Úloha II.5 ... kouzelná magnetická tyčka
10 bodů; (chybí statistiky)

Mějme tenký magnet uzavřený uprostřed tenké duté tyče o délce l. Materiál tyče je schopný magnetické pole odstiňovat. Těsně za konci tyče je tok magnetického pole roven Φ. Vypočítejte velikost a směr magnetické indukce v rovině kolmé na tyč procházející jejím středem v závislosti na vzdálenosti r od tyče.

Adam vyrobil foukačku, aby mohl na přednáškách flusat magnety po spolužácích.

Úloha vypadá na první pohled velmi komplikovaně. Ve skutečnosti si však problém můžeme přeformulovat tak, že výpočet nebude nijak náročný. Předně si uvědomíme, že problém je osově souměrný vzhledem k ose, která je zároveň podélnou osou symetrie tyče. Navíc skrz stěny tyče neteče žádný magnetický tok, protože materiál tyče magnetické pole odstiňuje a tyč je velmi tenká. Podíváme-li se tak na situaci vně tyče, bude se magnetické pole chovat tak, jako by v bodech na koncích tyče do prostoru „vstupoval“ magnetický tok Φ, resp. $-\Phi$ (znaménko odlišuje jednotlivé konce tyče). Tyč, a dokonce i magnet, nyní již nemusíme řešit. Protože tyč byla velmi tenká, můžeme magnetické toky $\pm\Phi$ považovat za homogenní. Pro odlišení konců tyče budeme znaménko $\pm$ používat i nadále.

Na takto upravený problém pustíme velmi mocné nástroje nazvané Gaussova věta a princip superpozice. Pro magnetické pole nabývá Gaussův zákon v integrální podobě tvaru $0 = \int_S B dS$. Díky principu superpozice budeme počítat magnetické pole pro oba konce tyče zvlášť. Vezmeme velmi malou kulovou Gaussovskou plochu okolo jednoho konce tyče. Celkový tok touto plochou musí být nulový. Platí tedy

$$\Phi_\pm \mp \Phi = 0,$$

kde opačné znaménko u druhého členu je dáno tím, že magnetický tok $\pm\Phi$ do Gaussovské plochy vstupuje. Protože je pole pro každý konec tyče středově souměrné, obsah, kterým protéká magnetický tok $\pm\Phi$, je velmi malý a magnetický tok se musí zachovávat, získáme vzorec

$$|B_1| = |B_2| = B_\pm = \frac{\Phi_\pm}{4\pi R^2} = \frac{\pm\Phi}{4\pi R^2}$$

určující magnetické pole v závislosti na poloměru Gaussovské plochy R. Magnetická indukce je na tuto Gaussovskou plochu v každém bodě kolmá.

Nyní se již jedná pouze o geometrii. S pomocí obrázku 1 vyjádříme $R = \left(\sqrt{4r^2 + l^2}\right)/2$ a $\cos\alpha = l/\sqrt{4r^2 + l^2}$. Magnetické intenzity ve směru os x a y se odečtou a zůstane pouze z-tová složka. Její velikost bude

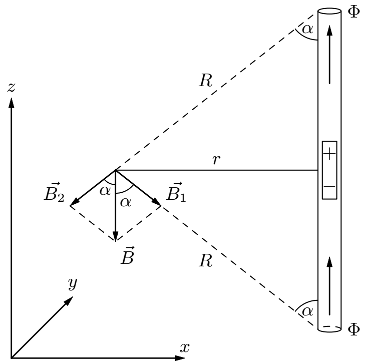
$$B = (|B_1| + |B_2|)\cos\alpha = 2B_\pm \cos\alpha = 2 \cdot \frac{\Phi l}{\pi \left(4r^2 + l^2\right)^{3/2}}.$$

Směr intenzity závisí na orientaci magnetu v tyči. Při natočení magnetu dle obrázku 1 bude intenzita mířit ve směru $-z$, při opačné orientaci magnetu by mířila ve směru $+z$.

K řešení ještě několik poznámek:

1. Trik, kdy celou úlohu spočítáme, aniž bychom řešili magnet nebo tyč, se může zdát docela random, na druhou stranu jedinou známou veličinou charakterizující magnetické pole je tok na koncích tyče. O magnetu nic nevíme.

2. Není možné, aby oba magnetické toky $\pm\Phi$ do tyče vstupovaly nebo z ní vystupovaly. Nebyl by poté splněn třetí Maxwellův zákon.



Obr. 1: Nákres situace. Zde znaménko + na magnetu uvnitř tyče značí jeho severní pól, naopak − reprezentuje pól jižní.

3. Problém si můžeme představit jako dva magnetické monopóly, položit $Q = \Phi\varepsilon$ a řešit vše pomocí rovnic pro elektrostatické pole. Matematicky je to ekvivalentní řešení výše, fyzikálně to ale není správné, protože magnetické monopóly neexistují.

Adam Mendl
`adam.mendl@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.