Úloha VI.3 ... odporné bipyramidky

5 bodů; průměr 2,46; řešilo 46 studentů

V drátěném modelu pravidelného $2N$-stěnného dvojjehlanu jsou vodivá spojení v rovině symetrie tvořena odpory R_2, zatímco spojení jdoucí z jednoho z vrcholů do bodu v pravidelném N-úhelníku mají odpor R_1. Určete odpor mezi
a) hlavními vrcholy (nad a pod rovinou základny),
b) sousedními vrcholy v rovině základny,
c) protějšími vrcholy v rovině základny (ty nejvzdálenější) pro N sudé.

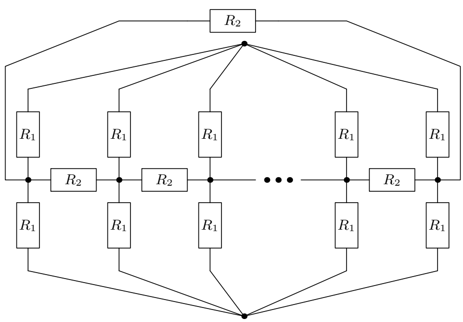
Karel chtěl N-gonální bipyramidy.

Všechny podúlohy se dají řešit mnoha způsoby. Obecně však budeme hledat symetrie, které nám pomohou v řešení. Některé větve obvodu budeme moct rovnou vypustit z výpočtu, protože jimi nepoteče proud. Jiná symetrie nám pomůže tak, že bude stačit vypočítat pouze část obvodu. Pro přehlednost uvažujme, že rovina základny (dále označovaná jako hlavní) leží vodorovně a zbývající dva vrcholy jehlanů leží jeden nad a jeden pod hlavní rovinou.

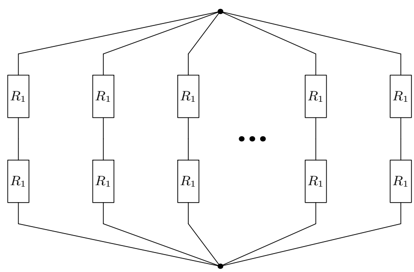
Mezi hlavními vrcholy

Připojíme-li zdroj napětí na hlavní vrcholy, pak všechny odpory ležící v hlavní rovině budou na stejném potenciálu. To je dané tím, že u každého vrcholu je stejný poměr odporů nad rovinou a pod rovinou. Když je ve větvi nulový rozdíl potenciálů mezi uzly, větví neteče proud a můžeme tyto větve z obvodu vynechat a schéma zjednodušit. Na obrázku 2 vidíme, že se nám situace zjednodušila na takovou, kde máme N paralelně zapojených větví a v každé z nich jsou dva dráty s odporem R_1. Celkový odpor zapojení je tedy:

$$\frac{1}{R_{aN}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2R_1} \implies R_{aN} = \frac{2R_1}{N} \,.$$



Obr. 1: Schéma pro zapojení přes sousední vrcholy základny.



Obr. 2: Zjednodušené schéma pro zapojení dvojjehlanu přes hlavní vrcholy; vertikálních větví je N.

Mezi sousedními vrcholy v rovině základny

Následující 2 podúlohy (nejspíš) neumíme obecně vyřešit tak jako část a), ale s trochou představivosti můžeme nalézt algoritmus, jakým lze úlohu manuálně vypočítat pro předem dané

N. Jako bonus si ukážeme, jak takový algoritmus zapsat rekurzivně pomocí rovnic, což nám umožní jednodušeji nalézt obecné řešení pro $N+k$.

N **sudé** V tomto případě je objekt souměrný podle roviny, která je kolmá na úsečku spojující připojené sousední vrcholy a nachází se v její polovině. Označme ji za vertikální rovinu souměrnosti. Úsečky, které vedou z hlavní roviny do horního vrcholu můžeme rozdělit do dvojic, které jsou podle ní souměrné. Jedním z těchto drátů teče proud do horního hlavního vrcholu a druhým z něj vytéká pryč, přičemž velikost těchto proudů musí být ze symetrie stejná. Proto můžeme uvažovat, že v horním hlavním vrcholu nemají tyto drátky elektrický styk s ostatními, které jsou z jiných vrcholů N-úhelníku. Na výsledný odpor této části obvodu to nebude mít vliv. Analogická úvaha platí i pro spodní poloprostor.

Nyní zavedeme ještě jedno značení. Objekt orientujeme tak, že úsečku, na kterou je připojeno napětí, budeme nazývat přední. Úsečku přímo na druhé straně N-úhelníku budeme nazývat zadní. K samotnému výsledku se potom můžeme dopracovat tak, že budeme postupovat od zadní části úsečky k přední.

Začněme tedy u zadní úsečky. Z každého jejího konce vedou dva dráty do hlavních vrcholů, jeden dolů a jeden nahoru. Jak jsme již zmínili, spojení těchto drátů v hlavních vrcholech můžeme díky symetriím oddělit od zbytku odporu. Pro celkový odpor mezi konci zadní úsečky R_z pak bude jednoduše platit

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_1}\,,$$

jelikož se jedná o paralelní zapojení tří obvodů o odporech R_2 (odpor zadní úsečky), $2R_1$ (cesta z jednoho konce úsečky na druhý přes horní vrchol) a znovu $2R_1$ (analogicky přes spodní vrchol).

Nyní postupujme směrem k přední úsečce. V rovině základny vedou od zadní úsečky dva vodiče s odpory R_2 a na konci právě zmíněných vodičů jsou body, ze kterých znovu vedou vodiče do hlavních vrcholů. Chceme spočítat, jaký odpor bude teď mít tato rozšířená „zadní část“ obvodu, připojíme-li ke každému jejímu konci zdroj napětí. Stejně jako předtím můžeme tuto část v hlavních vrcholech oddělit od zbytku obvodu. Máme zde potom opět paralelní zapojení tří větví. Dvě z nich mají odpor $2R_1$ a v té poslední, která leží v hlavní rovině, máme sériově zapojený obvod s odporem R_z a dva vodiče s odpory R_2. Označíme-li si R_{z3} jako odpor mezi těmito body (3 v indexu značí, že jsme započítali 3 hrany N-úhelníku), pak platí:

$$\frac{1}{R_{z3}} = \frac{1}{R_2 + R_2 + R_z} + \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_1}\,.$$

Analogicky pak můžeme postupovat dále a dále a získávat odpory $R_{z2}, R_{3z3}, \ldots$, až dokud nespočteme $R_{z(N-1)}$. K tomuto odporu stačí paralelně připojit odpor R_2, který se nachází na přední úsečce, a máme vyhráno.

$$\frac{1}{R_{bN}} = \frac{1}{R_{z(N-1)}} + \frac{1}{R_2}$$

Nyní se přesuňme na rekurzi. Uvažujme, že známe $R_{b(N-2)}$ a toužíme znát R_{bN}. Od $R_{b(N-2)}$ nám paralelně stačí odečíst R_2 (čímž získáme $R_{z(N-3)}$), sériově dvakrát přičíst R_2 a k tomuto celému paralelně přičíst dvakrát $2R_1$ (čímž získáme $R_{z(N-1)}$) a nakonec jednou R_2. Zapsáno v rovnici

$$\frac{1}{R_{bN}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_2 + \left(\frac{1}{R_{b(N-2)}} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}}\,.$$

Zavedeme označení

$$G_{bK} = \frac{R_1}{R_{bK}}$$

a pro další přehlednost poměr

$$p = \frac{R_1}{R_2}\,.$$

Potom rekurentní rovnici píšeme ve tvaru

$$R_1\,\frac{1}{R_{bN}} = 1 + p + p\frac{G_{bN-2} - p}{2G_{bN-2} - p}\,.$$

Zbývá určit počáteční podmínku. Nejnižší možné $N - 2$ je 4, protože zadání hovoří o jehlanu. Pak vychází

$$G_{b4} = 1 + p + \frac{p\,(p+1)}{3p+2}\,.$$

Navíc teď, když známe rekurentní rovnici a její počáteční podmínku, si můžeme (částečné) obecné řešení pro sudá N nechat spočítat programem Mathematica

$$R_{bN} = R_2\left(\frac{2}{\sqrt{2p+1}\left(1-\left(\frac{-p+\sqrt{2p+1}-1}{p^2}\right)^{-N/2}\left(-\frac{p+\sqrt{2p+1}+1}{p^2}\right)^{N/2}\right)} - \frac{1}{\sqrt{2p+1}} + 1\right)\,.$$

Nyní se dostaneme k případu, kdy N je liché.

N **liché** Znovu předpokládejme orientaci objektu tak, že napětí je připojené k přední přímce. Nyní už nemáme zadní přímku, ale zadní bod, ze kterého vedou vodiče s rezistory do hlavních vrcholů. Vzhledem k symetrii si můžeme rozmyslet, že těmito vodiči nepoteče proud (!) „Zadním bodem“ totiž musí v rovině základny vytékat stejný proud, jaký do něj vtéká, a zároveň nemůže těmito vodiči proud z jednoho hlavního vrcholu vytékat do druhého nemůže proud zase vtékat, protože by to porušilo symetrii.

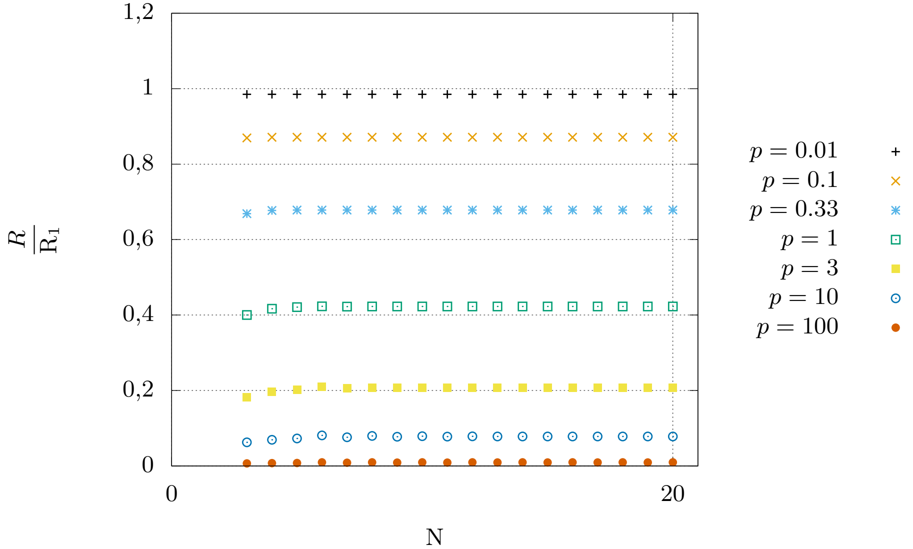
Vodiče ze zadního do hlavních vrcholů tak nemusíme uvažovat. Jinak budeme postupovat naprosto stejně jako v případě, kdy N bylo sudé, jen s tím rozdílem, že odpor na „zadní úsečce“ je teď $2R_2$ (zadní úsečka je teď v podstatě mezi těmi body v hlavní rovině, ze/do kterých teče proud do/z hlavních vrcholů).

Znovu použijeme rekurentní rovnici z předchozí části. Nejmenší liché N, pro které má úloha smysl řešit, je $N = 3$. Z přechozích komentářů můžeme odvodit, že odpor pro takový útvar je

$$R_{b3} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_1}\right)^{-1} = \frac{R_1}{\frac{3}{2}p + 1}$$

Rekurentní posloupnost začíná na jiném členu, proto je evidentní, že jsme museli příklad rozdělit na dva případy. Obecné řešení si opět můžeme nechat spočítat:

$$R_{bN} = \frac{2R_1}{\frac{2\sqrt{2p+1}}{\left(\frac{-1-p+\sqrt{2p+1}}{p^2}\right)^{-(N-1)/2}\left(-\frac{1+p+\sqrt{2p+1}}{p^2}\right)^{(N-1)/2} - 1} + \sqrt{2p+1} + 2p + 1}$$



Obr. 3: Závislost odporu v úloze b) na N a na p.

Mezi protějšími vrcholy v základně

Když budeme hledat odpor mezi protějšími vrcholy v hlavní rovině, bude řešení dost podobné. Objekt si umístíme tak, aby jeden z vrcholů, mezi kterými počítáme odpor, byl přední a druhý zadní. Mezi těmito vrcholy, kolmo k hlavní rovině, vede rovina symetrie (říkejme jí třeba první rovina symetrie). Kolmo na tuto rovinu a na hlavní rovinu vede středem N-úhelníku další rovina symetrie (kterou budeme označovat jako druhou). Řešení se bude dále lišit podle případů, kdy N je dělitelné čtyřmi a kdy není. Je totiž rozdíl, jestli druhá rovina symetrie protíná N-úhelník v jeho vrcholu, nebo půlí některou jeho stranu.

N není dělitelné čtyřmi Jestliže N není dělitelné čtyřmi, pak druhá rovina symetrie protíná N-úhelník v polovině jedné z úseček (těm budeme říkat krajní). Při výpočtu postupujme právě od této úsečky, což bude analogické předchozí části. Z jednoho konce krajní úsečky opět poteče proud přes hlavní vrchol do druhého a vodivý kontakt v hlavním vrcholu nemusíme uvažovat.

Celý objekt mezi předním a zadním vrcholem si rozdělíme na čtyři větve. Dvakrát máme větev, která jde z předního přes hlavní vrchol do zadního a dvakrát máme krajní větve. Celkový odpor je tvořen paralelním zapojením těchto čtyř větví. Opět sestavíme rekurzivní rovnici. Předpokládejme, že známe odpor $R_{c(N-4)}$. Pomocí něj spočítáme odpor jedné krajní větve tak, že jeho převrácenou hodnotu vydělíme dvěma a odečteme větev (jednu) jdoucí přes hlavní vrchol. Pak už jen stačí paralelně dvakrát připojit části jdoucí přes hlavní vrchol (každá o odporu $2R_1$) a sériově $2R_2$, čímž získáme odpor zvětšené krajní větve. Nakonec znovu paralelně spojíme s druhou stejnou větví a s cestou přes hlavní vrcholy. Máme vyhráno. V rovnici to můžeme zapsat jako

$$\frac{1}{R_{cN}} = \frac{2}{2R_1} + \frac{2}{2R_2 + \left(\frac{2}{2R_1} + \frac{1}{2R_{c(N-4)}} - \frac{1}{2R_1}\right)^{-1}}\,.$$

Zavedeme stejné substituce jako v minulé části a rovnici upravíme na tvar

$$G_{cN} = 1 + p\frac{\left(1 + G_{c(N-4)}\right)}{1 + p + G_{c(N-4)}}\,.$$

Nejmenší N je $N = 6$. Pro něj je hledaný odpor

$$R_{c6} = \left(2\frac{1}{2R_1} + 2\frac{1}{2R_2 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}\right)^{-1} = \frac{R_1}{1 + 2p\frac{1+p}{2p(1+p)+p}}\,,$$

což odpovídá

$$G_{c6} = 1 + 2p\frac{1+p}{3p+2}\,.$$

Je pozoruhodné, že bychom tento výsledek dostali dosazením

$$G_{c2} = G_{b2} = 2p + 1\,.$$

do rekurze. S touto počáteční podmínkou je ale obecné řešení i tak příliš škaredé.

N **dělitelné čtyřmi** Jestliže N je dělitelné čtyřmi, pak druhá rovina symetrie protíná N-úhelník v jednom z vrcholů. Stejně jako předtím z tohoto vrcholu díky symetrii nepoteče proud do hlavních vrcholů, a tyto vodiče tak můžeme vynechat. Rekurze je pak stejná jako v předchozí části.

Nejmenší N je zde $N = 4$, pro něž platí:

$$R_{c4} = \left(\frac{1}{2R_2} + \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_1}\right)^{-1} = \frac{R_1}{p+1}\,,$$

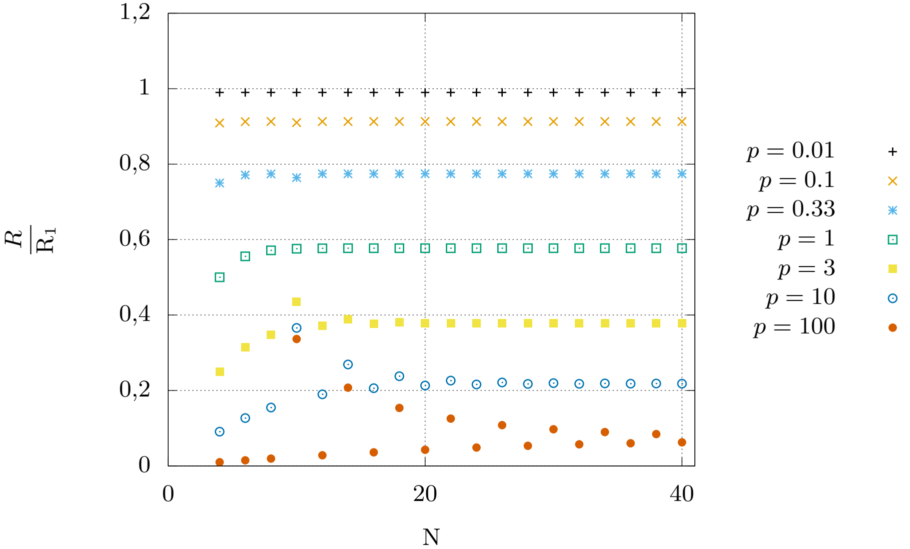
což odpovídá

$$G_{c4} = p + 1 \implies$$

$$\implies R_{cN} = \frac{R_1}{\frac{2\sqrt{2p+1}}{\left(\frac{-1-p+\sqrt{2p+1}}{p^2}\right)^{-N/4}\left(-\frac{1+p+\sqrt{2p+1}}{p^2}\right)^{N/4} - 1} + \sqrt{2p+1}}\,.$$

Vidíme, že pro $N \to \infty$ hodnota odporu v obou podúlohách konverguje. Tuto limitu můžeme spočítat, položíme-li rovnost $R_{bN} = R_{bN-2}$, případně $R_{cN} = R_{cN-4}$ a dosadíme do rekurentních rovnic. Dostáváme

$$R_{b\infty} = R_1\frac{2}{2p + 1 + \sqrt{2p+1}} \quad \text{a} \quad R_{c\infty} = R_1\frac{1}{\sqrt{1+2p}}\,.$$



Obr. 4: Závislost odporu v úloze c) na N a na p.

Jakub Mikeš
`jakub.mikes@fykos.cz`

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.