Úloha I.4 ... doprava na horách

8 bodů; (chybí statistiky)

Na úpatí hory tvaru dokonalého kužele s vrcholovým úhlem $\alpha = 90^\circ$ stojí město. Přesně na opačné straně hory ve stejné nadmořské výšce je železniční stanice, proto se radní z města rozhodli pro stavbu silnice ke stanici. Můžou postavit buď tunel, nebo cestu vést po povrchu hory. Jaký může být maximální poměr ceny za kilometr tunelu ku ceně za kilometr silnice, aby byla stavba tunelu levnější? Silnici lze vést libovolnou trasou po povrchu hory.

Matěj staví Semmeringbahn.

Radní mají několik možností, jak cestu postavit. Mohou vykopat tunel od města až přímo k železniční stanici (možnost A) nebo můžou vést celou cestu po povrchu hory (možnost B). Můžou také vést část cesty z města po povrchu, pak tunelem a pak zase po povrchu až k železniční stanici (možnost C).

Případ A

Označme si vzdálenost města od vrcholu hory l. Jestliže α je úhel město–vrchol–stanice, tak prostorová vzdálenost s_A města od stanice je

$$s_\mathrm{A} = 2l \sin\frac{\alpha}{2}\,,$$

což je zároveň i délka tunelu z města ke stanici.

Případ B

Tato možnost je komplikovanější, protože nyní nemusí být jasné, kudy má cesta vést. V případě A jsme vedli tunel nejkratší možnou spojnicí v prostoru – po úsečce. Nyní by se mohlo zdát, že musíme vést cestu po zakřiveném povrchu, což je náročnější.[1] Ve skutečnosti ale povrch kužele není zakřiven, jak by se mohlo zdát. Můžeme jej totiž rozbalit a plášť kužele rozložit do rovné 2D plochy.[2] Po tomto rozbalení již můžeme spojit město s železnicí snadno pomocí úsečky a spočítat její délku.

Obvod podstavy kužele je $o = \pi s_\mathrm{A}$ a ústí tunelu ho dělí na poloviny. Plášť kužele je kruhová výseč o středovém úhlu $\varphi = o/l$. Cesta po povrchu je tak tvořena základnou rovnoramenného trojúhelníka s rameny délky l a úhlem $\varphi/2$ mezi nimi. Délka této cesty tedy je

$$s_\mathrm{B} = 2l \sin\frac{\varphi}{4} = 2l \sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin\frac{\alpha}{2}\right)\,,$$

což je nejkratší spojnice města a železnice po povrchu hory.

Případ C

O třetí možnosti lze bez potřeby výpočtů ukázat, že není optimální. Ze symetrie problému plyne, že se cesta z města do začátku tunelu musí být zrcadlově symetrická k cestě z konce tunelu do nádraží. Jedině tak se nám podaří přiblížit konce tunelů tak, abychom museli kopat co nejkratší tunel. Předpokládejme, že by nejefektivnějším řešením našeho problému byla možnost C.

[1] V obecném případě bychom se mohli uchýlit k diferenciální geometrii a využít geodetickou rovnici. *Geodetiky* jsou totiž nejkratší spojnice dvou bodů v zakřiveném prostor(-u/-očase).

[2] Můžeme říkat, že povrch kužele nemá *vnitřní* zakřivení, ale má pouze *vnější* křivost, která je dána tím, jak je „rovný“ 2D plášť vnořen do 3D prostoru.

Tj. postavit cestu z města po povrchu do nějakého bodu, odtamtud vést tunel do zrcadlového bodu a odtud vést cestu k železnici.

Nyní ukážeme, že v optimálním řešení nemůže tunel procházet osou hory. Podívejme se na poměr délky tunelu ku délce pomyslné cesty po povrchu, kterou tunel ušetřil. V případě tunelu vedoucího mimo osu hory je tento poměr určitě ostře větší, než když tunel prochází osou. To platí, protože pomyslná cesta po povrchu vede relativně menší oklikou (vzhledem k délce tunelu), když je tunel blíže k povrchu. Dochází tak k nižší cenové úspoře, a proto se takto kratší mimoosý tunel nikdy nevyplatí stavět.

Pokud by tunel procházel osou hory, tak bude cesta konstruována dosti nešikovným způsobem – silnice povede z města i ze stanice přímo směrem k vrcholu hory a tunel bude položen vodorovně ve vyšší nadmořské výšce. Pokud by toto měla být optimální konstrukce, znamená to, že se mezi těmito vyššími konci tunelu nevyplatí vést cestu po povrchu (analogicky jako cesta v případě B). Jelikož ale poměr délky A ku B není závislý na výšce hory, strategie s výše položeným tunelem nedává ekonomicky smysl, protože si tím jen přidáváme dva nepříjemné úseky cesty.

Tímto sporem jsme ukázali, že případ C nemusíme brát v potaz.

Závěr

Kritický poměr ceny za kilometr tunelu ku ceně za kilometr cesty na povrchu je poměr délky povrchové cesty ku délce tunelu

$$\frac{s_\mathrm{B}}{s_\mathrm{A}} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \doteq 1{,}267\,,$$

Pokud je poměr cen nižší, vyplatí se kopat tunel. Pokud je vyšší, vyplatí se vést cestu kolem hory. V praxi můžeme očekávat, že poměr cen bude řádově vyšší. Přesto se někdy vyplatí kopat tunely, protože reálné hory nejsou kuželovité a často nelze postavit cestu okolo.

Všimněme si, že pokud bychom si neuvědomili, že cestu nemusíme nutně vést vodorovně, vyšel by kritický poměr vyšší, a sice $\pi/2 = 1{,}571$.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.