Úloha I.5 ... a zase ta U-trubice

8 bodů; (chybí statistiky)

Do U-trubice s celkovou délkou l a průřezem o obsahu S nalijeme V vody (tak, aby byl celý ohyb pod vodou a současně platilo $Sl > V$) a necháme ustálit hladinu. Jeden konec U-trubice uzavřeme a vodní hladinu rozkmitáme. Jaká bude perioda malých kmitů vodního sloupce?

Karlovi zase hráblo.

V ustáleném stavu bude hladina v obou částech U-trubice stejně vysoko. Odchylku od této rovnovážné polohy označíme x. Nechť je $x > 0$ při poklesu hladiny v uzavřené části trubice. Potenciální energii soustavy při odchylce x budeme značit $E_\mathrm{p}(x)$.

Lze ukázat,[1] že pro periodu malých kmitů soustavy s potenciální energií závislou pouze na výchylce platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{E_\mathrm{p}''(x_0)}}\,, \tag{1}$$

kde x_0 je rovnovážná poloha výchylky (v našem případě $x_0 = 0$), E_p'' je druhá derivace E_p podle x a m je oscilující hmotnost. Výpočet potenciální energie nemusí být v tomto případě snadný, proto místo ní spočítáme sílu. Pro ní totiž platí $F = -E_\mathrm{p}'$, takže můžeme psát $E_\mathrm{p}'' = -F'$.

Na vodu působí dvě síly, tlaková a tíhová. Tlak v uzavřené části označme p, v otevřené bude atmosférický p_a. Tlaková síla bude zřejmě $F_p = (p - p_\mathrm{a})\,S$. Jelikož jsou oscilace velmi rychlé, stlačování a roztahování vzduchu bude adiabatické, neboli

$$pV_\mathrm{u}^\kappa = p_\mathrm{a}V_0^\kappa\,,$$

kde κ je Poissonova konstanta vzduchu, V_0, resp. V_u, je počáteční, resp. průběžný objem v uzavřené části a p je tlak při objemu V_u. Jelikož je trubice válcová (kromě ohybu dole, který je stejně zaplněn vodou), je její objem

$$V_0 = Sa\,, \quad V_\mathrm{u} = S\left(a + x\right)\,,$$

kde a je počáteční výška vzduchu v uzavřené trubici. Dosazením do vztahu pro tlakovou sílu dostaneme

$$F_p = (p - p_\mathrm{a})\,S = p_\mathrm{a}\left(\left(\frac{V_0}{V_\mathrm{u}}\right)^\kappa - 1\right)S = p_\mathrm{a}\left(\left(\frac{a}{a+x}\right)^\kappa - 1\right)S\,.$$

Tíhovou sílu určíme jednoduše – poklesne-li v jedné části voda o x, ve druhé musí stoupnout o x. Tím na jedné straně vznikne blok vody o výšce $2x$ působící silou

$$F_g = -2S\rho g x\,,$$

kde záporné znaménko znamená, že síla působí proti výchylce. Složením obou sil dostáváme

$$F = F_p + F_g = \left(p_\mathrm{a}\left(\left(\frac{a}{a+x}\right)^\kappa - 1\right) - 2\rho g x\right)S\,.$$

Nyní můžeme spočítat druhou derivaci potenciální energie

$$E_\mathrm{p}'' = -F' = \left(\kappa p_\mathrm{a} a^\kappa\left(a + x\right)^{-\kappa-1} + 2\rho g\right)S\,,$$

$$E_\mathrm{p}''(0) = \left(\frac{\kappa p_\mathrm{a}}{a} + 2\rho g\right)S\,.$$

[1] David Morin: *Introduction to Classical Mechanics.*

Poslední, co zbývá, je vyřešení geometrie trubice a určení a. Předpokládejme, že naše trubice má kruhový průřez (tak jako většina trubic). Označme r její vnitřní poloměr a R poloměr dolního ohybu. To je vlastně polovina toru. Vztah pro objem celého toru je

$$V_\mathrm{t} = 2\pi^2 R r^2 \,.$$

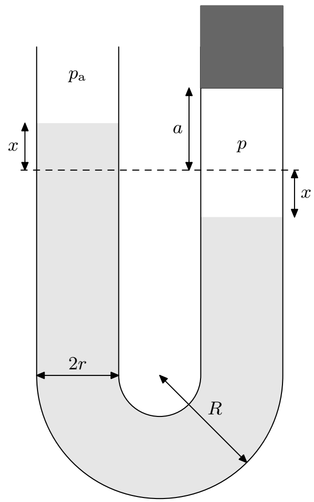
V našem případě voda zatopí celý ohyb čili polovinu toru, který představuje πR z délky trubice. Zbytek vody (neboli $V - V_\mathrm{t}/2$) zabere úsek trubice o délce l_v, takže pro vzduch zbyde

$$2a = l - \pi R - l_\mathrm{v} = l - \pi R - \frac{1}{S}\left(V - \frac{1}{2}V_\mathrm{t}\right) = l - \frac{V}{S} \,.$$

Jak vidíme, torus má stejný délkový objem jako rovné části trubice, čímž se výpočet značně zjednoduší.

Nakonec ještě určíme hmotnost vody jako $m = \rho V$ a dosazením do (1) dostaneme výsledek

$$T = \pi\sqrt{\frac{2V}{S}\left(\frac{\kappa p_\mathrm{a}}{\rho}\left(l - \frac{V}{S}\right)^{-1} + g\right)^{-1}} \,.$$



Obr. 1: Nákres situace.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.