Úloha IV.S ... svítíme

10 bodů; průměr 8,67; řešili 3 studenti

1. *V jaké vzdálenosti od povrchu terče (předpokládejte, že je z uhlíku a pro laser o vlnové délce* 351 nm*) se nachází kritický povrch a v jaké vzdálenosti dochází ke vzniku dvouplazmonového rozpadu, pokud je charakteristická délka plazmatu*[1] 50 µm*? Dále předpokládejte*
   (a) *exponenciální pokles hustoty plazmatu s rostoucí vzdáleností od terče,*
   (b) *lineární pokles hustoty plazmatu s rostoucí vzdáleností od terče.*
2. *Jakou musí mít elektrony energii, aby prošly od kritického povrchu ke skutečnému povrchu terče? Pro dosah elektronů v uhlíkovém plazmatu využijte empirický vztah* $R = 0{,}933\,4E^{1{,}756\,7}$*, kde* E *je v* MeV *a* R *je v* g·cm^{-2}.
3. *Na jaké délce se elektrony v elektrickém poli plazmové vlny urychlí na tyto energie?*
4. *Jaké vlnové délky rozptýleného světla můžeme pozorovat v případě stimulovaného Ramanova rozptylu pro laser o vlnové délce* 351 nm*?*

Označme n_{e0} elektrónovú hustotu pre uhlíkovú plazmu. V našom prípade predpokladáme, že úplne vyionizujeme uhlík, teda na jedno jadro uhlíka bude pripadať 6 elektrónov. Hustotu atómov spočítame ako $N = \rho_C/m_C$, pričom ρ_C je hustota uhlíka, a m_C je hmotnosť jedného atómu uhlíka. Po dosadení dostávame $n_{e0} = 6\rho_C/m_C = 6{,}8 \cdot 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}$. Dosadíme do vzťahu z textu seriálu

$$n_\mathrm{c} = \frac{m\varepsilon_0\omega_0^2}{e^2}\,,$$

$$n_\mathrm{c} = \frac{\frac{0{,}5\,\mathrm{MeV}}{c^2} 55\,\mathrm{e}^2\mathrm{GeV}^{-1}\mathrm{fm}^{-1}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2}{1\,\mathrm{e}^2} = 8{,}8 \cdot 10^{21}\,\mathrm{cm}^{-3}\,.$$

Lineárny pokles vyjadríme vzťahom

$$n_\mathrm{c} = n_{e0}\left(1 - \frac{x}{x_c}\right)\,,$$

kde x_c je charakteristická dĺžka v plazme. Pre polomer kritického povrchu máme

$$x = x_c\left(1 - \frac{n_\mathrm{c}}{n_{e0}}\right) = 49{,}4\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Obdobne exponenciálny pokles

$$n_\mathrm{c} = n_{e0}\mathrm{e}^{-\frac{x}{x_c}}\,,$$

konkrétne

$$x = x_c \ln\left(\frac{n_{e0}}{n_\mathrm{c}}\right) = 220\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Pre dvojplazmónový rozpad platia rovnaké vzťahy, pričom len položíme n_c rovné štvrtine oproti prvej časti. Pre lineárny pokles dostávame $x = 49{,}8\,\mu\mathrm{m}$ a pre exponenciálny $x = 290\,\mu\mathrm{m}$. Pri porovnaní hodnôt a po konzultácii s náčrtkom v texte seriálu je zjavné, že exponenciálny popis je v tomto prípade nutný/správny.

[1] Hustota plazmatu n_e v závislosti na vzdálenosti od terče se typicky vyjadřuje jako funkce $n_e = f\left(\frac{x}{x_c}\right)$, kde x je vzdálenost od terče a x_c je tzv. charakteristická delka plazmatu, která představuje škálovací parametr od terče.

Pokračujme v riešení druhej podúlohy. Veličina R je definovaná pomocou hustoty plazmy a spočítame ju ako

$$R = \int_0^x \rho \, \mathrm{d}l \, .$$

Ak predpokladáme, že hustota ρ je závislá na l rovnako ako n_e, tak môžeme napísať

$$R = \int_0^x \rho_o \mathrm{e}^{-\frac{l}{x_c}} \, \mathrm{d}l \, .$$

Keďže $x \gg x_c$, môžeme zmeniť integračné medze na

$$R = \int_0^\infty \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{l}{x_c}} \, \mathrm{d}l \, ,$$

$$R = \left[-x_c \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{l}{x_c}} \right]_0^\infty \, ,$$

$$R = x_c \rho_0 \, .$$

Pre zasiahnutie terča potrebujeme elektróny aspoň s takýmto dosahom. Ďalej vyjadríme E z empirického vzťahu zo zadania a dosadíme

$$E = \left(\frac{R}{0{,}933\,4} \right)^{1/1{,}756\,7} \, ,$$

$$E = \left(\frac{x_c \rho_0}{0{,}933\,4} \right)^{1/1{,}756\,7} \, ,$$

$$E \doteq 80\,\mathrm{keV} \, .$$

Elektróny musia mať energiu aspoň $80\,\mathrm{keV}$, aby zasiahli povrch terča.

K urýchleniu elektrónov na túto energiu pomocou plazmových vĺn využijeme vzťah z textu seriálu pre intenzitu elektrického poľa

$$E = \frac{m c \omega_{\mathrm{pe}}}{e} \, ,$$

kde plazmovú frekvenciu vypočítame ako

$$\omega_{\mathrm{pe}} = \sqrt{\frac{e^2 n_{\mathrm{e}}}{m \varepsilon_0}} \, .$$

Nás zaujíma hlavne urýchlenie na vysoké energie v oblasti kritického povrchu, teda $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{c}}$, čo po dosadení dáva

$$\omega_{\mathrm{pe}} = \sqrt{\frac{e^2 \frac{m \varepsilon_0 \omega_0^2}{e^2}}{m \varepsilon_0}} \, ,$$

$$\omega_{\mathrm{pe}} = \omega_0 \, .$$

Dráhu, na ktorej sa elektrón urýchli spočítame ako $l = \frac{U}{E}$, kde $U = 80\,\mathrm{kV}$ pretože elektrón má náboj $1\,\mathrm{e}$. Po dosadení

$$l = \frac{U}{\frac{mc\omega_0}{e}}\,,$$

$$l = \frac{80\,\mathrm{kV}}{\frac{\frac{500\,\mathrm{keV}}{c^2}c\frac{2\pi c}{\lambda}}{e}}\,,$$

$$l \doteq 9\,\mathrm{nm}\,.$$

Vieme, že k stimulovanému Ramanovmu rozptylu dochádza pri $n_\mathrm{e} < \frac{n_\mathrm{c}}{4}$. Zo zákona zachovania energie platí $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, kde v našom prípade je $\omega_1 = \omega_\mathrm{pe}$ pre $n_\mathrm{e} < \frac{n_\mathrm{c}}{4}$, a $\omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda_\mathrm{R}}$, kde λ_R je vlnová dlžka, ktorú Ramanov rozptyl môže dosiahnuť.

Po dosadení $n_\mathrm{e} = \frac{n_\mathrm{c}}{4}$ do vzťahu

$$\omega_\mathrm{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_\mathrm{e}}{m\varepsilon_0}}\,,$$

$$\omega_\mathrm{pe} = \sqrt{\frac{e^2\frac{n_\mathrm{c}}{4}}{m\varepsilon_0}}\,,$$

$$\omega_\mathrm{pe} = \frac{\omega_0}{2}\,.$$

Vidíme, že polovica energie ide do plazmy, z toho logicky druhá polovica do Ramanovho rozptylu. Odtiaľto vyplýva, že frekvencia bude polovičná ako je frekvencia laseru, teda vlnová dĺžka je dvojnásobná $\lambda_\mathrm{R} = 702\,\mathrm{nm}$. Stimulovaný Ramanov rozptyl môžeme pozorovať na vlnových dĺžkach $702\,\mathrm{nm}$ až $351\,\mathrm{nm}$.

Michal Červeňák
`miso@fykos.cz`