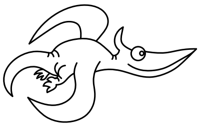
Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,
po Novém roce nastává čas i na čtvrtou sérii FYKOSu. V ní se dozvíte, proč máte vystoupit z vlaku včas, pomůžete malému Jágrovi přijít na to, jestli se nepropadne ledem v rybníce, či zjistíte, jak moc efektivně svítíte. Experiment se bude týkat torzního kyvadla a v seriálu se tentokrát dočtete o dvou veličinách, a to látkovém množství a teplotě. Tato série je také první sérií, podle které budeme zvát na podzimní soustředění, můžete si tedy zajistit místo co nejdříve.

V nejbližší době nás čeká největší prezenční akce FYKOSu, kterou je Fyziklání 2024. V letošním roce se bude konat 16. února v PVA Letňany a i tentokrát to bude velké. Momentálně máme přihlášených již téměř 150 týmů z 16 zemí světa. Kromě samotné soutěže pro Vás máme nachystaný i bohatý doprovodný program, který obsahuje přednášky, diskusní panel s vědci, ale také slavnostní raut či párty. Místa se rychle plní, s registrací proto nezahálejte!

Organizátoři



Zadání IV. série

Termín odeslání: 27. 02. 2024 23.59

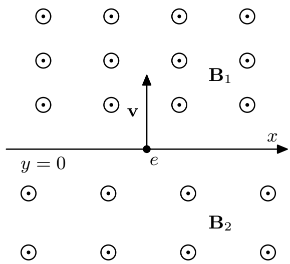
Úloha IV.1 ... let přes Měsíc — 3 body

Pták Fykosák jednoho dne pozoroval oblohu, na které byl Měsíc v úplňku. Přes něj zrovna prolétlo za čas 0,35 s letadlo, přičemž kolmá vzdálenost dráhy jeho letu byla od středu Měsíce 1/3 poloměru úplňku. Toto letadlo obvykle letí rychlostí $800\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Fykosáka zajímalo, v jaké výšce se letadlo nachází, aby mohl příště letět s ním. Stejně jako on určete tuto výšku.

Úloha IV.2 ... vystoupili v Hněvicích — 3 body

Tomáš nastoupil do vlakového vagónu ve tvaru kvádru a řekl si, že si zdřímne. Když se vzbudil, zjistil, že je ve vagónu sám a že je celý vagón zavěšený v geometrickém středu na nákladním jeřábu a točí se okolo osy závěsu úhlovou rychlostí ω. Tomáš si toho nejprve nevšiml, protože seděl právě ve středu vagónu se šířkou d. Když si to uvědomil, tak se zaradoval, protože ho napadlo, že využije jeden ze svých kilogramových etalonů, které nosí pro podobné příležitosti vždy s sebou, na změření délky vagónu. Po pár pokusech se mu podařilo hodit etalon počáteční rychlostí $\vec{v}$ tak, že po dvou otáčkách vagónu etalon dopadl do jeho krajního rohu a rozbil okno. Jakou zjistil délku vagónu L, pokud zanedbal odpor vzduchu?

Úloha IV.3 ... krok sem, krok tam — 6 bodů



Uvažujme homogenní magnetické pole o indukci B_1. To se rozprostírá v poloprostoru, který je ohraničen rovinou rozhraní $y = 0$, za kterou je stejně orientované, taktéž homogenní magnetické pole o indukci B_2. Z roviny rozhraní, kolmo k němu a k siločárám polí, vyletí elektron rychlostí v (jako na obrázku). Určete velikost i směr jeho průměrné rychlosti rovnoběžné s rovinou rozhraní.

Bonus: Uvažujte nyní, že se velikost pole mění lineárně jako $B = B_0\,(1 + \alpha y)$ a jeho směr je v kladném směru osy z. I v tomto případě určete velikost i směr průměrné rychlosti elektronu rovnoběžné s rovinou rozhraní. Elektron na začátku vypouštíme stejně jako v předchozím případě.

Úloha IV.4 ... dokonalý přechod? — 7 bodů

Z materiálu s indexem lomu n_1 dopadá polarizovaný paprsek na rovinné rozhraní s materiálem o indexu lomu n_2 tak, že po průchodu neztratí na intenzitě. Poté dopadne na rovnoběžné rozhraní s indexem lomu n_3, přičemž opět projde beze ztrát, a tak dále. Najděte posloupnost n_i, která toto splňuje.

Úloha IV.5 ... malej Jágr — 9 bodů

Malý Jágr a jeho kamarádi by rádi vyrazili hrát hokej. Mrznout však začalo teprve nedávno, a tak neví, jestli je led na rybníku dostatečně tlustý. Spočtěte, za jak dlouho dostatečně promrzne hluboký rybník, pokud víte, že voda má na začátku teplotu $0\,^\circ\mathrm{C}$, vzduch se udržuje na konstantních $-10\,^\circ\mathrm{C}$ a minimální tloušťka ledu pro bezpečné bruslení je $10\,\mathrm{cm}$. Hustota vody ani vznikajícího ledu se s hloubkou nemění. Přestup tepla mezi vzduchem a ledem i vodou a ledem je mnohem rychlejší než vedení tepla v ledu. Potřebné tepelné vlastnosti ledu si dohledejte.

Úloha IV.P ... efektivní osvětlení — 10 bodů

Popište základní fyzikální principy jednotlivých způsobů produkce umělého osvětlení. Alespoň u tří vypočtěte jejich účinnost, tedy kolik dodávané energie je skutečně přeměněno na viditelné světlo. Porovnejte se skutečnými daty.

Úloha IV.E ... kyvadlo ve větru — 12 bodů

Změřte periodu kmitů torzního kyvadla v závislosti na délce vlákna. Použijte alespoň dva druhy materiálu závěsu. Co nejpřesněji určete všechny podstatné parametry, na kterých perioda závisí.

Úloha IV.S ... seriálová úloha — 10 bodů

Text nového dílu seriálu a zadání seriálové úlohy najdete na našem webu.

Řešení III. série

Úloha III.1 ... je tady moc sucho

3 body; průměr 2,61; řešilo 147 studentů

Danka má na koleji zvlhčovač vzduchu, který odpařuje vodu z bodu varu, čímž tvoří teplou páru. Přístroj udrží maximálně $V = 3{,}8\,\mathrm{l}$ vody, kterou spotřebuje za $t = 24\,\mathrm{h}$. Jaká je jeho účinnost, neboli jakou část energie odebrané z elektrické sítě spotřebuje na přeměnu vody na páru? Příkon zvlhčovače je $P = 260\,\mathrm{W}$ a Danka do něj nalila vodu o teplotě $T_0 = 20\,\mathrm{^\circ C}$. Potřebné vlastnosti vody si dohledejte.

Danka musí v zimě na koleji používat zvhlčovač vzduchu.

Aby sme zistili účinnosť zvlhčovača, v prvom rade potrebujeme zistiť, aké množstvo energie je potrebné na odparenie vody v zvlhčovači. Táto energia je súčtom tepla, ktoré sa spotrebuje na ohrev vody na bod varu, teda teplotu $T_1 = 100\,\mathrm{^\circ C}$, označme ho Q, a skupenského tepla varu L. Podľa známych vzorcov môžeme písať

$$Q = V\rho c(T_1 - T_0)\,,$$

a

$$L = V\rho l_\mathrm{v}\,.$$

Z tabuliek zistíme, že merná tepelná kapacita vody je $c = 4\,182\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ a jej skupenské teplo varu $l_\mathrm{v} = 2\,257\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$. Hustotu vody uvažujeme $1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Teraz už stačí spočítať celkovú elektrickú energiu, ktorú zvlhčovač za 24 hodín odoberie. Tú spočítame ako

$$E = Pt\,.$$

Teraz môžeme spočítať účinnosť zvlhčovača

$$\eta = \frac{Q + L}{E}\,,$$

$$\eta = \frac{V\rho[c(T_1 - T_0) + l_\mathrm{v}]}{Pt}\,.$$

Po dosadení hodnôt prevedených na správne jednotky dostávame

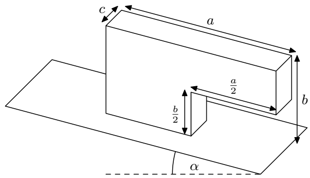
$$\eta \doteq 43{,}8\,\%\,.$$

Daniela Dupkalová
daniela@fykos.cz

Úloha III.2 ... stabilní ovečka

3 body; průměr 2,65; řešilo 104 studentů

Mějme obdélníkovou desku a na ní položený blok dřeva o rozměrech $a = 20\,\mathrm{cm}$, $b = 10\,\mathrm{cm}$ a $c = 5\,\mathrm{cm}$ (tvar obráceného písmene L, naše aproximace tvaru ovce), přičemž hrany desky jsou rovnoběžné k hranám podstavy bloku. Jaký úhel náklonu desky je potřebný, aby se blok převrhnul, pokud ji postupně naklápíme okolo každé z hran desky (viz obrázek)? Předpokládejte, že se blok převrhne dříve, než se začne smýkat.



Dodo sledoval ovce na svahu.

Aby se naše těleso převrátilo, musí dosáhnout labilní polohy, kdy se jeho těžiště dostane mimo plochu průmětu podstavy do svislého směru. Proto musíme zjistit polohu těžiště.

Celé těleso si můžeme představit jako tři menší kvádry, u nichž je těžiště v jejich středu, čímž získáme tři body. Těžiště celého tělesa dostaneme jako průměr těchto tří bodů vážený jejich hmotností

$$T[x,y] = \frac{mA[x,y] + mB[x,y] + mC[x,y]}{3m}\,,$$

kde A, B, C jsou body trojúhelníku a m hmotnost každého z kvádrů.

Spočítejme polohu těžiště vůči bodu, který se nachází na spodní hraně „vykousnutí“. Svislá souřadnice (pokud blok stojí na vodorovné rovině), je ve výšce

$$T_y = \frac{m\frac{b}{4} + m\frac{3b}{4} + m\frac{3b}{4}}{3m} = 5{,}83\,\mathrm{cm}\,.$$

Vodorovná pozice je

$$T_x = \frac{m\frac{a}{4} + m\frac{a}{4} - m\frac{a}{4}}{3m} = 1{,}67\,\mathrm{cm}$$

směrem k zadní (celé) straně.

Poloha těžiště ve třetí dimenzi je ze symetrie útvaru v jeho polovině. Uvažujme, že desku s útvarem začneme naklánět kolem osy, která je na straně „vykousnutí“. Najdeme pravoúhlý trojúhelník, jehož body jsou těžiště tělesa, kolmý průmět těžiště do podstavy a bod O, kolem kterého budeme těleso převracet (leží na obvodu podstavy). Z trojúhelníku pak zjistíme úhel α pro dosažení labilní polohy jako

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{T_x}{T_y}\,,$$

kde T_y je výška těžiště nad podstavou a T_x je vzdálenost jeho průmětu do nakloněné roviny od hrany podstavy. Číselně dostáváme $\alpha_1 = 15{,}9^\circ$.

Analogicky, pokud „vykousnutí“ směřuje směrem nahoru, tedy když desku otáčíme okolo osy na druhé straně útvaru, dostaneme pro úhel podmínku

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\frac{a}{2} - T_x}{T_y} \quad\Rightarrow\quad \alpha_2 = 55{,}0^\circ\,.$$

Ještě desku můžeme natáčet kolem hrany rovnoběžné s nejdelším rozměrem útvaru. Zde dostáváme podmínku

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\frac{c}{2}}{T_y} \quad\Rightarrow\quad \alpha_3 = 23{,}2^\circ\,.$$

Vidíme, že maximální úhel, kdy se útvar ještě nepřevrhne, se výrazně mění v závislosti na poloze tělesa. Ovce na strmém svahu žerou vždy hlavou do kopce.

Adam Roštejnský
adam.rostejnsky@fykos.cz

Úloha III.3 ... náhodně dál dojdeš

5 bodů; průměr 4,23; řešilo 86 studentů

V mikrosvětě buněk rozlišujeme dva typy transportu: transport pomocí volné difuze, *tj.* Brownova pohybu, *kde pohyb využívá přímo energie prostředí, a tzv.* aktivní transport, *který vyžaduje například proteinový motor pohybující se konstantní rychlostí po cytoskeletálním vlákně. Uvažujme typickou hodnotu difuzní konstanty $D \approx 10^{-9}\,\mathrm{cm^2{\cdot}s^{-1}}$ a rychlost aktivního transportu $u \approx 10^{-6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pro jaké vzdálenosti se časově vyplatí difuzní a kdy naopak aktivní způsob pohybu? Uvažujte, že transport probíhá jen v jednom rozměru.* *Marek J. četl Sekimota.*

Pre voľnú brownovskú časticu platí, že jej stredná vzdialenosť od počiatku trajektórie je v 1D daná ako

$$\langle x \rangle = \sqrt{2Dt}\,,$$

kde t je čas a $\langle x \rangle$ značí strednú hodnotu, pričom stredujeme cez trajektórie. Pre krátke časy, či vzdialenosti je výhodný difúzny spôsob pohybu, keďže jeho zdrojom je aj tak prítomné prostredie, konkrétne pohyb generujú zrážky molekúl prostredia s brownovskou časticou. Pre dlhšie vzdialenosti , a teda aj dlhšie časy, sa na náhodu už neradno spoliehať, stredná rýchlosť $\langle x \rangle / t = \sqrt{2D/t}$ s časom klesá. Vzdialenosť l, pre ktorú sú oba spôsoby transportu v priemere rovnako rýchle (trvajú rovnaký čas τ), určíme následovne

$$\tau = \frac{l^2}{2D} = \frac{l}{u}\,,$$

odkiaľ pomocou hodnôt zo zadania máme $l = 2D/u \approx 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Vidíme, že pre vzdialenosti menšie ako rádovo stovky nanometrov vie byť difúzny pohyb výhodnejší než aktívny transport. A príroda to skutočne využíva, napríklad vzdialenosť zhruba 50 nm medzi synaptickými membránami neurotransmitery prekonávajú difúziou. Na druhej strane vzdialenosti v bunkách, rádovo mikrometre, sú zdolávané typicky za použitím molekulárnych motorov.

Marek Jankola
marekj@fykos.cz

Úloha III.4 ... na velikosti záleží

8 bodů; průměr 4,20; řešilo 83 studentů

Koule s poloměrem r se valí po vodorovném povrchu rychlostí v_0. Cestu jí však blokuje kolmý schod o výšce h. Najděte podmínky, za kterých se koule na schod převalí a začne se po něm kutálet, aniž by se schodem ztratila kontakt. Za těchto podmínek určete její rychlost po překonání schodu. Předpokládejte, že jsou všechny srážky dokonale nepružné a že tření mezi koulí a schodem je velké. Schod je hranatý a je postavený kolmo na směr pohybu koule.

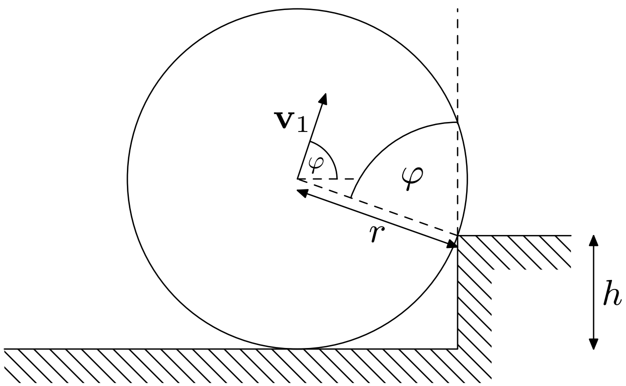
Dodo měl malá kolečka.

Začneme hledáním podmínek pro parametry úlohy, za kterých koule schod vůbec překoná. Rovnou vidíme, že pokud bude $h \geq r$, tak se koule za předpokladů úlohy na schod nikdy nedostane. Je to kvůli tomu, že při tuhém nárazu koule ztratí veškerou vodorovnou rychlost, a jediné, co jí zbyde, je úhlová rychlost. Ta při kontaktu se schodem kouli rozpohybuje pouze ve svislém směru. Tedy, i když by se koule dokázala při pohybu dostat do větší výšky než h, tak se nikdy nedostane na schod, protože dopadne zpět před něj.

Budeme se tedy zabývat jen případy, kdy je $h < r$. Schod je hranatý (můžeme si ho představit jako dlouhý kvádr), tedy se při srážce dostane koule do kontaktu pouze s jeho horní hranou. Srážka je dokonale tuhá, koule proto přijde o normálovou složku rychlosti. Normálou přitom rozumíme přímku, která prochází hranou překážky a středem koule podle obrázku 1.

Označme úhel, který svírá normála se svislým směrem, jako φ. Pak z původní rychlosti středu koule v_0 zbyde pouze

$$v_0 \cos\varphi = v_0 \cdot \frac{r-h}{r} = v \cdot \left(1 - \frac{h}{r}\right) .$$



Obrázek 1: Náčrt situace.

Uvědomme si, že toto není konečná rychlost koule těsně po nárazu. Koule se totiž se schodem srazí i v tečném směru, což ovlivní její úhlovou rychlost (podobně jako když při ping-pongu udělíme úderem pálky míčku rotaci). K této srážce dochází v důsledku tření (které je ze zadání velké). Pokud by byl schod dokonale hladký, rotace koule by se nezměnila.

Jelikož je tření mezi koulí a schodem velké (nebo chcete-li srážka je tuhá), bod dotyku koule se schodem při nárazu okamžitě ztratí rychlost. Bod dotyku má nulovou rychlost tehdy, když mezi rychlostí koule v_1 po srážce se schodem a její úhlovou rychlostí ω_1 platí vztah

$$v_1 = \omega_1 r .$$

Konečnou rychlost v_1 středu koule po nárazu bychom nyní chtěli vypočítat. Víme, že při kolmém nárazu se rychlost koule zmenší z v_0 na $v_0 \cos\varphi$ a úhlová rychlost se nezmění. Pak se bod dotyku s hranou pohybuje *proti směru* pohybu koule. Třecí síla pohyb bodu dotyku zastaví, tedy působí *ve směru* rychlosti $v_0 \cos\varphi$.

Celkem se pak při srážce v tečném směru zvětší hybnost o nějaké Δp a moment hybnosti zmenší o nějaké $\Delta L = \Delta p r$, protože moment M od třecí síly F_t je roven $F_\mathrm{t} r$.

Máme tedy

$$J\Delta\omega = mr\Delta v\,,$$
$$\frac{2}{5}r\Delta\omega = \Delta v\,,$$

kde $J = 2mr^2/5$ je moment setrvačnosti koule. Rychlost koule se při srážce změnila z $v_0\cos\varphi$ na v_1 a úhlová rychlost z v_0/r na v_1/r. Odtud dostaneme

$$\frac{2}{5}(v_0 - v_1) = v_1 - v_0\cos\varphi\,,$$

odkud

$$v_1 = v_0\cdot\left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\cos\varphi\right) = v_0\cdot\left(1 - \frac{5h}{7r}\right)\,.$$

Z rychlosti v_1 nyní zvládneme určit, jestli koule schod vůbec překoná. Hraniční případ nastane, pokud bude mít koule na vrcholku přesně nulovou rychlost. Ze zákona zachování energie máme

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2 > mgh\,,$$
$$v_0^2 > \frac{\frac{10}{7}gh}{\left(1-\frac{5h}{7r}\right)^2}\,.$$

Za této podmínky tedy koule schod překoná. Uvažujme nyní, že počáteční rychlost koule splňuje tuto podmínku. Při pohybu koule přes hranu schodu mohou nastat dva případy.

Prvním je, že se koule od schodu vůbec neodlepí, neboli se pouze otočí kolem jeho hrany. Druhá možnost potom je, že rychlost koule je tak velká, že při otáčení kolem hrany překoná odstředivá síla dostředivou složku tíhové síly a koule ztratí kontakt se schodem.

Vyšetřeme nyní tuto možnost. Koule se nikdy neodlepí od hrany, pokud bude mezi odstředivou a tíhovou silou splněna nerovnost

$$m\frac{v^2}{r} < mg\cos\theta\,,$$

kde úhel θ je definovaný stejně jako φ, ale pro situaci, kdy už se koule nedotýká vodorovné podložky, po které jela. Rychlost koule při pohybu postupně klesá a úhel θ se zmenšuje. Levá strana rovnice proto klesá a pravá roste. Nerovnost je tedy splněna po celou dobu pohybu právě tehdy, když je splněna na začátku, tj. těsně po nárazu. Když do nerovnice dosadíme vyjádření pro v_1, dostaneme

$$v_0^2 < \frac{g(r-h)}{\left(1-\frac{5h}{7r}\right)^2}\,.$$

Máme tedy horní i dolní omezení pro počáteční rychlost koule v_0. Zároveň vidíme, že pokud bude

$$\frac{\frac{10}{7}gh}{\left(1-\frac{5h}{7r}\right)^2} > \frac{g(r-h)}{\left(1-\frac{5h}{7r}\right)^2}\,,$$
$$h > \frac{7}{17}r\,,$$

nemůže situace, kdy koule vůbec nenadskočí, nastat pro žádnou rychlost v_0.

Uvažujme nyní, že r, h a v_0 splňují odvozené podmínky a spočítejme rychlost koule poté, co se převalí na schod. Jelikož se bod dotyku koule s hranou schodu nepohybuje, nepůsobí tření a při otáčení se tak zachovává energie (jak jsme uvažovali už v případě, kdy jsme hledali podmínku pro překonání schodu). Pro rychlost koule v_2 po převalení přes schod platí

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J\omega_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2 - mgh\,.$$

S využitím podmínky neprokluzování máme $v_2 = \omega_2 r$, a tedy

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{10}{7}gh} = \sqrt{v_0^2\left(1 - \frac{5h}{7r}\right)^2 - \frac{10}{7}gh}\,.$$

Jakmile se koule převalí a dostane se na schod, tak už k žádným dalším srážkám nedochází, a tedy vypočítaná v_2 je rychlost jejího kutálení po překonání schodu.

Jiří Kohl
jiri.kohl@fykos.cz

Úloha III.5 ... vzduch pod vodou

10 bodů; průměr 3,97; řešilo 72 studentů

Uvažujme válcovou skleničku o zanedbatelné hmotnosti, ploše vnitřního průřezu S a výšce h, kterou obrátíme dnem vzhůru a její otevřený okraj zarovnáme s hladinou vody v rezervoáru. Potom začneme pomalu tlačit směrem dolů. Jakou práci vykonáme, jestliže takto posuneme sklenici i se vzduchem uvnitř tak, aby byla její podstava $d > 0$ pod hladinou?

Bonus: *Uvažujme nyní realističtější případ. Jakou práci musíme vykonat, abychom sklenici o stejných rozměrech, ale hmotnosti m, úplně ponořili na dno nádoby o ploše A, v níž voda dosahuje na začátku výšky H? Uvažujte, že sklenice je po dosažení dna celá potopená.*

Jarda by se na Titanic podívat nejel...

Protože úloha není tak jednoduchá, jak by se na první pohled mohla zdát. Proto ukážeme několik způsobů řešení, které se výrazně liší svou matematickou obtížností. Nejprve vyřešíme úlohu pomocí triku se zavřenou sklenicí, poté úlohu převedeme pouze na počítání těžiště, ve třetím řešení použijeme termodynamický potenciál entalpii a čtvrtý způsob, kde práci spočítáme přímo ze silového působení, bude myšlenkově nejvíce přímočarý, zato matematicky více komplikovaný.

Nejdříve ovšem zavedeme značení veličin. Dno sklenice je po otočení nahoře, horní okraj je dole. Výška vnitřního objemu sklenice (t.j. výška sklenice) zůstává h, plocha průřezu vnitřku je S. Jakmile se sklenice ponoří, výška objemu vzduchu uvnitř se zmenší a budeme ji značit x (od dna sklenice směrem dolů). Písmenem y budeme značit vzdálenost dna nádoby od hladiny směrem dolů, v počáteční poloze proto $y = -h$. Hustota vody je ρ, tíhové zrychlení g, atmosférický tlak p_a a tlak uvnitř sklenice je p (na začátku tedy $p = p_\mathrm{a}$). Jestliže je sklenice ponořená při $y = d$, pak označíme $x = x^*$. Pro $y = 0$ zase výšku objemu vzduchu uvnitř sklenice budeme značit $x = x_0$.

Myšlenkový experiment se zavřenou skleničkou

Na začátku úlohy je nutné si uvědomit, kde všude se naše vykonaná práce projeví. Na sklenici ve vodě působí vztlaková síla $F_\mathrm{v} = V\rho g$, kde V je objem vzduchu, který je ve sklenici pod hladinou vody, ρ je hustota vody a g je tíhové zrychlení. Tato síla působí směrem vzhůru, a proto na posouvání sklenice dále pod vodu potřebujeme konat práci. Další silou je tíhová síla vzduchu, který má ve sklenici vždy hmotnost m, takže jeho tíhová síla je $F_g = mg$. Hustota vzduchu je ovšem za normálního tlaku a teploty přibližně o tři řády nižší než vody, proto ji v našem řešení můžeme zanedbat.

Další práci musíme spotřebovat na stlačování vzduchu uvnitř. Práce potřebná ke stlačení vzduchu u tlaku p o malý objem $\mathrm{d}V$ je $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V = pS\,\mathrm{d}x$, kde jsme diferenciál objemu $\mathrm{d}V$ zapsali jako součin podstavy S a změny výšky vzduchu ve sklenici $\mathrm{d}x$.

Protože se objem vzduchu ve sklenici vlivem stlačování v závislosti na hloubce ponoření mění, vyřešíme úlohu trikem. Koncový stav sklenice a vzduchu v ní nezávisí na procesu, kterým se ho dosáhne (pokud jsou všechny části procesu reverzibilní a vratné, takže se při nich neztrácí energie například ve formě tepla).

Představíme si, že nějakým pístem, se kterým později budeme moci ve sklenici posunovat, utěsníme i spodní (při normálním používání horní) otvor sklenice. Píst necháme zatím na okraji sklenice, tedy ve vzdálenosti h od jejího normálního dna, a celou sklenici ponoříme do vody tak, že její dno (horní podstava) je y pod hladinou. Tím jsme vykonali práci na překonání vztlakové síly.

Nyní když ovšem uvolníme píst, tak se změní jeho poloha, protože tlak vody je vyšší než atmosférický tlak p_a, který zůstal ve sklenici. Píst se bude pohybovat nahoru, dokud se tlaky nevyrovnají. Pokud bychom píst jenom pustili, stlačil by plyn až moc a třeba začal kmitat. Kdybychom ho ale pouštěli pomalu, mohli bychom práci, kterou vykoná voda svým hydrostatickým tlakem, nějak využít. Tím bychom tuto práci mohli odečíst od práce, kterou jsme vykonali ponořením sklenice pod vodu.

Budeme tedy postupovat přesně tímto způsobem. Práce potřebná na překonání vztlakové síly je rovna

$$W_\mathrm{v} = \int_{-h}^{0} (h + y)\, S\rho g\,\mathrm{d}y + \int_0^d hS\rho g\,\mathrm{d}y\,.$$

Druhý člen popisuje situaci, kdy už je celá sklenice ponořená pod vodou. V takovém případě je působící vztlaková síla $F_\mathrm{v} = Sh\rho g$ konstantní. První člen popisuje situaci, kdy je část sklenice nad vodou a vztlaková síla vody je úměrná jen ponořené části o výšce $h + y$. Souřadnice y popisuje vzdálenost dna sklenice od hladiny, na začátku tedy $y = -h$, zatímco když se celá sklenice ponoří, tak $y = 0$. Na konci pak $y = d$. Celková vykonaná práce tedy je

$$W_\mathrm{vz} = \frac{h^2}{2} S\rho g + hS\rho g d\,.$$

Vykonáním této práce jsme dostali sklenici do hloubky d pod hladinu. Nyní píst začneme pomalu pouštět nahoru. Označme x jako vzdálenost pístu od dna sklenice (takže na začátku $x = h$). Tlak vody v závislosti na x je dán jako součet atmosférického tlaku p_a a hydrostatického tlaku

$$p_\mathrm{v} = (x + d)\,\rho g + p_\mathrm{a}\,.$$

Proti tlaku vody působí zevnitř sklenice na píst tlak

$$p = p_\mathrm{a}\frac{h}{x}\,,$$

přičemž jeho vyjádření v závislosti na x jsme dostali z izotermického děje z podmínky $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Síla působící na píst tak je

$$F = S\,(p_\mathrm{v} - p) = S\left((x + d)\,\rho g + p_\mathrm{a} - p_\mathrm{a}\frac{h}{x}\right)\,.$$

Práci, kterou voda vykoná, tak najdeme jako

$$W_\mathrm{v} = \int_h^{x^*} S\left(\left(x+d\right)\rho g + p_\mathrm{a} - p_\mathrm{a}\frac{h}{x}\right)\left(-\,\mathrm{d}x\right),$$

kde x^* je rovnovážná poloha pístu, kdy se vyrovná tlak stlačeného vzduchu uvnitř sklenice a tlak vody. Integrací dostáváme

$$\begin{aligned} W_\mathrm{v} &= S\left[\left(x^2/2 + dx\right)\rho g + p_\mathrm{a}x - p_\mathrm{a}h\ln x\right]_{x^*}^{h} = \\ &= S\left(\left(\frac{h^2 - {x^*}^2}{2} + d\left(h - x^*\right)\right)\rho g + p_\mathrm{a}\left(h - x^*\right) - p_\mathrm{a}h\ln\frac{h}{x^*}\right). \end{aligned}$$

Nyní už jenom zbývá najít onu rovnovážnou polohu pístu. Tu najdeme tehdy, když je síla působící na píst nulová, tedy

$$\left(x^* + d\right)\rho g + p_\mathrm{a} = p_\mathrm{a}\frac{h}{x^*},$$

což je kvadratická rovnice pro x, jejímž řešením je

$${x^*}^2\rho g + x^* d\rho g + x^* p_\mathrm{a} - p_\mathrm{a}h = 0 \quad\Rightarrow\quad x^* = \frac{-\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right) + \sqrt{\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g}}{2\rho g},$$

kde jsme museli vybrat kladný kořen, protože pro záporný by x^* bylo záporné, což nedává smysl. Dosazením do rovnice výše dostaneme práci, kterou vykonala voda, jako

$$W_\mathrm{v} = S\left(\left(\frac{h^2 - {x^*}^2}{2}\right)\rho g + \left(h - x^*\right)\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right) - p_\mathrm{a}h\ln\frac{h}{x^*}\right).$$

Celková práce, kterou jsme museli vykonat, je tedy

$$W_\mathrm{celk} = S\left(\frac{{x^*}^2\rho g}{2} - hp_\mathrm{a} + x^* d\rho g + x^* p_\mathrm{a} + p_a h\ln\frac{h}{x^*}\right).$$

Dosazením z kvadratické rovnice člen $-{x^*}^2\rho g = -p_\mathrm{a}h + x^* d\rho g + x^* p_\mathrm{a}$ dostáváme

$$W_\mathrm{celk} = S\left(-\frac{{x^*}^2\rho g}{2} + p_a h\ln\frac{h}{x^*}\right),$$

což po dosazení rovnovážné polohy konečně vede na výsledek

$$\begin{aligned} W_\mathrm{celk} = {} & S\frac{-2\rho g p_\mathrm{a}h - \left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + \sqrt{\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g}\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)}{4\rho g} + \\ & + Sp_a h\ln\frac{2h\rho g}{-\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right) + \sqrt{\left(d\rho g + p_\mathrm{a}\right)^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g}}. \end{aligned}$$

Myšlenkový experiment se zrníčky

Celý takový proces lze myšlenkově popsat i trochu jinak. Představme si, že pod hladinou až do hloubky h jsou na (spojitých) poličkách rozmístěna zrnka písku. Píst, kterým jsme uzavřeli spodní otvor ve sklenici, je dutý, takže do něj můžeme zrníčka posouvat. Píst se ze začátku nemůže ve sklenici hýbat. Nasuneme nejvyšší zrníčka do pístu, takže celá sklenice se trochu ponoří, protože jsme zvětšili tíhovou sílu. Nasuneme další zrníčka a sklenice znovu klesne. Totéž opakujeme až do doby, než jsou všechny zrníčka v pístu a celá sklenice je ponořená těsně pod hladinou a to tak, že tíha zrníček vyváží vztlakovou sílu vody. V takovém případě $m = V\rho$, kde m je hmotnost zrníček a V objem sklenice.

Nyní je výslednice sil, které působí na sklenici s pístem a zrníčky, nulová. Sklenici můžeme posunout do libovolné hloubky bez konání práce. Při dosažení požadované hloubky d (od dna sklenice k hladině) sklenici na chvíli připevníme tak, aby se nemohla hýbat (např. ji připoutáme ke dnu). Všechen písek z pístu vysuneme a vrátíme na původní místo pod hladinou. Právě tady tímto vytahováním písku vykonáme práce, která je potřeba k ponoření uzavřené sklenice do vody. Vykonaná práce je změna těžiště písku v tíhovém poli a je rovna

$$W_{\mathrm{vz}} = mg\left(d + h - \frac{h}{2}\right) = Sh\rho g\left(d + \frac{h}{2}\right) ,$$

což je v naprostém souladu s výrazem výše.

Nyní najdeme na poličce $d + h$ pod hladinou u ponořené sklenice další zrníčka písku. Do pístu jich nasuneme tolik, abychom píst mohli uvolnit z vazby, ale aby se nikam nepohnul, tedy aby tlaková síla vzduchu uvnitř a tíhová síla zrníček vyrovnaly tlak vody. Poté zrníčka začneme pomalu odebírat a přesouvat na poličky vedle pístu. Po odebrání zrníčka se píst posune nahoru, aby se vyrovnaly síly. Hmotnost zrníček v pístu je tak v závislosti na objemu vzduchu ve sklenici z rovnosti sil

$$M(x)\,g + Sp_{\mathrm{a}}\frac{h}{x} = (x + d)\,\rho g S + p_{\mathrm{a}}S \quad \Rightarrow \quad M(x) = \frac{S}{g}\left((x + d)\,\rho g + p_{\mathrm{a}} - p_{\mathrm{a}}\frac{h}{x}\right) .$$

Označme $M_0 = M(h) = S\,(h + d)\,\rho$ hmotnost zrníček na začátku posouvání pístu. Budeme ji potřebovat záhy.

Poslední zrníčko z pístu odstraníme u rovnovážné polohy x^*. Hustota zrníček písku na poličkách vedle sklenice pak je

$$\lambda(x) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = \frac{S}{g}\left(\rho g + p_{\mathrm{a}}\frac{h}{x^2}\right) .$$

Tlak vody tedy kromě stlačení vzduchu vykonal i práci na zvednutí zrníček písku. Stačí nám proto najít jejich těžiště a dostaneme velikost této vykonaná mechanické práce. Vzdálenost těžiště od dna sklenice najdeme jako

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{M_0}\int_{x^*}^{h} \lambda(x)\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(h + d)\,\rho g}\left(\rho g\frac{h^2 - {x^*}^2}{2} + p_{\mathrm{a}}h\ln\frac{h}{x^*}\right) .$$

Těžiště zrníček se tedy z poličky v hloubce $h + d$ pod hladinou zvedlo o

$$t = h - x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{(h + d)\,\rho g}\left(hd\rho g + \rho g\frac{h^2}{2} + \rho g\frac{{x^*}^2}{2} - p_{\mathrm{a}}h\ln\frac{h}{x^*}\right) ,$$

takže jejich potenciální energie se zvýšila o

$$W_\mathrm{v} = M_0 g t = S\left(h d\rho g + \rho g \frac{h^2}{2} + \rho g \frac{{x^*}^2}{2} - p_\mathrm{a} h \ln \frac{h}{x^*}\right) .$$

Tuto potenciální energii zrníček lze nějak využít, proto ji odečteme od práce, kterou jsme vykonali při zvedání prvních zrníček. Celková práce, kterou jsme museli vykonat, je proto

$$W_\mathrm{celk} = W_\mathrm{vz} - W_\mathrm{v} = S\left(-\rho g \frac{{x^*}^2}{2} + p_\mathrm{a} h \ln \frac{h}{x^*}\right) ,$$

což dosazením za ${x^*}^2$ vede opět na stejný výsledek jako v minulé části.

Řešení pomocí entalpie

Entalpie je energie potřebná k vytvoření systému o vnitřní energii U a objemu V v okolním prostředí o tlaku P. Jakožto stavová veličina nezávisí na ději, pouze na aktuálním stavu systému. Vypočítáme ji jako

$$H = U + PV ,$$

kde člen PV je energie potřebná k tomu, abychom v okolním prostředí pro vytvoření našeho systému uvolnili místo.

Předpokládejme tedy, že ve vzdálenosti $y \in [d, d + x^*]$ pod hladinou potřebujeme vytvořit místo pro vzduch, který je aktuálně ve sklenici při tlaku p_a a objemu Sh. Potřebný objem, který takové množství vzduchu bude mít v hloubce d, je Sx^*. Protože tlak v okolí se mění, jak se mění hloubka, musíme člen PV integrovat, takže entalpie takového systému je

$$H_\mathrm{f} = U + S \int_0^{x^*} \left((d + x)\rho g + p_\mathrm{a}\right) \mathrm{d}x = U + S\left(\left(d x^* + \frac{{x^*}^2}{2}\right)\rho g + p_\mathrm{a} x^*\right) .$$

Na začátku jsme ovšem měli systém (vzduch ve sklenici) s entalpií

$$H_\mathrm{i} = U + S p_\mathrm{a} h .$$

Vnitřní energie plynu se nezměnila, protože se jedná o izotermický děj. Na změnu entalpie jsme proto vykonali práci

$$H_\mathrm{f} - H_\mathrm{i} = S\left(\left(d x^* + \frac{{x^*}^2}{2}\right)\rho g + p_\mathrm{a} x^* - p_\mathrm{a} h\right) .$$

Dosazením z rovnice ${x^*}^2 \rho g + d x^* \rho g + p_\mathrm{a} x^* = p_\mathrm{a} h$ můžeme předchozí výraz upravit na

$$H_\mathrm{f} - H_\mathrm{i} = -\rho g S \frac{{x^*}^2}{2} .$$

Ještě jsme ovšem vykonali práci ke stlačení plynu, což je při izotermickém ději

$$W_\mathrm{s} = \int_h^{x^*} p \,\mathrm{d}x = \int_h^{x^*} \frac{p_\mathrm{a} h}{x} \,\mathrm{d}x = p_\mathrm{a} h \ln \frac{h}{x^*} .$$

Tato práce odešla ze sklenice skrz stěny ve formě tepla do okolního rezervoáru vody. Celkově jsme tak vykonali práci

$$W_\mathrm{celk} = -\rho g S \frac{{x^*}^2}{2} + p_\mathrm{a} h \ln \frac{h}{x^*} .$$

Přímý výpočet pomocí sil

Abychom sklenici mohli ponořit, musíme na ni působit silou směrem dolů. V tom nám pomáhá atmosférický tlak a později, jak je dno sklenice ponořené, tak i hydrostatický tlak vody nad sklenicí. Naopak na sklenici působí tlak vzduchu uvnitř, který je stejný jako součet hydrostatického a atmosférického tlaku v místě, kde voda na vzduch ve sklenici tlačí.

Řešení opět rozdělme na dvě části, první, když je část sklenice ještě nad vodou a druhé, kdy už je celá sklenice pod vodou. Pro první případ má síla, kterou musíme překonat pro další ponoření sklenice, tvar

$$F_1 = S\left(p - p_\mathrm{a}\right) ,$$

ve druhém pak přibyde hydrostatické působení na dno sklenice

$$F_2 = S\left(p - \left(y\rho g + p_\mathrm{a}\right)\right) ,$$

kde p je tlak uvnitř sklenice. Rovnice pro rovnost tlaků na hladině vody ve sklenici je v obou případech

$$\left(x + y\right)\rho g + p_\mathrm{a} = p = \frac{p_\mathrm{a} h}{x} ,$$

kde $y \in [-h, 0]$ a x je stále výška vzduchu ve sklenici. Označení x^* necháme pro takovou výšku x, kterou zaujme vzduch v případě ponoření pod hladinu d, tedy stejně jako v předchozích případech. Znovu najdeme výšku x_0 v okamžiku, kdy se sklenice celá ponoří pod vodu, jako $x_0 = (-p_\mathrm{a} + \sqrt{p_\mathrm{a}^2 + 4\rho g p_\mathrm{a} h})/(2\rho g)$.

Když silou F_1 posuneme sklenici dolů po dráze $\mathrm{d}y$, vykonáme práci

$$\mathrm{d}W_1 = F_1\,\mathrm{d}y = S\left(p - p_\mathrm{a}\right)\mathrm{d}y .$$

Z rovnosti tlaku ve sklenici a na hladině vody ve sklenici můžeme pro diferenciál práce psát

$$\mathrm{d}W_1 = S p_\mathrm{a}\left(\frac{h}{x} - 1\right)\mathrm{d}y .$$

Práce vykonaná touto silou slouží jednak k posunutí sklenice hlouběji a jednak ke stlačení vzduchu uvnitř. Stojíme ovšem před otázkou, podle jaké proměnné budeme integrovat? Podle x, nebo podle y? V předchozích řešeních jsme viděli, že výsledek měl kompaktní tvar pro x^*, budeme proto integrovat v proměnné x, což by mělo být matematicky jednodušší. Následně vyzkoušíme integrovat i podle y, abychom si ukázali, že vhodná volba proměnné je důležitá z hlediska matematické obtížnosti. Nyní však musíme vyjádřit $\mathrm{d}y(x)$. Z proměnných v rovnici pro tlaky uděláme diferenciály a dostaneme

$$\left(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\right)\rho g = -\frac{p_\mathrm{a} h}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = -\frac{p_\mathrm{a} h + x^2 \rho g}{x^2 \rho g}\,\mathrm{d}x .$$

Vidíme, že změna vnitřního objemu je záporná, když se posouváme se sklenicí hlouběji, což je výsledek, který bychom očekávali.

Práce potřebná k ponoření celé sklenice pod vodu pak je daná integrálem ze síly F_1

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -Sp_\mathrm{a}\int_h^{x_0}\left(\frac{h}{x}-1\right)\frac{p_\mathrm{a}h+x^2\rho g}{x^2\rho g}\,\mathrm{d}x = \\
&= Sp_\mathrm{a}\int_{x_0}^{h}\left(\frac{p_\mathrm{a}h^2}{x^3\rho g}-\frac{p_\mathrm{a}h}{x^2\rho g}+\frac{h}{x}-1\right)\mathrm{d}x = \\
&= Sp_\mathrm{a}\left(-\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}\left(1-\frac{h^2}{x_0^2}\right)+\frac{p_\mathrm{a}}{\rho g}\left(1-\frac{h}{x_0}\right)+h\ln\frac{h}{x_0}-h+x_0\right) = \\
&= Sp_\mathrm{a}\left(\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}\left(1-\frac{h}{x_0}\right)^2+h\ln\frac{h}{x_0}-h+x_0\right).
\end{aligned}
$$

Když sklenici dále posouváme pod hladinu, vykonáme práci

$$
\mathrm{d}W_2 = F\,\mathrm{d}y = S\left(p-(y\rho g+p_\mathrm{a})\right)\mathrm{d}y\,.
$$

Z rovnosti tlaku ve sklenici a na hladině vody ve sklenici můžeme pro diferenciál práce psát

$$
\mathrm{d}W_2 = Sx\rho g\,\mathrm{d}y\,.
$$

Dosazením za dy a integrací dostaneme

$$
\begin{aligned}
W_2 &= S\rho g\int_{x_0}^{x^*} x\,\mathrm{d}y = \\
&= S\rho g\int_{x^*}^{x_0} x\frac{p_\mathrm{a}h+x^2\rho g}{x^2\rho g}\,\mathrm{d}x = \\
&= S\int_{x^*}^{x_0}\frac{p_\mathrm{a}h}{x}\,\mathrm{d}x + S\rho g\int_{x^*}^{x_0} x\,\mathrm{d}x \\
&= Sp_\mathrm{a}h\ln\frac{x_0}{x^*}+S\rho g\frac{x_0^2-{x^*}^2}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Celková vykonaná práce je součtem W_1+W_2, tedy

$$
W_{celk} = Sp_\mathrm{a}h\ln\frac{h}{x^*}-S\rho g\frac{{x^*}^2}{2}+\left(S\rho g\frac{x_0^2}{2}+Sp_\mathrm{a}\left(\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}\left(1-\frac{h}{x_0}\right)^2-h+x_0\right)\right),
$$

kde celá závorka je nulová.

$$
\begin{aligned}
S\rho g\frac{x_0^2}{2}+Sp_\mathrm{a}\left(\frac{p_\mathrm{a}}{2\rho g}\left(1-\frac{h}{x_0}\right)^2-h+x_0\right) &= \\
= S\rho g\frac{x_0^2}{2}+Sp_\mathrm{a}\left(\left(\frac{x_0^2\rho g}{2p_\mathrm{a}}\right)-h+x_0\right) &= \\
= S\rho g x_0^2-hSp_\mathrm{a}+Sp_\mathrm{a}x_0 = 0\,,
\end{aligned}
$$

proto dostáváme náš tradiční výsledek

$$
W_{celk} = Sp_\mathrm{a}h\ln\frac{h}{x^*}-S\rho g\frac{{x^*}^2}{2}\,.
$$

Co by se stalo, kdybychom jako integrační proměnnou zvolili y, a ne x? To naznačíme na výpočtu W_2, který by v tomto případě byl

$$W_2 = S\rho g \int_0^d x \,\mathrm{d}y = S \int_0^d \frac{-(y\rho g + p_\mathrm{a}) + \sqrt{(y\rho g + p_\mathrm{a})^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g}}{2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrál z první závorky v integrandu je jednoduše roven $-\left(y^2\rho g + 2yp_\mathrm{a}\right) \cdot S/4$. Pro výpočet odmocniny bychom ovšem museli volit substituci s hyperbolickým sinem

$$\begin{aligned} \frac{y\rho g + p_\mathrm{a}}{\sqrt{4p_\mathrm{a}h\rho g}} &= \sinh\xi\,, \\ \mathrm{d}y &= \frac{\sqrt{4p_\mathrm{a}h\rho g}}{\rho g}\cosh\xi\,\mathrm{d}\xi\,, \end{aligned}$$

což vede na

$$\begin{aligned} &\frac{S}{2}\int \sqrt{(y\rho g + p_\mathrm{a})^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g}\,\mathrm{d}y = \\ &= S2p_\mathrm{a}h \int \sqrt{\sinh^2\xi + 1}\cosh\xi\,\mathrm{d}\xi = \\ &= S2p_\mathrm{a}h \int \cosh^2\xi\,\mathrm{d}\xi = \\ &= Sp_\mathrm{a}h \int (\cosh 2\xi + 1)\,\mathrm{d}\xi = \frac{Sp_\mathrm{a}h}{2}\sinh 2\xi + Sp_\mathrm{a}h\xi = \\ &= Sp_\mathrm{a}h\sinh\xi\cosh\xi + Sp_\mathrm{a}h\xi\,. \end{aligned}$$

Jednotlivé kroky a seznámení se s hyperbolickými funkcemi necháváme čtenáři za domácí úkol. Zpětným dosazením ze substituce a uvážením integračních mezí dostáváme práci W_2 jako

$$\begin{aligned} W_2 = \frac{S}{4\rho g}&\left((d\rho g + p_\mathrm{a})\sqrt{(d\rho g + p_\mathrm{a})^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g} - p_\mathrm{a}\sqrt{p_\mathrm{a}^2 + 4p_\mathrm{a}h\rho g}\right) \\ &+Sp_\mathrm{a}h\left(\operatorname{argsinh}\frac{d\rho g + p_\mathrm{a}}{\sqrt{4p_\mathrm{a}h\rho g}} - \operatorname{argsinh}\frac{p_\mathrm{a}}{\sqrt{4p_\mathrm{a}h\rho g}}\right) - \frac{S}{4}\left(d^2\rho g + 2dp_\mathrm{a}\right)\,. \end{aligned}$$

Dalšími úpravami bychom se přesvědčili, že dostaneme stejný výsledek jako v předchozí části. Cesta k němu je ovšem matematicky výrazně složitější.

Řešení bonusu

Poté, co jsme si důkladně rozebrali řešení základní části úlohy, je řešení bonusu téměř triviální. Uvažujme, že v původní výšce hladiny H uděláme ve stěně nádoby otvor. Při postupném ponořování skleničky se tak bude voda držet na konstantní výšce H a situace je tak stejná jako v předchozí částí.

Předpokládejme však, že voda, která z nádoby vytéká, nepadá někam dolů, ale držíme ji všechnu ve výšce H. Jakmile ponoříme skleničku až na dno, tak je toto množství vody úměrné objemu vzduchu ve sklenici

$$m_\mathrm{v} = \rho S x^*\,.$$

Abychom však skončili s požadovanou situací, je potřeba vodu dostat zpátky do nádoby. Ta je ale plná až do výšky H, proto je potřeba zvýšit těžiště vytlačené vody. Pro výšku vody poté, co ji vrátíme do sklenice, bude ze zachování objemu platit $A\Delta H = x^* S$, takže na zvednutí jejího těžiště o $\Delta H/2$ potřebujeme vykonat práci

$$W_{\mathrm{zv}} = \frac{m_{\mathrm{v}} g \Delta H}{2} = \frac{\rho S^2 {x^*}^2 g}{2A} \, .$$

Ponořením samotné sklenice o hmotnosti m jsme ještě získali práci

$$W_{\mathrm{pon}} = mgH \, ,$$

neboť se její těžiště snížilo o H. Celková práce, která je potřebná k ponoření hmotné sklenice na dno nádoby tak je

$$W_{\mathrm{bonus}} = S\left(-\rho g \frac{{x^*}^2}{2} + p_{\mathrm{a}} h \ln \frac{h}{x^*}\right) + \frac{\rho S^2 {x^*}^2 g}{2A} - mgH \, .$$

Po dosazení $d = H - h$ do $x^* = \left(-\left(d\rho g + p_{\mathrm{a}}\right) + \sqrt{\left(d\rho g + p_{\mathrm{a}}\right)^2 + 4 p_{\mathrm{a}} h \rho g}\right)/(2\rho g)$ a následně do předchozí rovnice dává

$$W_{\mathrm{bonus}} = \frac{S}{8\rho g}\left(\frac{S}{A} - 1\right)\left(-\left(\left(H-h\right)\rho g + p_{\mathrm{a}}\right) + \sqrt{\left(\left(H-h\right)\rho g + p_{\mathrm{a}}\right)^2 + 4 p_{\mathrm{a}} h \rho g}\right)^2$$
$$+ p_{\mathrm{a}} S h \ln \frac{2\rho g h}{-\left(\left(H-h\right)\rho g + p_{\mathrm{a}}\right) + \sqrt{\left(\left(H-h\right)\rho g + p_{\mathrm{a}}\right)^2 + 4 p_{\mathrm{a}} h \rho g}} - mgH \, .$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha III.P ... bleskem

9 bodů; průměr 5,20; řešilo 46 studentů

Řešení této úlohy naleznete již brzy na našem webu: `https://fykos.cz/`.

Úloha III.E ... akustický teploměr

12 bodů; průměr 8,35; řešilo 49 studentů

Řešení této úlohy naleznete již brzy na našem webu: `https://fykos.cz/`.

Úloha III.S ... vážení riešitelia

10 bodů; průměr 5,43; řešilo 67 studentů

Řešení této úlohy naleznete již brzy na našem webu: `https://fykos.cz/`.

Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete
na `https://fykos.cz`.

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: https://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

/FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.