Úloha VI.4 ... rychlý poločas

7 bodů; (chybí statistiky)

Jaká je pravděpodobnost, že se z jednoho molu radioaktivní látky během jednoho poločasu rozpadu rozpadnou tři čtvrtiny původního počtu atomů? Obvykle by se to mělo stát až za dva poločasy rozpadu. Kvůli čemu bychom mohli takovou situaci pozorovat?

Karel pořád slýchá o Černobylu.

Najdôležitejšou časťou úlohy je uvedomiť si nasledovné: makroskopický popis hovorí o rozpade polovice častíc za polčas rozpadu, čo mikroskopicky znamená, že každá častica má pravdepodobnosť 50 % rozpadnutia sa za polčas rozpadu. Z týchto dvoch popisov je fundamentálny popis mikroskopický, pričom makroskopický popis je len jeho dôsledkom na veľkom počte častíc. Ak sa navzájom častice rozpadom neovplyvňujú, rozpady jednotlivých častíc sú nezávislé udalosti. Toto neplatí napríklad v prípade štiepenia uránu v jadrových reaktoroch, kde rozpad jedného jadra uránu vytvorí neutróny, ktoré štiepia ďalšie jadrá v tzv. reťazovej reakcii.

Našou úlohou je teda vyriešiť nasledujúci kombinatorický problém.
Majme N častíc. Aká je pravdepodobnosť, že sa za daný čas rozpadne $\frac{3}{4}N = wN$ častíc, ak pravdepodobnosť rozpadu každej z týchto častíc je $p = 0{,}5$?

Potrebujeme aby sa rozpadlo Nw častíc a nerozpadlo $N(1-w)$ častíc. To sa dá modelovať binomickým rozdelením. Pravdepodobnosť tohto javu je teda

$$P = \binom{N}{wN} p^{wN} p^{(1-w)N}\,,$$

kde $\binom{N}{wN} = \frac{N!}{(wN)!(N-wN)!}$ je binomický koeficient. V našom prípade $N = 1\,\mathrm{mol} = N_\mathrm{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ častíc, čo je však nesmierne veľké číslo a priame dosadenie pomocou kalkulačky tak povedie k výsledku $P = 0$, čo by sme očakávali. Normálne sa predsa za polčas rozpadu nerozpadnú tri štvrtiny látky. Pokúsme sa teda vyjadriť výsledok v tvare $P = 10^{-r}$.

$$\begin{aligned} r &= -\log\left(\frac{N!}{(wN)!(N-wN)!}\frac{1}{2^{wN}}\frac{1}{2^{(1-w)N}}\right) = \\ &= -\log N! + \log(wN)! + \log[(1-w)N]! + (wN + (1-w)N)\log 2\,. \end{aligned}$$

Pre faktoriál použijeme Stirlingovu aproximačnú formulu

$$k! \approx \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \quad \Rightarrow \quad \log k! \approx \frac{1}{2}\log(2\pi k) + k\log\left(\frac{k}{e}\right) \approx k\log k - k\log e\,.$$

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu

$$\begin{aligned} r &\approx -N\log N + wN\log wN + (1-w)N\log(1-w)N + \\ &\quad + N\log e - wN\log e - (1-w)N\log e + N\log 2 = \\ &= +wN\log w + (1-w)N\log(1-w) + N\log 2 = \\ &= N\left(w\log w + (1-w)\log(1-w) + \log 2\right) \doteq 0{,}0568N\,. \end{aligned}$$

Tu je dobré mať na pamäti presnosť našej aproximácie, ktorá má chybu rádu v člene $\log N$, ktorý sme vynechali. Po dosadení za počet častíc dostávame finálny výsledok

$$P \approx 10^{-3{,}42\cdot 10^{22}}\,.$$

Jedná sa teda o číslo s $3{,}42 \cdot 10^{22}$ nulami za desatinnou čiarkou a teda prakticky udalosť, ktorá nenastane. Toto sa však môže zmeniť, ak máme veľmi malý počet častíc. Pravdepodobnosť rovná šanci výhry jackpotu v športke 1 : 7 000 000 nastáva podľa nášho vzťahu pre súbor „až“ 120 častíc. Šanca pozorovať takýto jav je vyššia, ak rozpad jednej častice ovplyvňuje častice okolo, ako napríklad v už spomínanom jadrovom rozpade alebo v prípade stimulovanej emisie v laseroch.

Taktiež je dôležité si uvedomiť, že sme sa pýtali na rozpad presne daného množstva častíc. V prípade, ak by toto bola náhodná veličina, tak s rovnomerným rozdelením by sme dostali pravdepodobnosť $P = \frac{1}{N} = 10^{-23{,}8}$. Vidíme, že aj táto hodnota je pomerne malé číslo, no náš výsledok je v úplne inej „kategórii malosti“. Inou, lepšie položenou otázkou by bolo: aká je pravdepodobnosť, že sa rozpadne viac ako $\frac{3}{4}$ látky. Tu by bolo treba nasčítať všetky príspevky dokopy, čo je suma obsahujúca rádovo N členov. Potom sa dá prejsť od sčítania k integrovaniu

$$P(k > \frac{3}{4}N) = N \int_{\frac{3}{4}}^{1} 10^{-N(w\log w + (1-w)\log(1-w) + \log 2)}\,\mathrm{d}w\,,$$

čo sa však nedá rozumne vyintegrovať. Pre našu úvahu je však postačujúci nasledujúci horný odhad: s rastúcim w sa pravdepodobnosť rozpadu na presne daný počet častíc zmenšuje, teda horný odhad pravdepodobnosti rozpadu na viac ako $\frac{3}{4}$ častíc dostaneme ako

$$P(k > \frac{3}{4}N) < (1-w)NP(w = \frac{3}{4}, N = 1\,\mathrm{mol}) \approx 10^{-3{,}42\cdot 10^{22}} \cdot 10^{23} \approx 10^{-3{,}42\cdot 10^{22}}\,.$$

Vidíme, že pri našej presnosti odhadu sa na výsledku vôbec nič nezmenilo. Úloha sa dá vyriešiť aj zo znalosti, že rádioaktívne rozpady sa riadia Poissonovým rozdelením, ktoré sa dostáva ako limita binomického rozdelenia pre veľký počet častíc (čo sme v istom zmysle vlastne vykonali). Pre určenie pravdepodobnosti rozpadu viac ako $\frac{3}{4}$ látky sme si však veľmi nepomohli, keďže Poissonovo rozdelenie v našom prípade neposkytuje veľmi prívetivú kumulatívnu distribučnú funkciu.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`