Úloha III.1 ... kreativní řešení problémů 3 body; průměr 2,98; řešilo 123 studentů

Danka připojila zahradní hadici s vnitřním průměrem 1,5 cm *na vodovodní kohoutek na koleji a druhý konec položila na okraj okna na 8. poschodí ve výšce* 23 m *nad zemí. Jaký objemový průtok vody by musel kohoutek mít, aby se Dance podařilo postříkat proudem vody lidi stojící pod kolejí ve vodorovné vzdálenosti* 9 m *od budovy, kteří ruší noční klid? Může se to Dance podařit, pokud voda stříká vodorovně a nefouká vítr?*

Bonus *Kde nejdále mohou stát tito lidé, aby na ně Danka hadicí dostříkla, pokud je objemový průtok kohoutku* $0{,}4\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}$*? Danka teď může konec hadice natočit tak, aby voda stříkala pod libovolným úhlem vůči vodorovné rovině.* *Dance opravdu vadí hluk v noci pod okny.*

Keď si situáciu predstavíme, uvedomíme si, že ide vlastne o vodorovný vrh vody, ktorá vytryskuje z hadice nejakou rýchlosťou v. Rýchlosť vieme určiť z objemového prietoku Q ako

$$v = \frac{Q}{S}\,,$$

kde $S = \pi d^2/4$ je plocha prierezu hadice. Potom si môžeme napísať rovnice pre súradnice hmotného bodu pohybujúceho sa vodorovným vrhom

$$x = vt\,,$$
$$y = h - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Tu označujeme x a y postupne vodorovnú a zvislú súradnicu. Počiatok súradnicovej sústavy položíme do bodu na zemi priamo pod oknom. Premenná t označuje čas, ktorý plynie od okamihu vytrysknutia vody z konca hadice, $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je tiažové zrýchlenie. Voda je vystrekovaná z počiatočnej výšky $h = 23\,\mathrm{m}$. Ľudia, ktorých chce Danka trafiť, sú na zemi, čiže ich y-ová súradnica je $y = 0\,\mathrm{m}$. Od internátu[1] sú vzdialení $l = 9\,\mathrm{m}$, to je teda aj ich x-ová súradnica. Máme teda dve rovnice s dvoma neznámymi, ktorými sú čas letu vody t a rýchlosť v

$$l = vt\,,$$
$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Vyjadríme preto z druhej rovnice čas

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

a to dosadíme do prvej z rovníc. Dostávame

$$l = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Rýchlosť vyjadríme cez objemový tok a máme

$$l = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

[1] česky kolej

Úpravami vyjadríme Q z rovnice a dosadíme hodnoty známych veličín

$$Q = \frac{l\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{g}{2h}} \approx 0{,}73\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Danke sa teda nepodarí týmto spôsobom dostreknúť z okna na nepríjemných susedov, pretože z bežného vodovodného kohútika v domácnosti alebo v internáte nedostaneme takto veľký objemový prietok.

Bonus

Když chceme spočítat maximální dostřel z nenulové výšky, je postup pomocí derivací velmi komplikovaný. Proto použijeme koncept takzvané *ochranné paraboly*, což je množina bodů, za kterou se danou rychlostí vystříknutý proud vody nedostane pod žádným počátečním úhlem. Nyní si ukážeme její odvození pro konstantní počáteční rychlost proudu vody $v = 4Q/(\pi d^2)$. Nejprve si napíšeme závislost obou souřadnic myšleného hmotného bodu na čase pro vrh rychlostí v pod úhlem φ jako

$$\begin{aligned} x &= v\cos\varphi t\,,\\ y &= h + v\sin\varphi t - \frac{1}{2}gt^2\,. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic nyní zkusíme vyjádřit, pod jakým úhlem φ musíme hmotný bod vystřelit, aby proletěl pevně daným bodem se souřadnicemi $[x, y]$. Z první rovnice tedy nejprve vyjádříme čas, který dosadíme do druhé

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v\cos\varphi}\,,\\ y &= h + v\sin\varphi\frac{x}{v\cos\varphi} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2\cos^2\varphi}\,. \end{aligned}$$

Nyní rovnici upravíme, aby v ní vystupoval pouze tangens úhlu φ, který budeme chtít pro pevné x a y vyjádřit

$$\begin{aligned} y &= h + x\,\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi\right)\,,\\ \frac{gx^2}{2v^2}\,\mathrm{tg}^2\,\varphi &- x\,\mathrm{tg}\,\varphi + y + \frac{gx^2}{2v^2} - h = 0\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro tangens počátečního úhlu máme kvadratickou rovnici. To znamená, že v závislosti na souřadnicích bodu x a y dostáváme buď dvě řešení (můžeme bodem proletět buď cestou nahoru nebo cestou dolů), žádné řešení (rychlost je moc malá a bod nezasáhneme), nebo jedno řešení, což je množina bodů oddělující tyto dvě oblasti. Pro tuto množinu bodů bude diskriminant kvadratické rovnice rovný nule, můžeme ji tedy tímto způsobem snadno popsat

$$\begin{aligned} x^2 - 4\frac{gx^2}{2v^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v^2} - h\right) &= 0\,,\\ \frac{v^2}{2g} - y - \frac{gx^2}{2v^2} + h &= 0\,,\\ y &= \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2} + h\,. \end{aligned}$$

Pro množinu bodů ohraničujících prostor, kam můžeme danou rychlostí dostřelit a kam ne, tedy dostáváme tento předpis. Ten, jak si můžete všimnout, je rovnicí paraboly. Říkáme mu ochranná parabola, protože žádný bod mimo něj nemůžeme zasáhnout. K určení maximálního dostřelu stačí spočítat průsečík této paraboly se zemí, tedy bod, kde $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{v^2}{2g} - \frac{g x_{max}^2}{2v^2} + h\,,\\ \frac{g x_{\mathrm{max}}^2}{2v^2} &= h + \frac{v^2}{2g}\,,\\ x_{\mathrm{max}}^2 &= \frac{2v^2 h}{g} + \frac{v^4}{g^2}\,,\\ x_{\mathrm{max}} &= \frac{v}{g}\sqrt{2hg + v^2}\,. \end{aligned}$$

Po dosazení za počáteční rychlost tak dostáváme maximální vzdálenost, ve které Danka trefí hlučné lidi, jako

$$x_{\mathrm{max}} = \frac{4Q}{\pi d^2 g}\sqrt{2hg + \left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2} \doteq 4{,}9\,\mathrm{m}\,.$$

Pokud tedy stojí hluční lidé dále než 5 m od koleje, jsou před rozzuřenou Dankou v bezpečí.

Daniela Dupkalová
daniela@fykos.cz

Kateřina Rosická
kacka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.