Úloha III.5 ... kytarová

10 bodů; průměr 6,32; řešilo 66 studentů

Mějme kytaru naladěnou při pokojové teplotě. O kolik půltónů (při temperovaném ladění) se přeladí jednotlivé struny, pokud se přesuneme k táboráku, kde bude o 10 °C chladněji? Bude kytara stále znít naladěně? Vzdálenost mezi body upevnění strun je $d = 65\,\mathrm{cm}$. Struny mají hustotu $\rho = 8\,900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, Youngův modul pružnosti $E = 210\,\mathrm{GPa}$ a teplotní roztažnost $\alpha = 17\cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$.

Honzovi se opět rozladila kytara.

Frekvence struny

Frekvenci struny vypočteme ze vzorce

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2d}\,,$$

kde μ je délková hustota struny. Nyní si rozmyslíme, odkud se bere síla, která strunu napíná. Klidová délka napnutého úseku struny L_0 je menší než d. Je tedy třeba strunu napnout silou o velikosti F, aby se natáhla na délku d. Pokud ovšem přejdeme do chladnějšího prostředí, struna bude mít tendenci se zkrátit, ale bude stále pevně uchycena. Bude tedy napínána silněji. Hookův zákon říká

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon\,,\\ \frac{F}{S} &= E\varepsilon\,,\\ \varepsilon &= \frac{F}{SE}\,, \end{aligned}$$

kde σ je mechanické napětí, ε je relativní protažení struny a S je plocha příčného řezu struny. Celková délka natažené struny bude vždy d a souvisí s L_0 následovně

$$d = L_0 + \varepsilon L_0 = L_0\left(1+\varepsilon\right)\,.$$

Z předchozí diskuse vyplývá, že po zahrnutí teplotní roztažnosti struny bude vztah pro její délku vypadat

$$d = L_0\left(1+\alpha T\right)\left(1+\varepsilon\right) = L_0\left(1+\alpha T\right)\left(1+\frac{F}{SE}\right)\,.$$

Z této rovnice vyjádříme sílu F a dosadíme ji do první rovnosti

$$F = SE\left(\frac{d}{L_0\left(1+\alpha T\right)} - 1\right)\,.$$

Nyní vyjádříme frekvenci jako

$$f = \frac{\sqrt{\frac{SE\left(\frac{d}{L_0(1+\alpha T)}-1\right)}{\mu}}}{2d}\,.$$

Výraz S/μ upravíme

$$\frac{S}{\mu} = \frac{S}{\frac{m}{d}} = \frac{1}{\frac{m}{dS}} = \frac{1}{\rho}$$

a dosadíme do vzorce pro frekvenci

$$f = \frac{\sqrt{\frac{E\left(\frac{d}{L_0(1+\alpha T)}-1\right)}{\rho}}}{2d}\,.$$

Pokud položíme teplotní rozdíl $T = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$, dostaneme frekvenci f_0, kterou měla struna uvnitř:

$$f_0 = \frac{\sqrt{\frac{E\left(\frac{d}{L_0}-1\right)}{\rho}}}{2d}\,,$$

$$L_0 = \left(\frac{d}{\frac{4d^2 f_0^2 \rho}{E}+1}\right)\,.$$

Z rovnice pro f_0 jsme získali vztah pro neznámou L_0. Ten dosadíme do vzorce pro f a výsledný výraz upravíme. Z důvodů vysvětlených níže vyjádříme poměr frekvencí f/f_0:

$$f = \sqrt{\frac{f_0^2 - \frac{E\alpha T}{4d^2\rho}}{1+\alpha T}}\,,$$

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{E\alpha T}{4d^2\rho f_0^2}}{1+\alpha T}}\,.$$

Hudební teorie

V teorii hudby platí, že tón o oktávu vyšší má dvojnásobnou frekvenci původního tónu. Dále platí, že poměr frekvencí dvou not, které jsou od sebe vzdálené o půltón, je vždy konstantní (označme konstantu K). Jelikož je oktáva tvořena dvanácti půltóny, platí

$$f_{\mathrm{vyssi}} = 2 f_0\,,$$

$$f_{\mathrm{vyssi}} = K^{12} f_0\,,$$

$$K^{12} = 2\,,$$

$$K = 2^{\frac{1}{12}}\,.$$

O kolik půltónů se struna přeladí, spočteme následovně

$$\frac{f}{f_0} = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n\,,$$

$$\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n = \sqrt{\frac{1 - \frac{E\alpha T}{4d^2\rho f_0^2}}{1+\alpha T}}\,,$$

$$n = 6\log_2\left(\frac{1 - \frac{E\alpha T}{4d^2\rho f_0^2}}{1+\alpha T}\right)\,,$$

Tab. 1: Změna frekvence strun

struna	$\frac{f_0}{\mathrm{Hz}}$	$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$	n
E	330	334	0,19
H	247	252	0,33
G	196	202	0,52
D	146	154	0,92
A	110	120	1,55
e	82	95	2,62

kde n je počet půltónů, o který se struna původně naladěná na frekvenci f_0 přeladí. Vypočtené hodnoty lze elegantně shrnout do tabulky 1.

Lze vidět, že struny naladěné na vyšší frekvence se vlivem změny teploty moc nerozladí, zatímco struny na nižších frekvencích se mohou při běžných teplotních rozdílech přeladit i o celý tón. Jelikož je tato změna nerovnoměrná, tj. všechny struny se nepřeladí o stejnou hodnotu například jednoho tónu, nástroj se nám rozladí.

Ještě bychom měli zmínit, že jsme během výpočtu zanedbali to, že se plocha průřezu vlivem roztažení zmenší. Pokud bychom chtěli započítat i tento jev, museli bychom použít další materiálovou konstantu zvanou Poissonovo číslo (anglicky Poisson's ratio), které vystihuje, jak se materiál smrští ve směru kolmém na směr tahu. Jestliže bychom započítali i tento jev, vypočtené hodnoty by se lišily až na čtvrté nebo páté platné cifře. Můžeme jej tedy s chladnou hlavou zanedbat.

Jan Benda
honzab@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.