Úloha IV.2 ... rychlodráha

3 body; průměr 2,18; řešilo 57 studentů

Matfyz kromě návrhu vlastního piva plánuje postavit i zábavní park. Postaví tam speciální fyzikální bobovou dráhu, na které boby začínají s nějakou nenulovou vertikální rychlostí v_y a rozjíždí se svisle dolů. Dráha se postupně zakřivuje víc a víc do vodorovného směru, přičemž svislá složka rychlosti zůstává konstantní.

Jakou mají boby rychlost ve vodorovném směru v závislosti na výšce, o kterou klesly, a jakou mají celkovou rychlost v závislosti na čase? Boby po dráze jezdí bez tření.

Bonus Jaký je tvar bobové dráhy? *Karel měl „světlou" chvilku.*

Máme danou vertikální rychlost v_y, která má být konstantní. Poloha ve směru y, pokud ji začneme počítat od místa, kde byl bob vypuštěn, přičemž směrem dolů bude kladná, poroste jako $y = v_y t$. Protože máme zanedbat odporové síly, musí platit zákon zachování mechanické energie, neboli

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy + \frac{1}{2}mv_y^2\,,$$

kde v je celková rychlost bobu ve výšce y, resp. v čase t, a m je hmotnost bobu. Tou ovšem můžeme celou rovnici vydělit a nebudeme ji tedy potřebovat. Vidíme, že celková kinetická energie je počáteční kinetická a přírůstek způsobený poklesem bobu. Pokud rychlost ve směru x označíme jako v_x, pak platí

$$v_x^2 + v_y^2 = 2gy + v_y^2 \quad \Rightarrow \quad v_x = \sqrt{2gy}\,.$$

Tím jsme dostali odpověď na první otázku, horizontální rychlost je $v_x = \sqrt{2gy}$. Pokud do zákona zachování energie dosadíme časovou závislost y, získáme vztah pro rychlost

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgv_yt + \frac{1}{2}mv_y^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gv_yt + v_y^2 \quad \Rightarrow \quad v = v_y\sqrt{1 + \frac{2gt}{v_y}}\,.$$

Odpovědí na druhou otázku je, že celková rychlost bobu se v čase vyvíjí jako $v = v_y\sqrt{1 + \frac{2gt}{v_y}}$.

Bonus

Dráhu si vyjádříme parametricky. Od počátku víme, že platí $y = v_y t$. Co platí pro x? To zjistíme tak, že nalezneme v_x v závislosti na čase a zintegujeme jej.

$$v_x = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gv_yt} \quad \Rightarrow \quad x = \int_0^t v_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{2gv_y\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}\sqrt{8gv_yt^3}\,.$$

Získali jsme tak parametrické vyjádření. Ještě můžeme najít závislost $y(x)$, pokud vyjádříme t z jedné rovnice a do druhé dosadíme. Potom nám vyjde $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9x^2v_y^2}{g}}$. Z výsledků je patrné, že tvar dráhy bude záviset i na rychlosti, se kterou budeme chtít bob vypouštět.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.