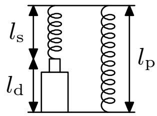
Úloha IV.4 ... analogie

7 bodů; průměr 4,50; řešilo 20 studentů



Mějme dvě hookeovské pružiny s modulem pružnosti $E = 2{,}01\,\mathrm{GPa}$ a píst s viskozitou $\eta = 9{,}8\,\mathrm{GPa{\cdot}s}$. Závislost napětí σ na relativním prodloužení ε je popsána vztahem $\sigma_\mathrm{s} = E\varepsilon_\mathrm{s}$ pro pružinu a $\sigma_\mathrm{d} = \eta\dot{\varepsilon}_\mathrm{d}$ pro píst, přičemž tečka zde značí derivaci podle času. Jednu pružinu délky l_s a píst délky l_d zapojíme do série a poté k nim paralelně připojíme druhou pružinu o délce l_p. Celý tento systém pak náhlým roztažením uvedeme do stavu s $\varepsilon_0 = 0{,}2$ a toto prodloužení dále držíme konstantní. Určete, za jak dlouho od roztažení poklesne napětí v systému na polovinu původní hodnoty, jestliže platí $\frac{l_\mathrm{s}}{l_\mathrm{p}} = 0{,}5$. *Mirek vymýšlel úlohy na zkoušce. Zase.*

Napětí v sériově zapojené pružině, v paralelní pružině a v pístu označíme postupně σ_s, σ_p a σ_d. Relativní prodloužení bude obdobně ε_s, ε_p a ε_d.

Celkové napětí v systému, které označíme σ, je dáno součtem napětí jednotlivých paralelních částí. Napětí v první části je $\sigma_\mathrm{s} = \sigma_\mathrm{d}$, zatímco ve druhé je to jednoduše σ_p. Potom

$$\sigma = \sigma_\mathrm{p} + \sigma_\mathrm{s}\,. \tag{1}$$

Ze zadání vyplývají vztahy mezi napětími a relativními prodlouženími

$$\sigma_\mathrm{s} = E\varepsilon_\mathrm{s}\,, \quad \sigma_\mathrm{p} = E\varepsilon_\mathrm{p}\,, \quad \sigma_\mathrm{d} = \eta\dot{\varepsilon}_\mathrm{d}\,.$$

Zatím máme 7 neznámých a 5 rovnic, potřebujeme proto získat ještě dvě rovnice. První z nich vychází z faktu, že prodloužení ε_p je konstantní, neboli $\varepsilon_\mathrm{p} = \varepsilon_0$. Poslední rovnice vyplývá ze zachování délky. Zřejmě platí $l_\mathrm{p} = l_\mathrm{s} + l_\mathrm{d}$. Obecně (při libovolném natažení) musí platit

$$(1 + \varepsilon_\mathrm{p})\, l_\mathrm{p} = (1 + \varepsilon_\mathrm{s})\, l_\mathrm{s} + (1 + \varepsilon_\mathrm{d})\, l_\mathrm{d}\,.$$

Pro zjednodušení si definujme konstantu $\lambda = \frac{l_\mathrm{s}}{l_\mathrm{p}}$, čímž dostaneme

$$1 + \varepsilon_\mathrm{p} = (1 + \varepsilon_\mathrm{s})\,\lambda + (1 + \varepsilon_\mathrm{d})\,(1 - \lambda)\;.$$

Toto je naše poslední rovnice. Je jasné, že budeme muset řešit diferenciální rovnici, začneme tedy vyjádřením časové derivace relativního prodloužení pístu

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_\mathrm{d} &= \frac{\sigma_\mathrm{d}}{\eta} = \frac{\sigma_\mathrm{s}}{\eta} = \frac{E\varepsilon_\mathrm{s}}{\eta} = \frac{E}{\eta}\left(\frac{1+\varepsilon_0}{\lambda} - 1 - (1+\varepsilon_\mathrm{d})\,\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) = \\ &= \frac{E}{\eta\lambda}\left(1 + \varepsilon_0 - \lambda - (1+\varepsilon_\mathrm{d})\,(1-\lambda)\right) = \frac{E}{\eta\lambda}\left(\varepsilon_0 - (1-\lambda)\,\varepsilon_\mathrm{d}\right) = \\ &= -\frac{E\,(1-\lambda)}{\eta\lambda}\left(\varepsilon_\mathrm{d} - \frac{\varepsilon_0}{1-\lambda}\right)\,.\end{aligned}$$

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_\mathrm{d} - \frac{\varepsilon_0}{1-\lambda}}\,\mathrm{d}\varepsilon_\mathrm{d} &= -\frac{E}{\eta}\frac{1-\lambda}{\lambda}\,\mathrm{d}t\,, \\ \ln\!\left(\varepsilon_\mathrm{d} - \frac{\varepsilon_0}{1-\lambda}\right) &= C - \frac{E}{\eta}\frac{1-\lambda}{\lambda}t\,,\end{aligned}$$

kde C je integrační konstanta. Nyní si můžeme vyjádřit prodloužení pístu

$$\varepsilon_\mathrm{d} = \frac{\varepsilon_0}{1-\lambda} + A\mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}\frac{1-\lambda}{\lambda}t}\,,$$

kde $A = \mathrm{e}^C$ je další konstanta. Pro její určení použijeme počáteční podmínky. V čase $t = 0\,\mathrm{s}$ (těsně po natažení systému) se píst ještě nestihl dát do pohybu, takže platí $\varepsilon_\mathrm{d}(0) = 0$. Z toho plyne

$$A = -\frac{\varepsilon_0}{1-\lambda} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_\mathrm{d} = \frac{\varepsilon_0}{1-\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}\frac{1-\lambda}{\lambda}t}\right) .$$

Už máme vše potřebné proto, abychom mohli spočítat celkové napětí v systému. Začneme dosazením do rovnice (1)

$$\sigma = \sigma_\mathrm{p} + \sigma_\mathrm{s} = \sigma_\mathrm{p} + \sigma_\mathrm{d} = E\varepsilon_0 + \eta\dot{\varepsilon}_\mathrm{d} .$$

Dále spočítáme časovou derivaci relativního prodloužení pístu

$$\dot{\varepsilon}_\mathrm{d} = -\frac{\varepsilon_0}{1-\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}\frac{1-\lambda}{\lambda}t}\left(-\frac{E}{\eta}\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) = \frac{E\varepsilon_0}{\eta\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}\frac{1-\lambda}{\lambda}t} ,$$

kterou rovnou dosadíme do předchozí rovnice

$$\sigma = E\varepsilon_0 + \frac{E\varepsilon_0}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}\frac{1-\lambda}{\lambda}t} = E\varepsilon_0\left(1 + \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}\frac{1-\lambda}{\lambda}t}\right) .$$

Podle zadání hledáme čas τ, ve kterém je napětí poloviční oproti počáteční hodnotě, neboli

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{2}\sigma(0) = \frac{1}{2}E\varepsilon_0\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) .$$

Odtud už snadno vyjádříme τ jako

$$\tau = \frac{\eta}{E}\frac{\lambda}{1-\lambda}\ln\frac{2}{1-\lambda} .$$

Číselně $\tau \doteq 6{,}8\,\mathrm{s}$.

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz