

Úloha III.E ... vybíjená

13 bodů; průměr 6,85; řešilo 39 studentů

Třením nabijte předmět a poté proměřte závislost jeho samovolného vybíjení na čase. Určete elektrickou vodivost vzduchu. Uvažujte, že velikost náboje se mění jako

$$Q = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t},$$

kde Q_0 je počáteční náboj, ϵ je permitivita vzduchu a σ je hledaná vodivost.

Nápověda: Zavěste na tenké dlouhé vlákno malý kovový předmět (např. matičku). Třením nabijte brčko a přenechte část náboje na předmět. Měl by se od brčka začít odpuzovat. Z jejich vzájemné vzdálenosti pak určíte součin nábojů a poté vodivost.

Jarda se tak dlouho pokoušel měřit náboj, až celou úlohu předělal na měření vodivosti.

Úvod a teoretický základ

Experiment lze naměřit tak, jak je uvedeno v nápovědě. Ve vztahu pro rychlost vybíjení v zadání není žádná závislost na tvaru předmětů. Budeme proto dále předpokládat, že tvar ani poloha předmětů nehrají při ztrátě náboje žádnou roli. Použijeme dvě matičky ze stavebnice Merkur, které přivážeme na dlouhou niť. Tu přehodíme přes tyčku a matičky umístíme do stejné výšky. Plastové brčko třením o papírový kapesník nabijeme a dotykem s matičkami přeneseme část náboje na ně. Brčko můžeme nabít ještě jednou a položíme jej mezi obě matičky, které by se nyní měly odpuzovat od sebe a od brčka, které jsme upevnili. Může se stát, že se jedna z matiček elektristicky „přilepí“ k brčku, zatímco druhá matička začne být odpuzována. Na naše měření závislosti náboje na čase to ale nebude mít vliv, protože tvar předmětů nehraje roli.

Ačkoli postup vysvětlený v předchozím odstavci funguje, ve svém řešení jsme nakonec použili pouze jednu zavěšenou matičku (viz obrázek dále), kterou jsme nechali se odpuzovat od brčka. To jsme umístili co nejbližší původnímu místu, kde se matička nacházela. Polohu matičky budeme fotoaparátlem snímat po dobu několika minut, během kterých dojde k samovolnému vybití nábojů na brčku i na matičce.

Nyní se zaměříme na geometrii experimentu a na to, jak díky ní získat informaci o náboji.

Protože odchylka matičky od kolmice byla vždy malá, můžeme uvažovat $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ a $\cos \alpha \approx 1$. Pak tedy $\alpha = d/l$, kde l je délka závěsu a d je průběžná vzdálenost středů matičky a brčka.

Na matičku působí odpuzující elektrostatická síla F_e , tíhová síla F_G a tahová síla závěsu T . V aproximaci malého úhlu α působí F_e vodorovně a vyrovná se se složkou tahové síly $T\alpha$, zatímco tíhová se vyrovná s vertikální složkou $T \cos \alpha \approx T$. Z jedné rovnice pak vyjádříme T a dosadíme do druhé, čímž dostaneme $F_e = m g \alpha$.

Nyní nastává potíž, jak vyjádřit elektrickou sílu F_e . Nemůžeme zde jednoduše použít Coulombův zákon, protože nemáme bodové zdroje náboje. Elektrickou sílu se pokusíme spočítat pomocí vztahu $F_e = E Q_m$, kde Q_m je náboj na matičce a E je elektrická intenzita vyvolaná nábojem na brčku. Tu v závislosti na vzdálenosti od středu brčka odhadneme vztahem

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon d},$$

kde λ je délková hustota náboje na brčku, kterou považujeme za homogenní (lepší odhad nemáme). Brčko přitom považujeme za dlouhý tenký drát.

Z rovnosti sil tak můžeme vyjádřit závislost mezi nábojem a vzdáleností d jako

$$mg\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon d}Q_m \Rightarrow \frac{2\pi\epsilon mg}{l}d^2 = \lambda Q_m.$$

Jestliže na začátku měření byl na matičce náboj Q_{m0} a na brčku nábojová hustota λ_0 , můžeme pravou stranu rovnice zapsat jako

$$\lambda Q_m = \lambda_0 e^{-\sigma t/\epsilon} Q_{m0} e^{-\sigma t/\epsilon} = \lambda_0 Q_{m0} e^{-2\sigma t/\epsilon}.$$

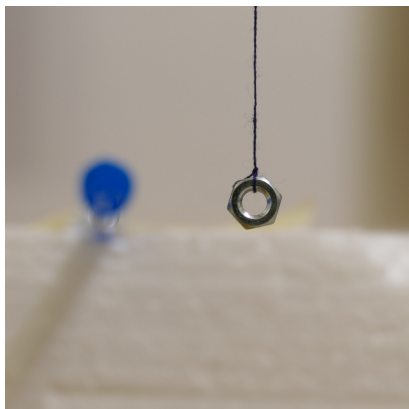
Závislost vzájemné vzdálenosti d na čase pak vyjádříme jako

$$d = \sqrt{\frac{l\lambda_0 Q_{m0}}{2\pi\epsilon mg}} e^{-\sigma t/\epsilon}.$$

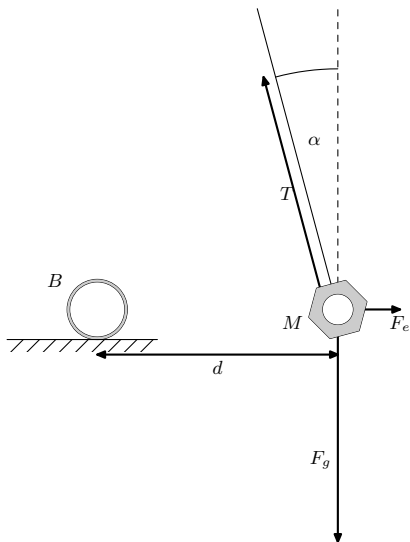
Vzdálenost by tak měla v čase klesat exponenciálně rychle.

Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

Vzdálenost jsme určovali pomocí fotoaparátu, který jsme nechali na stálém místě. Ten každých 10 s udělal snímek polohy matičky vůči brčku (viz obrázek níže). Matičku jsme zavěsili na dlouhé vlákno a zaznamenali si, kde je její stabilní poloha. Nabili jsme brčko třením a dotekem s matičkou jsme část náboje přenesli. Matička se začala od brčka odpuzovat. Brčko jsme umístili tak, aby bylo těsně vedle stabilní polohy matičky, tedy aby po vybití veškerého náboje bylo vlákno svislé a matička v původní stabilní poloze.



Obr. 1: Fotografie provádění experimentu.



Obr. 2: Nákres situace s důležitými prvky. Velikosti veličin nejsou v měřítku.

Hmotnost použité matičky je přibližně $m = 0,4$ g a délka závěsu činila $l = 76$ cm. Vzdálenost protějších rovnoběžných stran matičky je $r = 0,6$ cm.

V programu *Geogebra* jsme pak změřili u každé fotografie vzdálenost středů matičky a brčka. Tu jsme naměřili v relativních jednotkách. Pomocí rozměru matičky v reálném světě a v relativních jednotkách jsme jednoduše schopni přepočítat vzdálenosti na fotografii na reálné centimetry pomocí trojčlenky

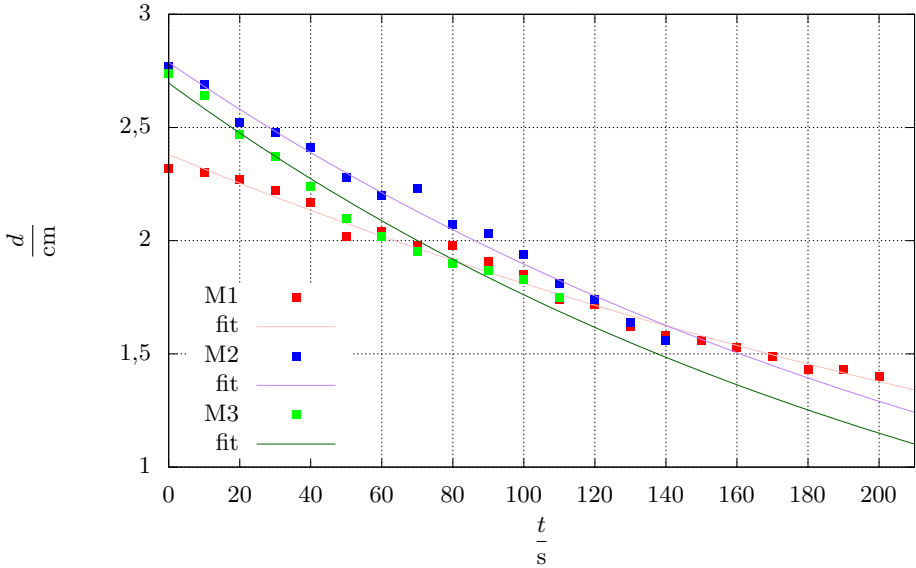
$$d = \frac{r}{r'} d',$$

kde r je rozměr matičky v centimetrech a čárkované veličiny jsou udávány v relativních jednotkách na fotografii. Relativní jednotka na fotografii byla zvolena tak, aby byl přepoččet triviální, tedy $r' = 0,6$, což odpovídalo již výše zmíněnému průměru matičky $r = 0,6$ cm.

Byla provedena tři (použitelná) měření. V jistém okamžiku přibližování matičky k brčku jsme viděli změnu chování – matička se rychle přiblížila k brčku a "přilepila" se k němu – začala působit přitažlivá síla. Chybu jednotlivých vzdáleností na fotce odhadneme na 0,1 cm, pro názorné grafické zpracování však v tabulce udáváme hodnoty na tři platné číslice. V grafu nevykreslujeme chybové úsečky, protože jejich hodnota by byla všude stejná a navíc jsme ji jen odhadli.

Tab. 1: Závislost vzdálenosti mezi matičkou a brčkem na čase. Hodnoty jsou uvedeny po přepočtu z relativních jednotek. Pro názornost poklesu je necháváme zapsané na tři platné číslice.

$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$
0	2,32	2,77	2,74
10	2,30	2,69	2,64
20	2,27	2,52	2,47
30	2,22	2,48	2,37
40	2,17	2,41	2,24
50	2,02	2,28	2,10
60	2,04	2,20	2,02
70	1,98	2,23	1,95
80	1,98	2,07	1,90
90	1,91	2,03	1,87
100	1,85	1,94	1,83
110	1,74	1,81	1,75
120	1,72	1,74	0
130	1,62	1,64	0
140	1,58	1,56	0
150	1,56	1,45	0
160	1,53	1,10	0
170	1,49	0,51	0
180	1,43	0	0
190	1,43	0	0
200	1,40	0	0



Obr. 3: Závislost vzdálenosti mezi matičkou a brčkem na čase.

Všechny tři závislosti vyneseme do grafu a proložíme je exponenciálou. Pro měření číslo 2 nebudeme zohledňovat poslední tři datové body, protože zcela evidentně se systém začal chovat podle jiných zákonů. V měření 2 a 3 máme méně datových bodů, protože se matička přitáhla k brčku dříve než při měření 1.

V programu *Gnuplot* jsme závislosti proložili exponenciálou a zobrazili si jejich rovnice ve tvaru

$$y = Ae^{Bt}. \quad (1)$$

Koeficienty jsou určeny parametry podle rovnice 1. Chyby těchto koeficientů jsou též vypočítané programem *Gnuplot*.

Tab. 2: Parametry fitování. Symbolem Δ jsou označeny chyby příslušných veličin.

Parametr	Měření 1	Měření 2	Měření 3	Průměr
$\frac{A}{\text{cm}}$	238	290	270	
$\frac{\Delta A}{\text{cm}}$	2	10	3	
$\frac{B}{\text{s}^{-1}}$	$-2,7 \cdot 10^{-3}$	$-3,8 \cdot 10^{-3}$	$-4,3 \cdot 10^{-3}$	$-3,6 \cdot 10^{-3}$
$\frac{\Delta B}{\text{s}^{-1}}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$

Počítat průměr pro hodnotu parametru A nedává smysl, protože tento parametr závisí na počátečním náboji, který je pro každé měření jiný. Naopak B by mělo být ve všech případech podobné a rovné zlomku $-\sigma/\varepsilon$. Vodivost vzduchu tak dostaneme jako

$$\sigma = -B\varepsilon = (3,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-14} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Dosadili jsme $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$, neboť permitivita vzduchu je blízka permitivitě vakua a při naší přesnosti měření způsobí toto zaokrouhlení zanedbatelnou chybu.

Relativní chyba vodivosti σ je zde stejná, jako relativní chyba parametru B , protože obě tyto veličiny se liší jen přenásobením konstantou ε , která má chybu řádově menší a můžeme ji zanedbat. Chyba parametru B , v tabulce výše ve sloupečku s označením *Průměr* je určena jako směrodatná odchylka aritmetického průměru parametru B .

Diskuze

Samotný experiment byl poměrně obtížně proveditelný. Ne vždy se totiž náboj přenesl z brčka na matičku tak, jak jsme potřebovali, a k odpuzování tak nedošlo. Často se dokonce stávalo, že se matička k brčku celou dobu přitahovala. Jen v několika málo případech se experiment povedl tak, jak bylo zamýšleno. Ovšem i v průběhu těchto měření převládaly přitažlivé síly a matička se na brčko nakonec přilepila. Jakmile se totiž náboj na ní částečně vybil, vlivem elektrostatické indukce se zbytek náboje přeuspořádal. Jestliže bylo brčko a matička nabitý jedním druhem náboje, tak se na matičce na straně směrem k brčku indukoval náboj opačného znaménka. Ačkoli jeho celková velikost mohla být menší než velikost náboje opačného znaménka na matičce, tak byl blíže brčku, takže převážila elektrostatická síla opačným směrem.

Rozměry předmětů hrají velkou roli při navrhování vhodného modelu pro danou situaci. Podle vztahu ze zadání na tvaru tělesa nezávisí, neznáme ovšem rozložení náboje na tělesu, velikost a ani působíště elektrostatické síly.

V použitém modelu jsme předpokládali, že brčko je rovnoměrně nabitý dlouhý drát. Je ale velmi nepravděpodobné, že bychom brčko nabili aspoň přibližně homogenně po jeho nějaké delší části. Kousek náboje jsme navíc hned přenesli na matičku. Ta se v průběhu experimentu nenacházela příliš daleko od brčka, proto nemůžeme zanedbat jeho válcovitý tvar. Zároveň také brčko není „velmi dlouhé“ v porovnání s měřítkem experimentu a zřejmě bychom měli počítat s jeho konečnými rozměry, to je ale matematicky mnohem náročnější.

Podobný problém nastává u matičky. V navrženém modelu jsme ji považovali za bodový náboj s polohou uprostřed. Ani matička ale nemá rozměry zanedbatelné vůči měřítku experimentu, proto je tento model poměrně odvážný. Zároveň je vyrobena z vodivého materiálu, takže se na ní náboj může přeuspořádat a působíště elektrostatické síly tak mění svoji polohu.

Podle zadání úlohy jsme měli proměřit závislost vybíjení na čase. Tuto formulaci můžeme také brát tak, že proměříme závislost celkového náboje na čase. V rámci svého experimentu ovšem od sebe nejsme schopni oddělit jednotlivé náboje v součinu $Q_m \lambda$. Dle teorie v zadání se ale oba náboje vybíjí stejně rychle, takže zadání splňuje i závislost $\sqrt{Q_m \lambda}$ na čase. A protože dle našeho modelu je $\sqrt{Q_m \lambda}$ přímo úměrné vzdálenosti d , tak vynesením d do grafu jsme vlastně vynesli i závislost $\sqrt{Q_m \lambda}$ na čase, pouze v jiných jednotkách.

Z naměřených hodnot tedy pozorujeme, že náboj, který způsobíme třením, ztratí předměty v řádu jednotek minut. V běžném životě nás tedy tyto jevy výrazně nelimitují.

Porovnejme ještě námi naměřenou hodnotu vodivosti vzduchu $(3,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-14} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ s příklady uvedenými na internetu. Anglická wikipedie¹ uvádí rozmezí $1 \cdot 10^{-15} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ až $1 \cdot 10^{-9} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_resistivity_and_conductivity.

při pokojové teplotě, velmi tedy závisí na dalších parametrech vzduchu, například na vlhkosti. Jinde² můžeme nalézt rozmezí $3 \cdot 10^{-15} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ až $8 \cdot 10^{-15} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$. Nyní se ale ještě vraťme k předchozí diskuzi našeho modelu a uvědomme si, že jsme předpokládali, že síla mezi brčkem a matickou je úměrná d^{-1} , což pravděpodobně není pravda. Síla bude závislá na rozměru brčka, a i když tuto závislost aproximujeme na daném rozsahu mocninnou funkcí, bude hodnota v exponentu pravděpodobně vyšší (v absolutní hodnotě, protože při konečných rozměrech se brčko chová alespoň trochu více jako bodový zdroj). Velikost tohoto exponentu se promítne do naměřené vodivosti přímo úměrně, tedy kolikrát bude větší exponent, tolikrát bude větší vodivost.

Další nepřesnost je způsobena předpokladem $\alpha = d/L$, který je poměrně obtížné splnit, je potřeba přesné umístění brčka vůči maticce. Také vůbec definice vzdálenosti d , na kterou elektrostatická síla působí, jako vzdálenosti středů obou těles nemusí být správná, protože v maticce se náboj může volně pohybovat a nemůžeme si být jisti, že působiště síly je přesně ve středu.

Přes všechny tyto nepřesnosti však můžeme konstatovat, že jsme vodivost vzduchu určili aspoň řádově dobře a máme představu, jak je velká (nebo spíše malá, naměřili jsme něco o velikosti $1 \cdot 10^{-14} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$, i když samozřejmě závisí na definici jednotek). Také tedy už víme, že vzduch je izolant, protože konduktivita je malá.

Závěr

Sestavili jsme experiment dle nápovědy v zadání a proměřili vzdálenost maticky od brčka v závislosti na čase. Určení náboje je pak podle zvoleného modelu úměrné této vzdálenosti. Po proložení dat exponenciálou jsme určili vodivost vzduchu za normálních podmínek jako $(3,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-14} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

²<https://www.thoughtco.com/table-of-electrical-resistivity-conductivity-608499>.