

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

jaro už klepe na dveře a s ním i pátá série FYKOSu. Čekají vás v ní úlohy z mnoha různých oborů, Jirkovi poradíte jak hrát bowling, podíváte se na ladění střídavých obvodů nebo se zamyslíte, jestli by se vyplatilo postavit CERN na Merkur místo na Zemi. I s touto sérií bude zveřejněn nový díl seriálu, protože však předchází byl zveřejněn pozdě, máte na řešení minulé seriálové úlohy čas až do 19. března.

Už pro vás také pilně chystáme jarní soustředění, které proběhne 20. – 28. dubna v Jedlově v Lužických horách. Pozvaní účastníci by již měli mít pozvánky v mailu. Pokud jste se na soustředění nedostali, nezoufejte, máte možnost zlepšit si své výsledky a dostat se na to podzimní, za které zveme za 4. – 6. sérii tohoto ročníku.

V nedávné době pak proběhlo Fyziklání 2024, které bylo s účastí 256 týmů z 22 zemí světa opět rekordní. Absolutními vítězi se stal tým DARIUSUS z Rumunska, z českých a slovenských soutěžících týmů pak byl nejlepší tým M&M&M&IBDP složený ze studentů Gymnázia Jura Hronca a Gymnázia Grösslingová Bratislava. Všem gratulujeme a doufáme, že jste si soutěž i doprovodný program užili.

Organizátoři



Zadání V. série

Termín odeslání: 09. 04. 2024 23.59

Úloha V.1 ... anexe Kaliningradu

3 body

Velitel operace převzetí ruské enklávy si hoví ve svém rekreačním člunu ve tvaru kvádrů s plochou podstavy S a výšce H , když v tom diverzní skupina prorazí na dně Viselského zálivu přímo pod ním díru do alkoholovodu – potrubí přivádějící do Královce z Budějovic kvalitní českou nedostatkovou surovinu o hustotě ρ_B . Zjistěte, za jakých podmínek se člun potopí, jestliže před nehodou byl ponořen do hloubky h a vrstva piva na hladině po nehodě je Δh .

Úloha V.2 ... základní úloha akustiky

3 body

Adam si umí psát smysluplné poznámky rychlostí v_1 . Bohužel jeho přednášející analýzy mluví rychlostí v_2 . V přednáškové síni je průvan, který vane ve směru od Adama k přednášejícímu a vzduch se v něm pohybuje rychlostí v_3 . Jak rychle a jakým směrem po přímcí procházející Adamem a přednášejícím se musí Adam pohybovat, aby si byl vše, co přednášející řekne, schopen přepsat do sešitu?

Úloha V.3 ... bowling

6 bodů

Jirka hrál s kamarády bowling. Kouli házel tak, že při dopadu na dráhu měla vodorovnou rychlost v_0 a klouzala po dráze bez otáčení. Mezi dráhou a koulí byl však koeficient tření f , a proto se po čase t^* koule začala otáčet bez prokluzování. Určete finální rychlost v^* při tomto

rovnovážném stavu, čas t^* a vzdálenost s^* , kterou koule urazí, než dosáhne rovnováhy. Koule je plná, má poloměr r a hmotnost m .

Úloha V.4 ... centrifuga

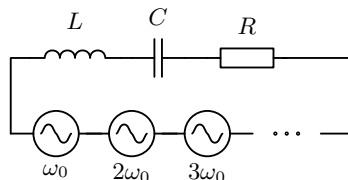
7 bodů

Uvažujme centrifugu o délce $L = 30$ cm, ve které jsou v roztoku homogenně rozmístěny malé kulovité částice o poloměru $r = 50 \mu\text{m}$ a hmotnosti $m = 5,5 \cdot 10^{-10}$ kg. Hustota roztoku je $\rho_r = 1050 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a jeho viskozita $\eta = 4,8 \text{ mPa}\cdot\text{s}$. Nádoba s roztokem se nachází ve vodorovné pozici a náhle se začne otáčet úhlovou rychlostí $\omega = 0,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Určete, za jak dlouho se 90 % všech částic dostane na konec centrifugy. Vzájemné srážky a pohyb částic vlivem difúze neuvažujte. Nádoba se otáčí kolem vertikální osy umístěné na jednom z jejích konců.

Úloha V.5 ... ladíme obvod

9 bodů

Uvažujme sériově zapojený obvod s rezistorem o odporu R , cívkou a kondenzátorem s kapacitou C . Sériově k těmto prvkům jsou zapojeny zdroje střídavého napětí vždy se stejnou amplitudou U , které se ovšem liší svou frekvencí, která je $n\omega_0$, kde n je přirozené číslo. Jaká může být frekvence ω_0 , abychom dokázali najít cívku s takovou indukčností L , aby na rezistoru byla napětí s frekvencí jinou než $N\omega_0$ potlačena alespoň o 90 %? N je předem známé přirozené číslo (tj. hodnota ω_0 na něm může záviset) a napětí s frekvencí $N\omega_0$ naopak více než o 90 % potlačit nechceme.



Úloha V.P ... CERN na Merkur?

10 bodů

Na povrchu Merkuru je atmosféra hustá srovnatelně s vakuovými trubicemi v CERN, ve kterých probíhají experimenty ke zkoumání částicové fyziky. Byl by dobrý nápad přesunout experimenty na Merkur a provádět je na jeho povrchu? Zmiňte co nejvíce argumentů a stručně je popište.

Bonus: Navrhněte, kde by bylo nejlepší postavit urychlovač.

Úloha V.E ... mazlavá

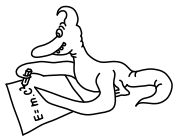
12 bodů

Zadání experimentální úlohy najdete na našem webu.

Úloha V.S ... seriálová úloha

10 bodů

Text nového dílu seriálu a zadání seriálové úlohy najdete na našem webu.



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... let přes Měsíc

3 body; průměr 2,53; řešilo 118 studentů

Pták Fykosák jednoho dne pozoroval oblohu, na které byl Měsíc v úplňku. Přes něj zrovna prolétlo za čas 0,35 s letadlo, přičemž kolmá vzdálenost dráhy jeho letu byla od středu Měsíce $1/3$ poloměru úplňku. Toto letadlo obvykle letí rychlostí $800 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Fykosáka zajímalo, v jaké výšce se letadlo nachází, aby mohl příště letět s ním. Stejně jako on určete tuto výšku.

Jarda se opaloval na zahrádce.

Označme si průměr Měsíce $d \doteq 3475 \text{ km}$ a jeho vzdálenost od Země jako $R \doteq 384\,000 \text{ km}$. Musíme však přepočítat průměr na vzdálenost na Měsíci d' , přes kterou letadlo přeletí (ve vzdálenosti $1/3$ od středu Měsíce). Použijeme Pythagorovu větu, odkud dostaneme

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d'}{2}\right)^2 \Rightarrow d' = \frac{\sqrt{8}}{3} d.$$

Z rychlosti v a času t vypočítáme dráhu letadla s

$$s = vt \doteq 78 \text{ m}.$$

Vyjdeme z toho, že trojúhelník s vrcholem na povrchu Země a protilehlou stranou, kterou tvoří dráha letadla uražená za čas t , má hledanou výšku h a je podobný trojúhelníku povrch Země a délka d' na Měsíci, který má jako svou výšku vzdálenost Měsíc–Země. Potom

$$\frac{R}{d'} = \frac{h}{s} \Rightarrow h = \frac{Rs}{d'} = \frac{3Rvt}{\sqrt{8}d} = \frac{3 \cdot 384\,000 \text{ km} \cdot 222 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,35 \text{ s}}{\sqrt{8} \cdot 3\,475 \text{ km}} \doteq 9\,100 \text{ m},$$

takže se letadlo nachází ve výšce, kde letadla běžně létají.

David Škrob

david.skrob@fykos.cz

Úloha IV.2 ... vystoupili v Hněvčích

3 body; průměr 2,45; řešilo 75 studentů

Tomáš nastoupil do vlakového vagónu ve tvaru kvádrů a řekl si, že si zdřímne. Když se vzbudil, zjistil, že je ve vagónu sám a že je celý vagón zavěšený v geometrickém středu na nákladním jeřábu a točí se okolo osy závěsu úhlovou rychlostí ω . Tomáš si toho nejprve nevšiml, protože seděl právě ve středu vagónu se šířkou d . Když si to uvědomil, tak se zaradoval, protože ho napadlo, že využije jeden ze svých kilogramových etalonů, které nosí pro podobné příležitosti vždy s sebou, na změření délky vagónu. Po pár pokusech se mu podařilo hodit etalon počáteční rychlostí \vec{v} tak, že po dvou otáčkách vagónu etalon dopadl do jeho krajního rohu a rozbil okno. Jakou zjistil délku vagónu L , pokud zanedbal odpor vzduchu?

Tomáš zaspal vo vlaku a vyhodila ho sprievodkyňa.

Na celý problém sa budeme pozerat z pohľadu inerciálnej vzťažnej sústavy spojenej so zemou s počiatkom v sterde vagóna, kde stojí Tomáš a popíšeme si v nej pohyb rohu vagóna a etalónu.

Roh sa pohybuje rovnomerne po kružnici s polomerom r , ktorý je zároveň polovicou uhlopriečky vagóna, a uhlovou rýchlosťou ω . Etalón sa v horizontálnom smere pohybuje rovnomerne priamočiario rýchlosťou v a vo vertikálnom smere zrýchľuje s gravitačným zrýchlením g . Nám bude stačiť riešiť pohyb etalónu v horizontálnom smere, keďže roh vagóna sa vo vertikálnom smere nepohybuje. Vieme, že vagón sa stihol dvakrát otočiť kým došlo k nárazu, teda pre čas nárazu T máme

$$\omega T = 4\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{4\pi}{\omega}.$$

V čase nárazu T musia byť etalón a krajný roh na tom istom mieste, preto za čas T musí prejsť etalón v horizontálnom smere práve vzdialenosť r . To nám dáva hľadanú dĺžku vagóna L

$$v \frac{4\pi}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2},$$

$$4 \left(v \frac{4\pi}{\omega}\right)^2 = d^2 + L^2,$$

$$L = \sqrt{\left(\frac{8\pi v}{\omega}\right)^2 - d^2}.$$

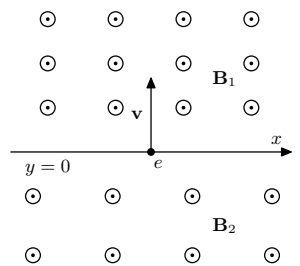
Doplnenie vzoráku Riešenie uvedené vyššie je správne, len za predpokladu, že uvažujeme vodorovný vrh. To sme aj uvažovali pri písaní vzoráku, ale neuvedomili sme si, že sme to explicitne nikde nenapísali. Ak by sme riešili šikmý vrh, tak by sme museli zadať ešte uhol α , ktorý zvierajú počiatočná rýchlosť \vec{v} so zvislou osou. Riešenie by vyzeralo rovnako, len namiesto veľkosti rýchlosti v by sme pracovali s veľkosťou priemetu rýchlosti do horizontálnej roviny, teda $v \sin \alpha$.

Tomáš Tuleja
tomas.tuleja@fykos.cz

Úloha IV.3 ... krok sem, krok tam

6 bodů; průměr 4,85; řešilo 62 studentů

Uvažujme homogenní magnetické pole o indukci B_1 . To se rozprostírá v poloprostoru, který je ohraničen rovinou rozhraní $y = 0$, za kterou je stejně orientované, taktéž homogenní magnetické pole o indukci B_2 . Z roviny rozhraní, kolmo k němu a k siločárám polí, vyletí elektron rychlostí v (jako na obrázku). Určete velikost i směr jeho průměrné rychlosti rovnoběžné s rovinou rozhraní.



Bonus: Uvažujte nyní, že se velikost pole mění lineárně jako $B = B_0(1 + \alpha y)$ a jeho směr je v kladném směru osy z . I v tomto případě určete velikost i směr průměrné rychlosti elektronu rovnoběžné s rovinou rozhraní. Elektron na začátku vypouštíme stejně jako v předchozím případě.

Jarda jde vpřed o krok, ale o dva zpátky.

Na elektron působí magnetická síla o velikosti $F = Bve$. Ta působí kolmo na jeho rychlost, takže se elektron pohybuje po kružnici, přičemž její poloměr určíme z dostředivé síly jako

$$Bve = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{Be}.$$

Je tedy zřejmé, že poloměr pohybu elektronu závisí na velikosti magnetické indukce.

Čas, za který elektron oběhne polovinu kružnice, je

$$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{Be}.$$

Při oběhu poloviny kružnice se elektron dostane do oblasti s odlišným magnetickým polem, kde čas i poloměr jsou odlišné. Pokud je směr magnetických siločar v obou poloprostorech stejný (tedy jak je tomu v zadání), zahýbá elektron stejným směrem a vrací se tak ke svému výchozímu bodu. Za dobu, za kterou se směr jeho rychlosti otočí o 360° , se tedy posune poloha elektronu v rovině rozhraní o

$$2(r_2 - r_1) = 2 \frac{mv}{e} \left(\frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1} \right).$$

Pokud by bylo znaménko magnetických indukcí navzájem opačné, elektron by na rozhraní začal zatáčet v opačném směru, směr jeho rychlosti by se neotočil o 360° a jeden z poloměrů by měl záporné znaménko. Na tvaru rovnic by se však nic nezměnilo. Toto uspořádání však už dále nebudeme uvažovat.

Počáteční vektor rychlosti získá elektron po čase

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{e} \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right).$$

Jeho průměrná rychlost pohybu v rovině rozhraní tak je

$$v_a = 2 \frac{r_2 - r_1}{t_1 + t_2} = \frac{2v}{\pi} \frac{B_1 - B_2}{B_2 + B_1}.$$

Uvažujme směr osy x jako na obrázku v zadání, osu z vystupující z obrázku směrem ke čtenáři a osu y mířící nahoru. Pokud magnetické pole míří po směru osy z jako na obrázku a počáteční rychlost elektronu je v kladném směru osy y , pak se pro $B_1 > B_2$ elektron pohybuje v kladném směru osy x .

Řešení bonusu

Situace je stejná jako v předchozím případě, ale nyní již není pro $\alpha \neq 0$ pohyb elektronu po kružnici. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\alpha > 0$. Pohybové rovnice elektronu jsou

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{e}{m} B_0 (1 + \alpha y) \dot{y}, \\ \ddot{y} &= \frac{e}{m} B_0 (1 + \alpha y) \dot{x}, \end{aligned}$$

kde m je hmotnost elektronu a tečky nad souřadnicemi značí jejich časové derivace. Pro jednodušší zápis zavedeme substituci $eB_0/m = \gamma$. Všimneme si, že první z rovnic můžeme zintegrovat podle času na

$$\dot{x} = -\gamma \frac{1}{2\alpha} (1 + \alpha y)^2 + C,$$

kde C je integrační konstanta. V čase $t = 0$ je elektron v rovině $y = 0$ a jeho x -ová složka rychlosti je nulová, proto $C = \gamma/(2\alpha)$.

Dosazením \dot{x} do druhé pohybové rovnice dostáváme diferenciální rovnici už jenom v proměnné y

$$\ddot{y} = \gamma(1 + \alpha y) \left(-\frac{\gamma}{2\alpha}(1 + \alpha y)^2 + \frac{\gamma}{2\alpha} \right).$$

Vynásobením \dot{y} dostaneme

$$\ddot{y}\dot{y} = -\frac{\gamma^2}{2}(2y + 3\alpha y^2 + \alpha^2 y^3)\dot{y},$$

což můžeme zintegrovat na

$$(\dot{y})^2 = -\gamma^2 \left(y^2 + \alpha y^3 + \frac{1}{4}\alpha^2 y^4 + K \right),$$

kde K je opět integrační konstanta. Z počáteční podmínky platí $K = -v^2/\gamma^2$. Protože na levé straně rovnice je kvadrát, tedy nezáporné číslo, musí platit

$$y^2 + \alpha y^3 + \frac{1}{4}\alpha^2 y^4 - \frac{v^2}{\gamma^2} = \left(\left(1 + \frac{\alpha}{2}y\right)y + \frac{v}{\gamma} \right) \left(\left(1 + \frac{\alpha}{2}y\right)y - \frac{v}{\gamma} \right) \leq 0.$$

Rovnosti nastávají pro řešení rovnic

$$\begin{aligned} \alpha y^2 + 2y + \frac{2v}{\gamma} = 0 &\Rightarrow y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{2\alpha v}{\gamma}}}{\alpha}, y_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{2\alpha v}{\gamma}}}{\alpha}, \\ \alpha y^2 + 2y - \frac{2v}{\gamma} = 0 &\Rightarrow y_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + \frac{2\alpha v}{\gamma}}}{\alpha}, y_4 = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha v}{\gamma}}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Pro $2\alpha v/\gamma > 1$ tak existují dvě reálná řešení, v případě rovnosti jsou tři a jinak jsou kořeny dokonce čtyři.

Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme, že elektron z roviny $y = 0$ vylétá s rychlostí v do směru rostoucího y .

Nejdříve uvažujme, že existují všechny čtyři kořeny. Pak je nerovnost splněna na intervalech $y \in [y_1, y_2]$ a $y \in [y_3, y_4]$. První interval ovšem nevyhovuje počáteční podmínce, kde $y = 0$, takže jej v dalším řešení nemusíme uvažovat. Elektron se totiž do tohoto intervalu z toho druhého dostat nemůže, potřeboval by k tomu vyšší počáteční rychlost.

Nejprve kvalitativně popíšeme, jak se elektron v intervalu $y \in [y_3, y_4]$ chová. Po vypuštění kolmo na $y = 0$ má maximální y -ovou rychlost v . Magnetická síla ovšem jeho dráhu zahýbá až do bodu, kdy jeho y -ová složka rychlosti klesne na nulu (pokud vypouštíme ve směru rostoucího y), tak se tak stane v $y = y_4$. Elektron dále zahýbá zpátky směrem k $y = 0$, a to po trajektorii symetrické k té, po které se dostal do $y = y_4$. Rovinou $y = 0$ proletí opět kolmo na ni rychlostí v , ale v opačném směru, než vylétal. Podobný oblouk udělá i v polorovině $y < 0$. Protože v tomto případě $y_3 > -1/\alpha$, nedostane se elektron do oblasti, ve které by orientace magnetického pole byla opačná, proto magnetická síla zatáčí elektron vždy jen do jednoho směru. Simulaci trajektorie v tomto případě můžete vidět na obrázku 1.

Čas, který elektron letí ve směru rostoucího y , je stejný, jako když letí v opačném směru. Proto můžeme vyjádřit celkový čas T , za který se jeho rychlost vrátí do výchozího stavu, jako

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{v^2 - \gamma^2 y^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right)^2} \Rightarrow T = 2 \int_{y_3}^{y_4} \frac{dy}{\sqrt{v^2 - \gamma^2 y^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right)^2}}.$$

Za tento čas se elektron v ose x posune o

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} = -\gamma y \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right) \Rightarrow X = 2 \int_{y_3}^{y_4} \frac{-\gamma y \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right)}{\sqrt{v^2 - \gamma^2 y^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} y\right)^2}} dy.$$

Nejprve řešíme první integrál. Zavedením substituce $Y = 2\alpha/y$ a následně položením $c = 2\gamma/(\alpha v)$ upravíme na tvar

$$T = \frac{2c}{\gamma} \int_{Y_3}^{Y_4} \frac{dY}{\sqrt{1 - c^2 Y^2 (1 + Y)^2}}.$$

Substitucí $cY(1+Y) = \sin u$ dostáváme $dY = \cos u du / (c(2Y+1))$ a po dosazení $2Y+1 = \sqrt{1 + (4/c) \sin u}$ pak

$$T = \frac{2}{\gamma} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 + \frac{4}{c} \sin u}}.$$

Integrál pro X převedeme na tvar

$$X = -\frac{4}{\alpha} \int_{Y_3}^{Y_4} \frac{cY(1+Y) dY}{\sqrt{1 - c^2 Y^2 (1 + Y)^2}},$$

odkud analogicky dostaneme

$$X = -\frac{2v}{\gamma} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \frac{4}{c} \sin u}} du.$$

Hodnoty integrálů už závisí pouze na parametru c . Rychlost v ose x tak je

$$v_x = \frac{X}{T} = -v \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \frac{4}{c} \sin u}} du}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 + \frac{4}{c} \sin u}}} = v f\left(\frac{2B_0 e}{\alpha m v}\right).$$

Pokud existují pouze dva kořeny rovnice pro \dot{y} , pak $y \in [y_1, y_4]$ a mění se tedy spodní integrační mez z y_3 na y_1 . Nyní ovšem nemůžeme použít substituci za $cY(Y+1)$ tak, jak jsme to udělali v předchozím textu, protože na daném intervalu už zobrazení mezi jednotlivými funkcemi není prosté – pro jedno u můžeme najít více Y .

Můžeme si ovšem všimnout, že funkce $1/\left(\sqrt{1-c^2Y^2(1+Y)^2}\right)$ je symetrická vůči bodu $-1/2$. Dosazením $Y = -1/2 \pm \xi$ totiž opravdu dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1-c^2\left(-\frac{1}{2}-\xi\right)^2\left(1-\frac{1}{2}-\xi\right)^2}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{1-c^2\left(\frac{1}{2}+\xi\right)^2\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^2}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{1-c^2\left(-\frac{1}{2}+\xi\right)^2\left(1-\frac{1}{2}+\xi\right)^2}}. \end{aligned}$$

Stačí nám tedy integrovat od $1/2$ do Y_4 a výsledek vynásobit dvěma. Na tomto intervalu už je substituce prostá, takže celkový čas můžeme vyjádřit jako

$$T = \frac{4}{\gamma} \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}},$$

kde platí $c(-1/2)(1-1/2) = -c/4 = \sin \theta$. Zde už $c < 4$ (viz podmínka pro počet kořenů), takže řešení vždy existuje.

Analogicky najdeme i hodnotu posunu ve směru osy x jako

$$X = -\frac{4v}{\gamma} \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\sin u}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}} du,$$

a tedy v případě, že $2\alpha v/\gamma > 1$ dostáváme průměrnou rychlost

$$v_x = \frac{X}{T} = -v \frac{\int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\sin u}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}} du}{\int_{\theta}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1+\frac{4}{c}\sin u}}} = v g\left(\frac{2B_0 e}{\alpha m v}\right).$$

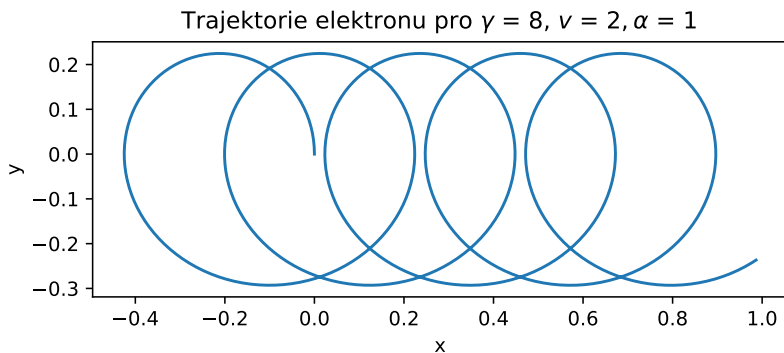
Jak se v tomto případě elektron chová kvalitativně? Po vypuštění udělá podobný oblouk jako v případě $c > 4$, ale na druhé polorovině se dostane do oblasti, kde má magnetické pole opačné znaménko. Magnetická síla tak začne působit druhým směrem. Složka y rychlosti elektronu zase naroste na maximální hodnotu a obkrouží smyčku druhým směrem. Zbytek pohybu je symetrický, akorát se elektron vrací zpět k $y = 0$. Jeho trajektorie tak tvoří jakousi neuzavřenou osmičku. Jednu konkrétní trajektorii můžete vidět na obrázku 3.

Poslední je případ, kdy $2\alpha v/\gamma = 1$. Elektron se dostane na přímkou $y = -1/\alpha$, a to rovnooběžně. Na této přímce je nulová intenzita magnetického pole, na elektron nepůsobí žádná síla a on se tak pohybuje rovnoměrně přímočaře. Jeho průměrná rychlost ve směru x je proto v . Trajektorie je zobrazena na obrázku 2.

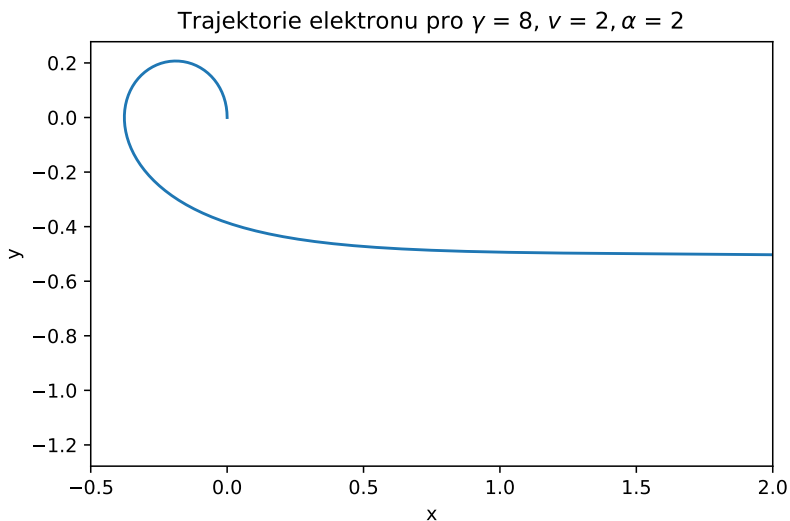
Se zvětšujícím se c klesá rychlost k nule (větší c jde totiž udělat klesající rychlostí v nebo klesajícím gradientem α , takže elektron se více pohybuje po kružnici).

To, že nedokážeme závislosti rychlosti vyjádřit pomocí standardních funkcí, není žádný fyzikální problém, na následující obrázku 4 je tato funkce vykreslena. Směr kladné rychlosti v_x míří do směru rostoucího x .

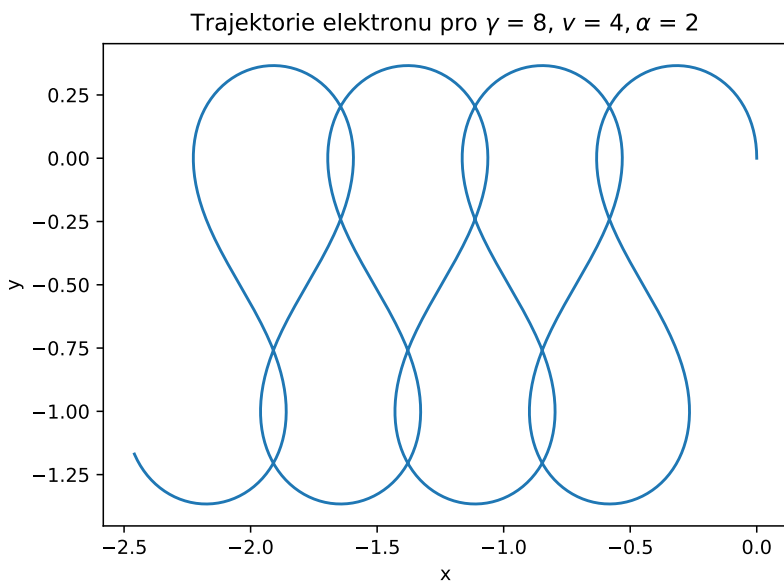
Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz



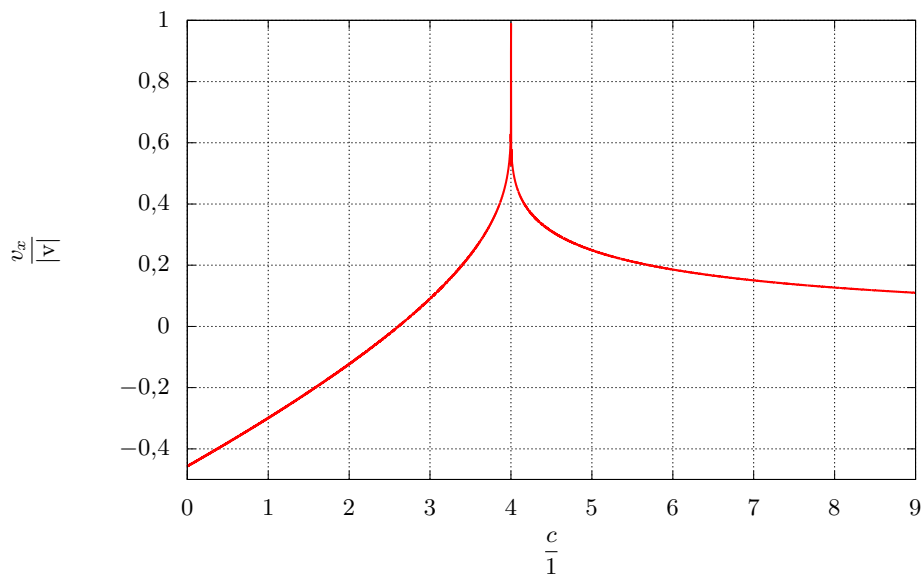
Obrázek 1: Trajektorie elektronu pro parametry $\gamma = 8$, $\nu = 2$ a $\alpha = 1$ v jednotkách SI - odpovídá 4 kořenům.



Obrázek 2: Trajektorie elektronu pro parametry $\gamma = 8$, $\nu = 2$ a $\alpha = 2$ v jednotkách SI - odpovídá 3 kořenům.



Obrázek 3: Trajektorie elektronu pro parametry $\gamma = 8$, $v = 4$ a $\alpha = 2$ v jednotkách SI - odpovídá 2 kořenům.



Obrázek 4: Závislost x -ové složky rychlosti na parametru c . Vyjádřeno v jednotkách v .

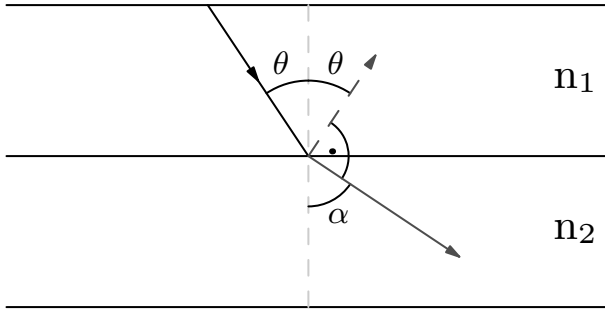
Úloha IV.4 ... dokonalý prechod?

7 bodů; průměr 4,05; řešilo 58 studentů

Z materiálu s indexem lomu n_1 dopadá polarizovaný paprsek na rovinné rozhraní s materiálom o indexu lomu n_2 tak, že po průchodu neztratí na intenzitě. Poté dopadne na rovnoběžné rozhraní s indexem lomu n_3 , přičemž opět projde beze ztrát, a tak dále. Najděte posloupnost n_i , která toto splňuje.

Marek J. potkal Brewsterův úhel.

Najprv sa zameriame na prvú časť zadania, kedy sa polarizovaný lúč zlomí na rozhraní prostredí n_1 a n_2 tak, že neztratí na intenzite. To je možné len pre p-polarizáciu, kedy je vektor elektrickej intenzity rovnobežný s rovinou dopadu a pre špeciálnu voľbu dopadajúceho uhla – Brewsterov uhlo. Ten je daný geometrickou podmienkou, kedy *prípadný* odrazený lúč musí byť kolmý na lomenný lúč, tak ako je znázornené na obrázku.



Obrázek 5: Nákres situace.

Táto skutočnosť vychádza z mikroskopickej predstavy, kedy elektrická intenzita lúča rozkmitá dipóly v látke a keďže elektrická intenzita je kolmá na smer lomenného lúča a dipóly nežiaria v smere kmitania, celá intenzita lúča prechádza rozhraním. Existencia Brewsterovho uhlu tiež plynie z Fresnelových rovníc¹

Označme uhol dopadu ako θ a uhol lomu α . Z vyššie spomenutej geometrickej podmienky máme $\alpha = \pi/2 - \theta$. Snellov zákon nám tak dá pre hodnotu Brewsterovho uhla

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{n_2}{n_1}.$$

Teda počiatočný uhol dopadu lúča v prostredí n_1 je určený, tým je daný aj uhol lomu ($\alpha = \pi/2 - \theta$), čo je vlastne nový uhol dopadu v prostredí n_2 . Na rozhraní n_2 a n_3 , ale znova požadujeme lom bez strát a teda $\pi/2 - \theta$ je nový Brewsterov uhol pre prostredia n_2 a n_3

$$\operatorname{tg}(\pi/2 - \theta) = \frac{n_3}{n_2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{n_1}{n_2},$$

odkiaľ nutne $n_3 = n_1$. Hladná postupnosť je tak opakujúce sa n_1 a n_2 , ktoré môžeme voliť ľubovoľne.

Marek Jankola
marekj@fykos.cz

¹https://cs.wikipedia.org/wiki/Fresnelovy_rovnice

Úloha IV.5 ... malej Jágro

9 bodů; průměr 7,56; řešilo 61 studentů

Řešení této úlohy naleznete již brzy na našem webu: <https://fykos.cz/>.**Úloha IV.P ... efektivní osvětlení**

10 bodů; průměr 6,00; řešilo 52 studentů

Popište základní fyzikální principy jednotlivých způsobů produkce umělého osvětlení. Alespoň u tří vypočítejte jejich účinnost, tedy kolik dodávané energie je skutečně přeměněno na viditelné světlo. Porovnejte se skutečnými daty. *Jarda vyměňoval babiče vypínač od lampičky.*

Fotometrické veličiny

Pro určení, kolik světla daný zdroj vyzařuje, se používá hned několik veličin s vlastními jednotkami. Tyto veličiny souhrnně nazýváme fotometrické, protože se zabývají pouze viditelným oborem světla. I když zdroj výrazně vyzařuje například v infračervené nebo ultrafialové oblasti, mohou být hodnoty fotometrických veličin nízké.

Pro naše potřeby je nejdůležitější fotometrická veličina *svítivost* a její jednotka *kandela*, která nám určuje, kolik viditelného světla zdroj vydává. Kandela je základní jednotkou SI a historicky byla zavedena jako množství světla, které vydává svíčka o daných parametrech. Nyní je ale od roku 2018 definována jako „svítivost světelného zdroje, který v daném směru vyzařuje monochromatické záření o frekvenci 540 THz a jehož zářivost (zářivá intenzita) v tomto směru činí 1/683 wattu na steradián“. Můžeme si všimnout, že definice obsahuje hned několik konstant, čemuž se většinou snažíme vyhnout. Frekvence 540 THz je světlo žluté barvy a má původ v tom, že lidské oko je nejcitlivější právě na tuto frekvenci. Výkon 1/683 W je zde zase proto, aby nová definice byla v souladu s tou předchozí.

Také nás bude zajímat jednotka *světelného toku lumen*, což je jednotka odvozená od kandel. Na rozdíl od ní počítá lumen s celkovým vyzářeným viditelným světlem, které zdroj vyzáří. Důležitou vlastností zdroje je pak poměr světelného toku ku příkonu. Čím vyšší je tento poměr, tím můžeme zdroj považovat za účinnější.

Lux je jednotkou veličiny E_v , která se nazývá *intenzita osvětlení*. Tato fotometrická veličina je definována jako podíl *světelného toku* Φ_v ku ploše, kterou tento tok prochází. Intenzita osvětlení tak má hodnotu v každém bodě prostoru.

Absolutně černé těleso

Žárovka (wolframová) Žárovka svítí díky tomu, že protékající proud rozžhává wolframové vlákno na vysokou teplotu – typicky 2 500 K až 3 300 K. Wolframu se zde využívá kvůli jeho vysoké teplotě tání. Každé těleso o teplotě T vydává tepelné elektromagnetické záření. Celkový vyzářovaný výkon, stejně jako oblast spektra, ve které se nachází maximum vyzářování, však závisí na teplotě. Vztah mezi vlnovou délkou, na které absolutně černé těleso září nejintenzivněji, a jeho termodynamickou teplotou, se nazývá Wienův posunovací zákon a má jednoduchý tvar

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = \frac{2,898 \text{ mm}\cdot\text{K}}{T}.$$

Abychom se s maximem vyzářování dostali alespoň k oblasti viditelného světla, potřebujeme teplotu určitě větší než 1 000 K. Pokud by maximum leželo výrazně jinde než ve viditelném světle, byla by účinnost zdroje (ve smyslu jaký příkon je potřeba na světelný tok) velmi nízká. Teplota sluneční fotosféry se pohybuje okolo 5 800 K, což odpovídá vlnové délce $\lambda_{S,\max} = 500 \text{ nm}$, tedy v oblasti žlutozelené barvy.

Dosud jsme diskutovali pouze vlnovou délku, na které dané těleso září nejvíc. Absolutně černé těleso ale září na všech vlnových délkách λ , přičemž závislost intenzity můžeme vyjádřit pomocí Planckova vyzařovacího zákona, který má tvar

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \cdot \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right)},$$

případně v závislosti na frekvenci

$$u(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1}.$$

Nášim cílem je nalézt, kolik energie je vyzářeno v oblasti viditelného světla, tedy mezi 400 nm a 800 nm. To jednoduše provedeme integrováním Planckova vyzařovacího zákona v uvedených mezích. Tvar integrálu si můžeme matematicky zjednodušit, když provedeme substituci $x = hc/(\lambda kT)$. Dosadíme za λ do zbytku integrandu a za diferenciál $d\lambda$ musíme dosadit z rovnice

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \Rightarrow dx = -\frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda^2} d\lambda \Rightarrow -\lambda^2 \frac{kT}{hc} dx = d\lambda,$$

takže integrace zákona získá tvar

$$\int u(\lambda, T) d\lambda = \int \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \cdot \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right)} d\lambda = -\frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

Provedli jsme takzvanou bezrozměrnou substituci, kdy je exponent nahrazen jedinou bezrozměrnou proměnnou a podle toho je upraven celý výraz. Výhoda tohoto kroku spočívá v jednodušším tvaru integrálu, ale hlavně lépe vidíme závislosti na ostatních fyzikálních veličinách, v tomto případě na teplotě. Výsledek integrálu je bezrozměrné číslo, které závisí pouze na zvoleném intervalu vlnových délek a teplotě. Jedinou nevýhodou je, že musíme přepočítat integrační meze, na druhou stranu jejich hodnota už nebude záviset na zvolené soustavě jednotek, neboť i meze jsou nyní bezrozměrné.

Jelikož nás zajímá účinnost, stačí nám dát podle předchozího odstavce do poměru pouze integrály na zvolených mezích. Pro oblast viditelného světla dosazujeme

$$x_1 = \frac{hc}{kT} \frac{1}{400 \text{ nm}} = 13,35, x_2 = \frac{hc}{kT} \frac{1}{800 \text{ nm}} = 6,67,$$

pro všechny vlnové délky integrujeme od ∞ do 0. Zde je vyzařovaný výkon úměrný přesně čtvrté mocnině teploty, kterou jsme zvolili jako 2700 K.

Dosazením dostáváme

$$\eta = \frac{-\int_{x_1}^{x_2} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}{-\int_{\infty}^0 \frac{x^3}{e^x - 1} dx} = \frac{0,600}{\frac{\pi^4}{15}} = 0,092.$$

Zajímavé je, že integrál ve jmenovateli můžeme spočítat analyticky, pro integrál v čitateli ale musíme využít některý z internetových numerických kalkulátorů, např. WolframAlpha.

Pokud bychom do integračních mezí dosadili teplotu Slunce 5800 K, dostali bychom účinnost asi pětikrát vyšší. Slunce tedy přibližně 50 % svého zářivého výkonu vyzáří ve formě viditelného

světla.² Bohužel nemáme k dispozici vhodný materiál, který by vydržel tak vysokou teplotu, aby mohl zářit s takovou účinností.

Protože lidské oko však vnímá různě citlivě různé vlnové délky, musíme ještě kompenzovat tento jev. To uděláme přenásobením tabulkovými hodnotami (označme $c(\lambda)$)³ pro citlivost oka. Poměr mezi těmito hodnotami je hledaná efektivita

$$\eta = \frac{\int_{400 \text{ nm}}^{800 \text{ nm}} c(\lambda) u(\lambda, 2700 \text{ K}) d\lambda}{\int_0^{\infty} u(\lambda, 2700 \text{ K}) d\lambda} = 0,019,$$

což odpovídá tabulkovému⁴ rozmezí 1 % až 2 %.

Dodejme ještě, že se v žárovkách obvykle používá plnění inertními plyny o nízkém tlaku, což zajišťuje nízký přenos tepla vedením a konvekcí mezi vláknem a stěnami nádoby. Pokud by se žárovka plnila např. kyslíkem, docházelo by k tvorbě oxidu wolframu a jeho rychlému odpařování, což by samozřejmě výrazně snížilo životnost žárovky. V následujícím úseku se ovšem dozvíme, že díky změně plnění žárovky lze zařízení ještě podstatně vylepšit.

Žárovka halogenová Jak jsme viděli v předchozí části, zvýšení teploty blíže k teplotě Slunce výrazně zvyšuje podíl záření ve viditelné oblasti. Halogenová žárovka funguje na stejném principu jako žárovka wolframová, jen s tím rozdílem, že se do plynné náplně baňky přidává halogen. Ten zabraňuje vypařování wolframu z povrchu vlákna a prodlužuje tak délku doby fungování žárovky. Díky speciální náplni lze navíc dosáhnout výrazně vyšších teplot, což, jak jsme viděli už výše, vede ke zvýšení svítivosti a účinnosti žárovky. Při výpočtu použijeme stejný vzorec jako u žárovky, jen změníme teplotu na 3500 K

$$\eta = \frac{-\int_{10.30}^{5.15} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}{-\int_{\infty}^0 \frac{x^3}{e^x - 1} dx} = \frac{1,42}{\frac{\pi^4}{15}} = 0,22.$$

Po započítání citlivosti oka tedy dostáváme

$$\eta = \frac{\int_{400 \text{ nm}}^{800 \text{ nm}} c(\lambda) u(\lambda, 3500 \text{ K}) d\lambda}{\int_0^{\infty} u(\lambda, 3500 \text{ K}) d\lambda} = 0,057.$$

Můžeme si všimnout toho, že je stále docela velký rozdíl mezi těmito dvěma účinnostmi. Tento rozdíl je způsobený tím, že lidské oko vidí nejlépe zelenou barvu a nejhůře červenou a fialovou. Pro halogenovou žárovku je maximum vyzařování v blízkosti hranice viditelného světla (asi 830 nm). Vyzařuje tedy sice hodně viditelného světla, ale velká část tohoto světla je červená, která pro oko hůře zpracovatelná. Na druhou stranu jde ale o výrazné vylepšení vůči klasické wolframové žárovce.

²Mohli bychom říci, že je to poměrně vysoká účinnost. Musíme si ale uvědomit, že nejdříve bylo Slunce a pak až lidské oko. To se proto vyvinulo tak, aby dokázalo analyzovat složky světla v intervalu, kde je intenzita záření ještě poměrně vysoká. Interval viditelného světla je tedy dán nejvyšší intenzitou záření Slunce, nikoli naopak.

³<https://web.archive.org/web/20070927222337/http://www.cvrl.org/database/text/lum/ssv12.htm>

⁴Tabulkové hodnoty pro srovnávání budeme brát z https://en.wikipedia.org/wiki/Luminous_efficacy.

Svíčka

Svíčka je zajímavá z toho důvodu, že byla dlouho používána jako standard pro míru osvětlení. Postupně se pro tento účel používalo mnoho různých „svíček“, ale všechny fungují na stejném principu – mají nějaké palivo, které hoří. Toto hoření vytváří teplo a světlo.

U každého paliva můžeme najít jeho celkovou výhřevnost (kolik je v palivu uloženo energie). Pro náš případ si vybereme parafínovou svíčku, kde čistá energie uvolněná hořením parafínu je $E_{\text{par}} = 43,1 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Dále ještě zjistíme, jak dlouho palivo dokáže udržovat plamen, tedy jak dlouho nám svíčka hoří. Rychlost hoření musíme najít na internetu⁵, kde se dozvíme, že svíčka hoří rychlostí $\dot{m} = 6,3 \text{ g} \cdot \text{h}^{-1}$.

Odtud už můžeme určit účinnost. Nejprve vypočítáme energii spotřebovanou za jednu sekundu, tedy příkon

$$P = E_{\text{par}} \cdot \dot{m} \doteq 75 \text{ W}.$$

Víme, že naše standardní svíčka má svítivost $I = 1 \text{ cd}$. Pokud ji budeme pro jednoduchost považovat za sféricky symetrický všesměrový zdroj, můžeme najít její celkový světelný tok. Předpokládáme, že svíčka svítí všemi směry stejně, vynásobíme tedy svítivost počtem steradiánů v kouli ($4\pi \text{ sterad}$), tudíž je celkový světelný tok $P' = 12,56 \text{ lm} = 0,0184 \text{ W}$ ⁶. Teď už jednoduše vypočítáme účinnost jako poměr výkonu a příkonu

$$\eta = \frac{P'}{P} = \frac{0,0184 \text{ W}}{75 \text{ W}} = 0,024 \%.$$

V účinnosti jsme o dva řády níže oproti žárovkám. Z tohoto hlediska tedy vidíme, že svíčky nejsou příliš dobrý zdroj světla. Hoření totiž vytváří hlavně teplo, které u svíčky není nijak zachycováno a volně se přesouvá do okolí. Děje v okolí knotu jsou na popis složitější než u klasických žárovek, neboť zde není kontrolována vyčerpaná atmosféra a dochází k mnoha chemickým reakcím. Právě přístup kyslíku je pro hoření svíčky (oxidaci paliva) klíčový. V okolí teplého knotu dokonce dochází k ionizaci molekul plynu. Proto jsme se při popisu omezili hlavně na experimentální určení účinnosti.

Přechod mezi energetickými hladinami atomového obalu

Zářivka V zářivkách se využívá rtuťových par o nízkém tlaku na vytvoření doutnavého výboje, který vytváří UV světlo. V zapnutém stavu se plyn uvnitř ionizuje, takže v zářivce vznikne plazma, které vede elektrony a nabitě částice mezi elektrodami na koncích zářivky. Usměrněným pohybem částic dochází k jejich kolizím, což vede k excitacím a ionizacím elektronů v atomových obalech. Při opětovném přechodu do základního stavu se emituje záření. V závislosti na energiích je pak emitováno záření o příslušných vlnových délkách. Dalším zdrojem záření je tzv. brzdné záření, které vzniká při změně rychlosti elektronů v zářivce.

Pro zažehnutí doutnavého výboje je potřeba ještě další elektronika, protože při vypnutém stavu je počet nabitých částic v objemu plynu nízký. Při dosažení určitého napětí ale může vzniknout lavinová ionizace, díky které se výboj dokáže samostatně udržet i bez startovací elektroniky.

UV světlo, které vzniká v objemu plynu, následně dopadá na povrch zářivky, který je pokrytý vrstvou luminoforu. Ten toto záření pohltí a následně vyzáří ve formě bílého viditelného

⁵https://tsapps.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=101159

⁶<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/vision/lumpow.html>

světla. Také se používají jiné náplně místo rtuti. Například neon (či jiný inertní plyn) v klasických neonových banerech, či sodík, který se používal jako nejlevnější zdroj světla na pouliční osvětlení. Zrovna sodík září přímo žlutým světlem, proto na vnitřních površích zářivek není potřeba luminofor. V dnešní době jsou však postupně zářivky nahrazovány LED diodami.

Obloukový výboj Kromě doutnavého výboje v zářivkách se ještě můžeme s užitím plazmatu ke svícení setkat ve zdrojích osvětlení, které pracují s obloukovým výbojem. Při něm je vzdálenost elektrod kratší, je mezi nimi nižší napětí, ale prochází zde mnohem vyšší elektrický proud a teplota dosahuje několika tisíc kelvinů (proto je možné používat obloukový výboj na svařování kovů). Dříve se používal k pouličnímu osvětlení, přičemž k výraznému zdokonalení těchto obloukových lamp přispěl koncem 19. století i český vynálezce František Křížík. Dnes se obloukový výboj jako zdroj světla využívá například v projektorech v kinech.

LED Funguje na principu diody, kde se setkávají polovodiče dvou různých typů. V prvním přiblížení má polovodič typu N valenční pás na vyšší energetické hladině než polovodič typu P. Při přechodu elektronu z vodivé vrstvy typu N do valenční vrstvy typu P ztratí elektron část své energie, kterou vyzáří v podobě záření. Hodnota vyzářené energie je daná materiálem obou typů polovodičů, konkrétní dioda tak září vždy jen v úzkém rozsahu vlnových délek. Pro emisi tzv. bílého světla je tak potřeba několik různých diod o různých vlnových délkách.

Nebudeme rozebírat jejich účinnost, protože jsou velmi velké rozdíly mezi různými příměsemi a hodně záleží na napětí, okolní teplotě a jiných vnějších podmínkách. Pro zajímavost můžeme uvést, že dokonce existují experimentální LED diody, které pracují s elektrickou účinností vyšší než 100 %.⁷

Další zdroje světla

Samozřejmě existují i další zdroje a principy vzniku světla (např. laser, doutnavka, katodoluminiscence atd.). Jejich užití jako zdrojů osvětlení pro náš běžný život je ale omezené, proto jsme je v našem řešení nerozebírali.

David Škrob

david.skrob@fykos.cz

Úloha IV.E ... kyvadlo ve větru

12 bodů; průměr 9,13; řešilo 47 studentů

Změřte periodu kmitů torzního kyvadla v závislosti na délce vlákna. Použijte alespoň dva druhy materiálu závěsu. Co nejpřesněji určete všechny podstatné parametry, na kterých perioda závisí.

Terky zachránily experiment.

V řešení se nejdříve seznámíme s teorií k experimentu, představíme si uspořádání, pomocí kterého budeme měřit, budeme prezentovat získané výsledky, diskutovat je a nakonec z nich vyvodíme co nejpřesnější závěry.

Naším měřicím přístrojem budou stopky na mobilním telefonu. Pro porovnání použijeme dva druhy lanka – kovový drátek a tenký kabel.

⁷<https://phys.org/news/2012-03-efficiency.html>

Teorie

Podobně jako při stlačování nebo natahování pevných látek, i při jejich skrucování vzniká v materiálu napětí, které působí proti deformaci. Uvažujme válcový objekt (např. kovový drátek), jehož jednou podstavou začneme kroutit podél osy symetrie. Tím v materiálu způsobíme zmínované pnutí. V prvním přiblížení můžeme předpokládat, že napětí bude úměrné úhlu otočení. Bude zde také vystupovat materiálová konstanta G , známá jako modul pružnosti ve smyku (modul torze, Coulombův modul), která má jednotku Pa a dá se nalézt vztah s Youngovým modulem pružnosti E .

Protože zde mluvíme o otáčivém pohybu, budeme dynamiku kmitů popisovat pomocí momentu sil. Pro válcový závěs můžeme v literatuře nebo na internetu nalézt vztah pro moment sil M , který vzniká mezi jednotlivými podstavami válce, jako

$$M = -D\varphi = -\frac{\pi Gr^4}{2d}\varphi,$$

kde r je poloměr a d délka závěsu a φ je úhel otočení mezi podstavami. Konstanta D se nazývá direkční moment a její různá hodnota pro stejné závaží a jiné závěsy by znamenala rozdílnou periodu kmitů, jak uvidíme později. Znaménko mínus znamená, že moment sil působí proti vychýlení a vrací materiál do původní pozice. Tento vztah platí s dostatečnou přesností pouze pro malé úhly, proto nebudeme závaží příliš vychylovat z rovnovážné polohy.

Nalezený moment sil tedy bude působit na závaží, které bude periodicky roztáčet a zpomalovat. Vztah mezi úhlovým zrychlením ε a momentem sil M je

$$M = J\varepsilon,$$

kde J je moment setrvačnosti roztáčeného předmětu. V našem případě jsme použili dlouhou tenkou tyč upevněnou ve středu, takže její moment setrvačnosti je

$$J = \frac{1}{12}ml^2,$$

přičemž m je její hmotnost a l její délka. Pohybová rovnice

$$\frac{1}{12}ml^2\varepsilon = -\frac{\pi Gr^4}{2d}\varphi$$

je analogická pohybové rovnici pro lineární harmonický oscilátor a vede na periodu kmitů

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2d}{6\pi Gr^4}}.$$

Zadání se ptá na závislost periody na délce závěsu, vidíme teď, že se perioda zvětšuje s odmocninou z d (tedy exponent, na který umocňujeme délku závěsu ve vztahu pro periodu, je $k = 1/2$). Také je větší se zvětšujícím se momentem setrvačnosti závaží, naopak se rychle zmenšuje s poloměrem a také s modulem pružnosti ve smyku.

Uspořádání a provedení experimentu

Experiment provedeme se dvěma druhy závěsu - kovovým drátkem a tenkým kabelem potaženým gumou. Není vhodné experiment měřit s tenkými lanky nebo nitěmi – ty mohou mít složitou vnitřní strukturu a náš teoretický model nemusí být úplně vhodný, ale hlavně mohou periody kmitů dosáhnout minutových časů, kdy už se výrazně projevují ztráty vlivem tření nebo odporu vzduchu. Už náš kabel není vhodným materiálem pro tento experiment vzhledem k prezentované teorii, je totiž složen se dvou druhů materiálu – kovu uvnitř a gumového obalu kolem. Na druhou stranu zadání nespécifikuje žádné požadavky na druh lanka a je možné, že nakonec bude teorie platná i pro takový závěs.

Jako závaží použijeme dřevěnou tyč. Tyč omotáme lankem a uděláme uzel co nejbližší tělu tyče. Druhý konec zavěsíme na další tyč, která je umístěna jako trám vodorovně v dostatečné výšce nad zemí. Postupujeme při měření od největší délky závěsu po nejmenší tak, že po změření periody vždy otočíme horní tyč tak, abychom na ní namotali trochu závěsu. Tím získáme dobře definované a vždy přibližně stejné zkrácení závěsu.

Na měření periody použijeme stopky na mobilním telefonu, přičemž pro zvýšení přesnosti měříme vždy několik po sobě jdoucích kmitů. Tím snížíme vliv reakční doby člověka. Pro měření po ustálení tyče v nehybné poloze do ní lehce ťukneme, aby se začala otáčet, a sledujeme, kdy dojde k jejímu zastavení. Jakmile vidíme první pohyb směrem zpět do rovnovážné polohy, spustíme stopky. Podobně po uplynutí několika kmitů při stejném pohybu stopky zastavíme.

Pro kovový drátek měříme čas deseti po sobě jdoucích kmitů, přičemž se při nejdelším závěsu dostáváme k době pod jednu minutu, což je experimentálně přijatelné. Pro měření s kabelem je perioda jednoho kmitu při nejdelším závěsu okolo půl minuty, měříme proto vždy jen dobu dvou kmitů.

Výsledky

Nejprve uvedeme naměřené hodnoty parametrů tyče a drátků a poté číselné hodnoty period kmitů.

Tabulka 1: Důležité parametry použitých předmětů.

	délka tyče	hmotnost tyče	poloměr drátku	poloměr kabelu vnitřní kov	poloměr kabelu celkem
	$\frac{l}{\text{cm}}$	$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{r_d}{\text{mm}}$	$\frac{r_k}{\text{mm}}$	$\frac{r_c}{\text{mm}}$
průměr	50,1	68	0,37	0,35	0,80
chyba	0,1	1	0,01	0,01	0,01

Tyč měla mít podle výrobce délku 50 cm, kterou jsme také naměřili pomocí krejčovského metru, chybu jsme proto odhadli na jeden milimetr. Poloměry drátků jsme změřili pomocí mikrometrického šroubu, abychom dosáhli co největší přesnosti. Pomocí kuchyňské váhy jsme našli hmotnost tyče, přičemž ani několik měření neukázalo jinou hodnotu, proto chybu odhadujeme jako nejmenší dílek na displeji, tedy 1 g.

Nyní již uvedeme naměřené hodnoty period pro oba závěsy s různými délkami. V následující tabulce už jsou uvedeny periody po vydělení naměřeného času počtem kmitů.

Tabulka 2: Naměřené periody kmitů v závislosti na délce závěsu.

kovový drátek		kabel	
$\frac{d_d}{\text{cm}}$	$\frac{T_d}{\text{s}}$	$\frac{d_k}{\text{cm}}$	$\frac{T_k}{\text{s}}$
71,4	4,95	70,5	27,8
66,4	4,83	65,1	27,0
61,4	4,61	59,9	25,1
56,4	4,43	53,8	24,6
51,4	4,20	48,5	23,3
46,4	3,98	43,3	22,0
41,4	3,71	37,8	21,0
36,4	3,49	32,5	19,1
31,4	3,23	26,5	17,7
26,4	2,96	21,3	15,7
21,4	2,68	15,8	13,6
16,4	2,30	10,5	10,9
11,4	2,07	7,4	9,6
		5,0	7,9
		2,3	5,8

V případě kovového drátku máme hodnoty uvedené na setiny sekundy, protože chyba změření celkového času se do chyby jednotlivých period rovnoměrně rozprostřela díky vysokému počtu period v jednom měření. Pro případ kabelu jsou hodnoty uvedené na desetiny sekundy, protože počet period v jednom měření byl výrazně nižší.

Závislost periody na délce závěsu jsme vynesli do grafů na obrázku 6. Opravdu vidíme rostoucí periodu s délkou závěsu ve tvaru odmocniny. Pro ověření průběhu data proložíme mocninnou závislostí. Druhou, avšak ekvivalentní možností, je délky závěsu i časy period zlogaritmovat a následně proložit přímkou. Pokud použijeme vztah ze zadání, měli bychom dostat

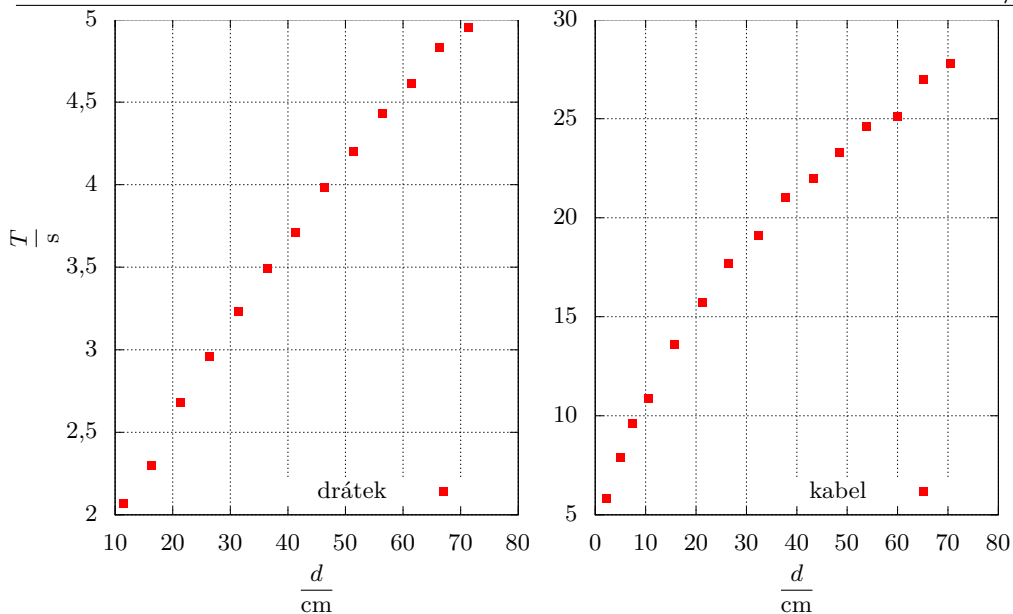
$$\ln(T) = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{6\pi Gr^4}}\sqrt{d}\right) = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{6\pi Gr^4}}\right) + \frac{1}{2}\ln(d),$$

což po vynesení do grafu s hodnotami $y = \ln(T)$, $x = \ln(d)$ a $A = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{6\pi Gr^4}}\right)$ dává rovnici přímky

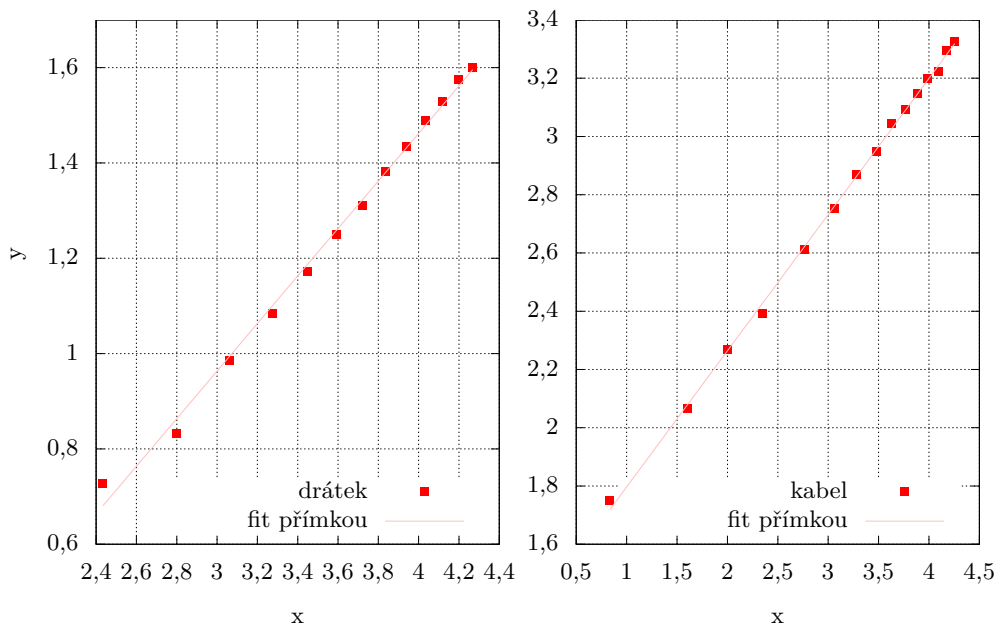
$$y = \frac{1}{2}x + A.$$

Z naměřených dat tedy očekáváme přímkou se sklonem $1/2$. Právě tuto hodnotu budeme porovnávat s koeficientem, který nám vyjde, když zlogaritmovaná data proložíme přímkou, jak je vidět v grafech 7. Další možností, jak data vizualizovat, by bylo vynesení periody v závislosti na odmocnině z délky lana, kde by závislost byla opět lineární.

Nalezené hodnoty jsou pro kovový drátek $A_d = (-0,53 \pm 0,03)$, $k_d = (0,50 \pm 0,01)$ a pro kabel $A_k = (1,33 \pm 0,01)$, $k_k = (0,46 \pm 0,01)$. Z koeficientů k je tedy zřejmé, že naše teorie je pro dané závěsy dobře použitelná, jelikož jsme očekávali hodnotu $k = 1/2$.



Obrázek 6: Závislost periody kmitu tyčky na délce závěsu pro obě lanka. Všimněme si rozdílných rozsahů os.



Obrázek 7: Závislost logaritmu periody kmitu tyčky na logaritmu délky závěsu pro obě lanka. Všimněme si rozdílných rozsahů os.

U kovového drátku využijeme hodnotu A_d pro stanovení modulu pružnosti ve skluzu. Získáme jej jako

$$G_d = \left(\frac{2\pi}{\exp(A_d)} \right)^2 \frac{ml^2}{6\pi r^4} = (5\,500 \pm 200) \text{ GPa}.$$

U kabelu takový výpočet nemá úplně smysl, protože je složen z více materiálů. Přeci jenom ale můžeme určit konstantu, která bude určovat závislost doby kmitů na materiálu pro danou délku. Direkční moment neobsahuje žádné materiálové vztahy a tvoří pouze úměrnost mezi úhlovým vychýlením a momentem sil. Jak jsme ale viděli, závisí direkční moment na délce závěsu. Pokud spolu vynásobíme obě hodnoty, dostáváme konstantu pro daný materiál závěsu, která nám může porovnávat, jaké budou periody pro dvě rozdílná vlákna při stejně dlouhém závěsu. Zavedme tedy konstantu $B = D \cdot d$ a spočítejme její hodnotu pro kabel i kovový drátek.

U kabelu dostáváme

$$B_k = D_k \cdot d = \frac{1}{12} ml^2 \left(\frac{2\pi}{\exp(A_k)} \right)^2 = (3,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1},$$

zatímco pro kovový drátek máme

$$B_d = \frac{1}{12} ml^2 \left(\frac{2\pi}{\exp(A_d)} \right)^2 = (1,61 \pm 0,02) \cdot 10^{-1} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}.$$

Diskuze

Z naměřených dat v logaritmických škálách je zřejmé, že se opravdu jedná o mocninné závislosti s exponentem, který jsme předpokládali. U závěsu z kabelu vyšel koeficient k_k o něco nižší než předpokládaných 0,5, což může být způsobeno tím, že se jedná o lanko složené ze dvou materiálů a nemusí pro něj přesně platit naše teorie. Odchylka od předpokládané hodnoty se ale liší jen v řádu procent, proto naše měření můžeme považovat za uspokojivé.

Podobně nemělo smysl pro tento závěs počítat modul pružnosti ve smyku, jelikož je složen ze dvou materiálů. Stanovili jsme tak pouze konstantu B , což je součin direkčního momentu vlákna a délky vlákna. Tato hodnota byla o téměř dva řády nižší u kabelu než u kovového drátku, což také odpovídá výrazně větším periodám. Takto velký rozdíl tkví v rozdílné kompozici obou závěsů, kdy v kabelu je výrazně méně kovu než v drátku a gumová izolace ze z běžné zkušenosti deformuje mnohem jednodušeji.

Podle parametrů všech použitých předmětů jsme vypočítali modul pružnosti ve skluzu pro kovový drátek jako 5 500 GPa. To je nesmyslně moc, protože běžné kovy dosahují hodnot v desítkách GPa.⁸ Drátek tak vůči otáčení vykazuje větší odpor, než je dáno pouze jeho materiálem. Můžeme to odůvodnit tím, že jsme nepoužili dokonale rovný válec, když byl použitý kus kovu odmotaný z většího množství, takže už dříve podléhal nějakým změnám tvaru. Tyto změny tvaru mohly mít za následek, že se drátek nestácel po celé své délce stejně, jako jsme tomu předpokládali v teoretické části. Na druhou stranu je ovšem závislost na délce opravdu odmocninná, což je v souladu s použitou teorií.

Jelikož chyby výsledků se pohybovaly v řádu jednotek procent, můžeme konstatovat, že naše teorie i provedení experimentu byly konzistentní. Jako zdroje chyb můžeme uvést například odpor prostředí, který způsoboval tlumení amplitudy výchylky. Pokud bychom uvažovali odpor

⁸https://www.engineersedge.com/materials/shear_modulus_of_rigidity_13122.htm

úměrný úhlové rychlosti, z teorie bychom dostali závislost periody na velikosti odporové síly (jak je tomu např. u tlumeného harmonického oscilátoru), čímž by se analýza dat stala výrazně složitější. Snažili jsme se proto pracovat v oblasti malých výchylek, aby rychlosti otáčení nebyly moc velké a mohli jsme tento efekt zanedbat. I naše teorie předpokládá malé výchylky, při velkých by nemusel moment síly být lineárně závislý na amplitudě výchylky. Také jsme v celém řešení neuvážovali moment setrvačnosti samotného lanka, protože vzhledem k jeho hmotnosti a rozměrům je o mnoho řádů menší než moment setrvačnosti tyče.

Závěr

Změřili jsme závislost periody torzních kmitů závaží na délce závěsu. Pro kovový drátek jsme dospěli k tomu, že perioda je úměrná odmocnině z délky závěsu, jak předpokládala naše teorie. U kabelu jsme naměřili lehce odlišnou závislost, což mohlo být způsobeno dvěma rozdílnými druhy materiálů ve struktuře vlákna.

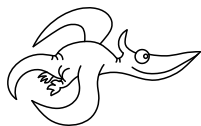
Konstantu B (součin direkčního momentu vlákna a délky závěsu) pro kovové vlákno jsme určili jako $D_k = (3,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$, zatímco u kabelu byla výrazně menší, a to $D_d = (1,61 \pm 0,2) \cdot 10^{-1} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$. Stanovili jsme modul pružnosti kovu drátku na $G_d = (5\,500 \pm 200) \text{ GPa}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

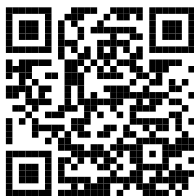
Úloha IV.S ... ohrev a explózie

10 bodů; průměr 5,54; řešilo 48 studentů

Řešení této úlohy naleznete již brzy na našem webu: <https://fykos.cz/>.



Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kompletní výsledky najdete
na <https://fykos.cz>.



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>
e-mail: fykos@fykos.cz

 /FYKOS  @fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.