Úloha VI.5 ... leť, raketo, leť

10 bodů; (chybí statistiky)

Postavili jsme malou raketu s hmotností $m_0 = 3\,\mathrm{kg}$, z níž 70 % tvoří palivo. Výtoková rychlost spalin je $u = 200\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a jejich hmotnostní tok je $R = 0{,}1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$. Raketa je vybavena stabilizačními prvky, takže se nevychyluje z dráhy a startuje z klidu kolmo vzhůru. Předpokládejte, že odporová síla vzduchu je přímo úměrná rychlosti, $F_\mathrm{o} = -bv$, kde $b = 0{,}05\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$, v je rychlost rakety a znaménko minus znamená, že síla působí proti směru pohybu. V jaké výšce nad povrchem se bude raketa nacházet v čase $T = 25\,\mathrm{s}$ od zažehnutí motoru?

Jindra dostal za domácí úkol dopravit satelit na nízkou oběžnou dráhu.

Na raketu působí tři síly – urychlující síla motoru, odporová síla vzduchu a tíhová síla. Hmotnost rakety m se v čase mění podle vztahu

$$m(t) = m_0 - Rt = m_0\left(1 - \frac{Rt}{m_0}\right) .$$

Síla motoru je dána Meščerského rovnicí $F_\mathrm{m} = Ru$. Druhý Newtonův zákon pro pohyb rakety říká

$$m(t)\ddot{x} = Ru - m(t)g - b\dot{x}\,,$$

kde $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení, x je výška nad povrchem a tečky nad x značí derivace podle času. Dosadíme za $m(t)$ a dostaneme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_0}\frac{1}{1 - \frac{Rt}{m_0}}\dot{x} = \frac{Ru}{m_0}\frac{1}{1 - \frac{Rt}{m_0}} - g\,. \tag{1}$$

Tu můžeme chápat i jako diferenciální rovnici prvního řádu pro proměnnou $\dot{x}$, protože chybí člen s x. Po jejím vyřešení výsledek zintegrujeme a dostaneme závislost polohy na čase. Zatím ale nechme rovnici ležet a podívejme se, zda v úloze není nějaký chyták.

Prvním chytákem je, že počáteční tah motoru $F_\mathrm{m} = Ru = 20\,\mathrm{N}$ není dostatečný k tomu, aby zvedl raketu ze země. Tíhová síla držící raketu na zemi $F_\mathrm{g}(t = 0) = m_0 g = 29{,}43\,\mathrm{N}$ je větší. Raketa se vznese, až když její hmotnost po vyčerpání části paliva klesne pod $m_1 = Ru/g = 2{,}04\,\mathrm{kg}$. To se stane v čase $t_1 = (m_0 - m_1)/R = 9{,}61\,\mathrm{s}$. Do té doby bude stát na zemi s běžícím motorem. Soudruzi z NDR při návrhu rakety udělali chybu.

Hmotnost rakety bez paliva je $m_\mathrm{r} = 0{,}9\,\mathrm{kg}$. Druhým chytákem je, že raketa spotřebuje všechno palivo už v čase $t_2 = (m_0 - m_\mathrm{r})/R = 21\,\mathrm{s}$. My však chceme spočítat výšku rakety v čase $T = 25\,\mathrm{s}$. Pro pohyb v posledních čtyřech sekundách letu musíme použít rovnici

$$m_\mathrm{r}\ddot{x} = -b\dot{x} - m_\mathrm{r}g. \tag{2}$$

Na raketu působí pouze tíhová síla směrem dolů a odporová síla vzduchu proti směru pohybu. Hmotnost rakety se nemění, protože už se nespotřebovává palivo.

Jelikož pohyb rakety začne až při hmotnosti $m_1 = 2{,}04\,\mathrm{kg}$ v čase $t_1 = 9{,}61\,\mathrm{s}$ a do té doby raketa stojí na zemi, upravíme rovnici (1) na tvar

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_1}\frac{1}{1 - \frac{R(t-t_1)}{m_1}}\dot{x} = \frac{Ru}{m_1}\frac{1}{1 - \frac{R(t-t_1)}{m_1}} - g\,.$$

V rovnici je příliš mnoho písmenek, a proto provedeme substituci

$$\tau = 1 - \frac{R(t - t_1)}{m_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{R}{m_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,,$$

pomocí které nahradíme časové derivace

$$\dot{x} = -\frac{R}{m_1}x' ,$$
$$\ddot{x} = \left(\frac{R}{m_1}\right)^2 x'' .$$

Čárka značí derivaci podle τ. Všimněte si, že τ je bezrozměrná proměnná, takže x, x' i x'' mají rozměr délky. Okamžiku vzletu rakety $t = t_1$ odpovídá bezrozměrný čas $\tau = 1$. S rostoucím reálným časem t bude τ klesat. Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$x'' - \frac{b}{R\tau}x' = \frac{m_1 u}{R\tau} - \frac{gm_1^2}{R^2} .$$

Rovnici můžeme zjednodušit ještě víc, pokud odstraníme rozměr z veličiny x. Zavedeme substituci

$$x = \frac{m_1 u}{R}z.$$

Počátečním podmínkám $x(\tau = 1) = 0$ a $x'(\tau = 1) = 0$ odpovídají podmínky $z(\tau = 1) = 0$ a $z'(\tau = 1) = 0$. Diferenciální rovnice bude

$$z'' - \frac{b}{R\tau}z' = \frac{1}{\tau} - \frac{gm_1}{Ru}.$$

Označíme bezrozměrné parametry

$$p = \frac{b}{R} = 0{,}5, \quad q = \frac{m_1 g}{Ru} = 1,$$

a dostaneme přehlednou diferenciální rovnici závislou na dvou vnitřních parametrech p a q

$$z'' - \frac{p}{\tau}z' = \frac{1}{\tau} - q.$$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$z'' - \frac{p}{\tau}z' = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_{\mathrm{H}} = A\tau^p,$$

kde A je integrační konstanta, jejíž přesnou hodnotu zjistíme z počátečních podmínek. Poté uhodneme partikulární řešení (tato rovnice je jednoduchá, řešení se dá uhodnout)

$$z'_{\mathrm{P}} = \frac{q\tau}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

Celkové řešení rovnice je součet homogenního řešení a partikulárního řešení

$$z' = z'_{\mathrm{H}} + z'_{\mathrm{P}} = A\tau^p + \frac{q\tau}{p-1} - \frac{1}{p} = A\tau^{\frac{1}{2}} - 2\tau - 2.$$

Jelikož konstanty $p = 0{,}5$ a $q = 1$ mají v našem případě takové krásné hodnoty, rovnou jsme za ně dosadili. Z počáteční podmínky $z'(1) = 0$ určíme konstantu A

$$0 = A - 2 - 2 \quad \Rightarrow \quad A = 4.$$

Závislost bezrozměrné polohy z na čase je

$$z = \int z' \,\mathrm{d}\tau\,,$$
$$z = \frac{8}{3}\tau^{\frac{3}{2}} - \tau^2 - 2\tau + B,$$

kde B je integrační konstanta. Z další počáteční podmínky $z(1) = 0$ určíme konstantu B

$$0 = \frac{8}{3} - 1 - 2 + B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{3}.$$

Bezrozměrná poloha a rychlost rakety jsou

$$z = \frac{8}{3}\tau^{\frac{3}{2}} - \tau^2 - 2\tau + \frac{1}{3}\,,$$
$$z' = 4\tau^{\frac{1}{2}} - 2\tau - 2.$$

Normální polohu a rychlost můžeme z bezrozměrných veličin dostat jako

$$x = \frac{m_1 u}{R} z\,,$$
$$v = \dot{x} = -uz'.$$

Poněkud neintuitivně raketa letí vzhůru, pokud je z' záporné. Palivo dojde v okamžiku $t_2 = 21\,\mathrm{s}$, čemuž odpovídá bezrozměrný čas $\tau_2 = 1 - R(t_2 - t_1)/m_1 = 0{,}442$. Při vyčerpání paliva jsou poloha a rychlost rakety

$$z_2 = 0{,}0377 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 154\,\mathrm{m}\,,$$
$$z_2' = -0{,}225 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = 45{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Abychom zjistili výšku rakety v čase $T = 25\,\mathrm{s}$, musíme vyřešit rovnici (2)

$$m_\mathrm{r}\ddot{x} = -b\dot{x} - m_\mathrm{r} g,$$
$$m_\mathrm{r} \int_{v_2}^{v(T)} \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{b\dot{x} + m_\mathrm{r} g} = -\int_{t_2}^{T} \mathrm{d}t,$$
$$\frac{m_\mathrm{r}}{b} \ln\left(\frac{bv(T) + m_\mathrm{r} g}{bv_2 + m_\mathrm{r} g}\right) = -(T - t_2),$$
$$\frac{v}{T} = \left(v_2 + \frac{m_\mathrm{r} g}{b}\right) \mathrm{e}^{-\frac{b(T-t_2)}{m_\mathrm{r}}} - \frac{m_\mathrm{r} g}{b}.$$

Po dosazení za hmotnost $m_\mathrm{r} = 0{,}9\,\mathrm{kg}$ a počáteční rychlost $v_2 = 45{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ vyjde rychlost v čase $T = 25\,\mathrm{s}$ jako $v(T) = 0{,}847\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Rychlost je kladná, tím pádem raketa pořád stoupá a nemusíme řešit nějaké převrácení rakety při pádu a s ním spojené změny odporového součinitele b.

Výšku spočítáme integrací rovnice pro rychlost

$$v(t) = \left(v_2 + \frac{m_\mathrm{r} g}{b}\right) \mathrm{e}^{-\frac{b(t-t_2)}{m_\mathrm{r}}} - \frac{m_\mathrm{r} g}{b},$$

$$\int_{x_2}^{x(T)} \mathrm{d}x = \int_{t_2}^{T} \left(\left(v_2 + \frac{m_\mathrm{r} g}{b}\right) \mathrm{e}^{-\frac{b(t-t_2)}{m_\mathrm{r}}} - \frac{m_\mathrm{r} g}{b}\right) \mathrm{d}t,$$

$$x(T) = x_2 + \frac{m_\mathrm{r}\left(v_2 + \frac{m_\mathrm{r} g}{b}\right)}{b} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{b(T-t_2)}{m_\mathrm{r}}}\right) - \frac{m_\mathrm{r} g}{b}(T - t_2).$$

Číselně vyjde výška rakety v čase $T = 25\,\mathrm{s}$ jako $x(T) = 242\,\mathrm{m}$. Rychlost rakety je v tomto okamžiku malá, $v = 0{,}847\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, raketa se tudíž nachází těsně pod bodem obratu a za chvíli začne padat dolů.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.