volíme kladný výsledek)

$$0 = 4L^2CN^2\omega_0^2 - 4L - A^2C\,,$$
$$L = \frac{1 + \sqrt{1 + A^2C^2N^2\omega_0^2}}{2N^2\omega_0^2C}\,.$$

Dosazením indukčnosti do podmínky $\Delta\omega < 2\omega_0$ dostáváme

$$2\omega_0 > \frac{A}{L} = \frac{2N^2\omega_0^2CA}{1 + \sqrt{1 + A^2C^2N^2\omega_0^2}}\,,$$
$$\sqrt{1 + A^2C^2N^2\omega_0^2} > N^2\omega_0CA - 1\,,$$
$$1 + A^2C^2N^2\omega_0^2 > N^4\omega_0^2C^2A^2 - 2N^2\omega_0CA + 1\,,$$
$$AC(1 - N^2)\omega_0 > -2\,,$$
$$\omega_0 < \frac{2}{AC}\frac{1}{N^2 - 1}\,.$$

Dostáváme tedy stejný výsledek jako předchozím postupem.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Kateřina Rosická
kacka@fykos.cz

Úloha V.P ... CERN na Merkur? 10 bodů; průměr 6,46; řešilo 35 studentů

Řešení této úlohy naleznete již brzy na našem webu: https://fykos.cz/.

Úloha V.E ... mazlavá 12 bodů; průměr 8,63; řešilo 38 studentů

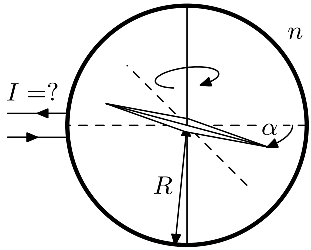
Řešení této úlohy naleznete již brzy na našem webu: https://fykos.cz/.

Úloha V.S ... míňame elektrinu

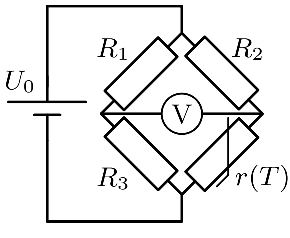
10 bodů; průměr 7,26; řešilo 31 studentů

1. *Hlinikáreň ročne vyprodukuje* 160 000 t *hliníka, ktorý sa vyrába elektrolýzou z oxidu hlinitého pomocou jednosmerného napätia* $U = 4{,}3\,\mathrm{V}$*. Určte koľko blokov jadrovej elektrárne s čistým elektrickým výkonom* $W_0 = 500\,\mathrm{MW}$ *zodpovedá energii spotrebovanej hlinikárňou.*

2. *Na tangentový galvanometer s* n *závitmi s polomerom* R *privedieme jednosmerný prúd o veľkosti* I*. Strelka kompasu sa vychýli o uhol* α *z rovnovážnej polohy. Odvoďte vzťah potrebný pre určenie pretekajúceho prúdu.*



3. *Meranie teploty* T *pomocou termistora na určenie jeho odporu* $r(T)$ *využíva Wheatstonov mostík s tromi odpormi o známych hodnotách* R_1, R_2, R_3*. Aké napätie* $U(T)$ *nameriame na voltmetri uprostred mostíka?*



4. *V druhej polovici minulého storočia sa používali konvenčné elektrické jednotky založené na fixovaní hodnôt frekvencie hyperjemného prechodu cézia* $\nu_{\mathrm{Cs}} = 9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$*, von Klitzingovej konštanty* $R_{\mathrm{K}} = 25\,812{,}807\,\Omega$ *a Josephsonovej konštanty* $K_J = 483\,597{,}9\cdot 10^9\,\mathrm{Wb}^{-1}$*. Určte hodnotu coulomba* $1\,\mathrm{C}$ *vyjadreného pomocou týchto konštánt.*

Dodovi se vybily baterky.

Úloha 1

V seriálu byl uvedený známý Faradayův zákon elektrolýzy ve tvaru

$$M = \frac{QM_{\mathrm{Al}}}{F\nu}\,,$$

kde M je hmotnost vyloučeného hliníku za čas $t = 1\,\mathrm{rok}$, Q je přenesený náboj za tento čas, $F \doteq 96\,500\,\mathrm{C{\cdot}mol^{-1}}$ je Faradayova konstanta a ν je počet přenesených elektronů na jednu reakci.

Atomy hliníku v čistém stavu mají oxidační číslo nulové, zatímco atomy hliníku v oxidu hlinitém mají oxidační číslo rovno 3, jak jde poznat z názvu a je vidět z chemického zápisu sloučeniny

$$\mathrm{Al_2}^{\mathrm{III+}}\mathrm{O_3}^{\mathrm{II-}} \,.$$

Právě změna oxidačního čísla v tomto případě vyjadřuje počet elektronů přenesených pro vyloučení jednoho atomu hliníku, takže $\nu = 3$.

V první rovnici položíme $M = 160\,000\,\mathrm{t}$ jako hmotnost vyrobeného hliníku za jeden rok. Na to bylo potřeba přenést náboj $Q = 3MF/M_\mathrm{m}$, což si vyžádalo práci

$$W_Q = QU = \frac{3MF}{M_\mathrm{Al}}U \doteq 7{,}4 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J}\,,$$

kam jsme dosadili molární hmotnost hliníku $M_\mathrm{Al} \doteq 0{,}027\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$.

Jeden blok jaderné elektrárny s čistým elektrickým výkonem $W_0 = 500\,\mathrm{MW}$ za jeden rok stálého provozu vyrobí

$$W_\mathrm{e} = W_0 t = 15{,}8 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J}\,,$$

kde $t = 1\,\mathrm{rok} \doteq 31{,}5\,\mathrm{Ms}$.

Porovnáním těchto dvou výsledků dostaneme, že je pro provoz hliníkárny potřeba

$$\frac{W_Q}{W_\mathrm{e}} \doteq 0{,}47$$

bloku jaderné elektrárny. Na Slovensku se nachází hliníkárna podobné velikosti a v plném provozu opravdu spotřebovává několik procent celkové produkce elektřiny v zemi.

Úloha 2

Jak bylo vysvětleno v seriálu, spoléhá se tangentový galvanometr na porovnání magnetického pole Země a pole vytvořeného proudem v závitech. Střelka se vychýlí vždy podél magnetických siločar. Na začátku je nutné zkalibrovat přístroj tak, aby střelka směřovala v rovině cívek, v tomto případě je zorientovaná pouze podél siločar magnetického pole Země. Jeho velikost označme jako B_Z, přičemž na Zemi se pohybuje v řádu desítek T.

Jakmile zapneme proud v cívkách, vznikne kolem vodičů magnetické pole. Zajímá nás jeho hodnota uprostřed cívek, kde se nachází střelka, a také jeho směr. Jeho určení je ale jednoduché – protože je cívka rotačně symetrická, musí pole směřovat kolmo k rovině cívek, jinak by totiž tuto symetrii porušovalo.

Velikost pole v tomto bodě můžeme spočítat podle Biot-Savartova zákona. Podrobný výpočet je proveden například zde[2] nebo zde[3], my zde uvedeme pouze výsledek ve tvaru

$$B_\mathrm{v} = \frac{\mu_0 I\, n}{2R}\,,$$

kde μ_0 je permeabilita vakua a ostatní veličiny jsou označené v zadání.

[2] `http://reseneulohy.cz/395/magneticka-indukce-na-ose-kruhoveho-zavitu`
[3] `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/magnet.pdf`

Střelka se nyní natočí ve směru výslednice obou polí. Ta jsou na sebe kolmá, takže pro úhel α platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B_\mathrm{v}}{B_\mathrm{Z}}\,,$$

což po dosazení dává

$$I = \frac{2R}{n\mu_0} B_\mathrm{Z} \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Pro určení přesné hodnoty protékajícího proudu tedy potřebujeme znát i velikost magnetického pole Země v daném místě měření.

Úloha 3

Voltmetr je elektrické zařízení, které má velmi velký vnitřní odpor, aby jím protékal malý proud a celé měření výrazně neovlivňovalo zbytek obvodu. Proud voltmetrem proto považujme za velmi nízký v porovnání s proudem I_1 ve větvi se rezistory R_1 a R_3 i s proudem I_2 ve větvi s rezistory R_2 a termistoru $r(T)$. Zároveň tedy můžeme tvrdit, že proud I_1 je stejný jak v rezistoru R_1, tak i v R_3, podobně pro rezistory ve druhé větvi.

Protože napětí na koncích obou větví je U, platí podle Ohmova zákona

$$(R_1 + R_3)\,I_1 = U = (R_2 + r(T))\,I_2\,,$$

odkud známe poměr velikostí proudů v obou větvích i jejich velikost.

Úbytek napětí na rezistoru R_1 v první větvi je $R_1 I_1$, úbytek napětí na rezistoru R_2 ve druhé větvi je $R_2 I_2$. Rozdíl mezi těmito hodnotami je rozdíl napětí na voltmetru. Dostáváme tak

$$U(T) = R_1 I_1 - R_2 I_2 = R_1 \frac{U}{R_1 + R_3} - R_2 \frac{U}{R_2 + r(T)} = U\left(\frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_1}} - \frac{1}{1 + \frac{r(T)}{R_2}}\right).$$

Tuto hodnotu napětí naměří voltmetr. Znaménko závisí na tom, jakým směrem ho do obvodu vložíme a na konkrétních hodnotách rezistorů. Aby napětí na voltmetru bylo nulové a protékal jím nulový proud, dostali bychom známou podmínku pro hodnoty odporů $r(T) = R_3 R_2 / R_1$.

Úloha 4

Úloha je jednoduchou aplikací rozměrové analýzy. Prvně si převedeme jednotky všech tří konstant do soustavy SI

$$[\nu_\mathrm{Cs}] = \mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}\,,$$
$$[R_\mathrm{K}] = \Omega = \mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{kg}{\cdot}\mathrm{s}^{-3}{\cdot}\mathrm{A}^{-2}\,,$$
$$[K_\mathrm{J}] = \mathrm{Wb}^{-1} = \mathrm{A}\,{\cdot}\mathrm{s}^2{\cdot}\mathrm{m}^{-2}{\cdot}\mathrm{kg}^{-1}\,,$$

Naším cílem je pomocí vzájemného násobení či umocnění tato tři vyjádření nakombinovat, abychom dostali výsledek s jednotkou A·s. Není příliš složité si všimnout, že stačí spolu vynásobit R_K a K_J a tento součin převrátit, abychom dostali požadovaný výsledek.

Dostáváme tedy

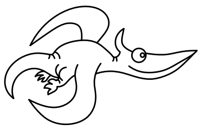
$$Q = \frac{1}{R_\mathrm{K} K_\mathrm{J}} = \left(25\,812{,}807\,\Omega \cdot 483\,597{,}9 \cdot 10^9\,\mathrm{Wb}^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{12{,}483\,02} \cdot 10^{-18}\,\mathrm{C}\,.$$

Odpovědí tedy je, že

$$1\,\mathrm{C} = 12{,}483\,02 \cdot 10^{18}\,\frac{1}{R_\mathrm{K} K_\mathrm{J}}\,.$$

Můžeme doporučit pro převody jednotek elektromagnetických veličin anglickou Wikipedii, kde se např. pro ohm rovnou dozvíme, že je to poměr mezi weberem a coulombem.[4]

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`



Pořadí řešitelů po V. sérii

Kompletní výsledky najdete
na `https://fykos.cz`.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Ohm`

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

/FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.