Úloha V.2 ... pecka z třešně

3 body; (chybí statistiky)

Elon Musk plánuje kolonizaci Marsu. Aby se to mohlo stát skutečností, musí tomu předcházet výstavba zásobovacích základen na povrchu Měsíce. Pomozte vyřešit zásadní otázku: jak daleko doletí pecka z třešně, kterou 180 cm *vysoký člověk na základně na Měsíci plivne vodorovným směrem? Na Zemi by tato pecka dopadla do vzdálenosti* 4,3 m.

Bonus *Určete poměr vzdáleností, do kterých tentýž člověk doplivne pecku na Zemi a na Měsíci pod libovolným úhlem vzhledem k vodorovné rovině.*

Katarína hledala záminku pro výlet na Měsíc.

Máme danú výšku H, z ktorej fľusneme a vzdialenosť r_Z, do ktorej dopadne kôstka na Zemi. Z týchto údajov zistíme počiatočnú rýchlosť fľusnutia v_0. Pomocou tejto rýchlosti zase dostaneme vzdialenosť fľusnutia na Mesiaci r_M. Napíšeme si rovnice pre súradnice kôstky x a y

$$x = v_0 t\,,$$
$$y = H - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

V čase dopadu na Zemi t_Z bude platiť

$$0 = H - \frac{1}{2} g t_\mathrm{Z}^2\,,$$
$$r_\mathrm{Z} = v_0 t_\mathrm{Z}\,.$$

Pre zemský čas dopadu teda platí $t_\mathrm{Z} = \sqrt{\frac{2H}{g_\mathrm{Z}}}$. Pomocou tohto času možeme vyjadriť $v_0 = r_\mathrm{Z}\sqrt{\frac{g_\mathrm{Z}}{2H}}$. Rovnakým spôsobom dostaneme čas dopadu na Mesiaci $t_\mathrm{M} = \sqrt{\frac{2H}{g_\mathrm{M}}}$. Pre výslednú vzdialenosť r_M dostávame

$$r_\mathrm{M} = v_0 t_\mathrm{M} = r_\mathrm{Z}\sqrt{\frac{2H g_\mathrm{Z}}{2H g_\mathrm{M}}} = r_\mathrm{Z}\sqrt{\frac{g_\mathrm{Z}}{g_\mathrm{M}}} \approx r_\mathrm{Z}\sqrt{6}\,,$$

Po dosadení čísiel tak máme $r_\mathrm{M} = 4{,}3\sqrt{6}\,\mathrm{m} \doteq 10{,}5\,\mathrm{m}$.

Bonus

Pecka se bude ve vodorovném směru pohybovat konstantní rychlostí v_x, protože na ni nepůsobí žádná síla. Síla na ni působí jen ve směru svislém, ve kterém ji urychluje směrem dolů. Rychlost v tomto směru označme v_y. Počáteční úhel při vyplivnutí je α. Pak platí

$$v_x = v_0 \cos\alpha\,,$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - g_i t\,,$$

kde g_i označuje tíhové zrychlení na Zemi nebo na Měsíci a t je čas od vyplivnutí.

Každou ze složek poloh x a y jsme se rozhodli vyšetřovat zvlášť a když víme, jak se chovají rychlosti, není problém najít závislosti souřadnic na čase

$$x = v_0 \cos\alpha t\,,$$
$$y = H + v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g_i t^2\,.$$

Z první rovnice vyjádříme čas a dosadíme do druhé

$$y = H + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g_i}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \,.$$

Získali jsme tak rovnici paraboly, po které se pecka pohybuje. Bod, kam dopadne, určíme položením $y = 0$ a řešením kvadratické rovnice pro x. Dostáváme

$$x_{1,2} = 2 v_0^2 \cos \alpha \frac{\sin \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \frac{H g_i}{v_0^2}}}{g_i} \,.$$

Protože jsme uvažovali, že pecka je vyplivnuta ve směru rostoucího x, je pro nás důležitý kladný kořen. Hledaný poměr tak je

$$p = \frac{g_\mathrm{M}}{g_\mathrm{Z}} \frac{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \frac{H g_\mathrm{Z}}{v_0^2}}}{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \frac{H g_\mathrm{M}}{v_0^2}}} \,.$$

Zbývá už jen dosadit $v_0 = r_\mathrm{Z} \sqrt{\frac{g_\mathrm{Z}}{2H}}$. Potom

$$p = \frac{g_\mathrm{M}}{g_\mathrm{Z}} \frac{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \left(\frac{2H}{r_\mathrm{Z}}\right)^2}}{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{g_\mathrm{M}}{g_\mathrm{Z}} \left(\frac{2H}{r_\mathrm{Z}}\right)^2}} \,.$$

Při volbě $\alpha = 0$ dostaneme stejný výsledek jako v první části.

Tomáš Tuleja
`tomas.tuleja@fykos.cz`

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`