Úloha III.4 ... laskavý příboj

8 bodů; průměr 4,63; řešilo 40 studentů

Blízko pobřeží je rychlost mořských vln ovlivněna přítomností dna. Předpokládejte, že rychlost vln v je funkcí tíhového zrychlení g a hloubky moře h. Platí $v = Cg^\alpha h^\beta$. Pomocí rozměrové analýzy určete rychlost vln v závislosti na hloubce vody. Číslo C je bezrozměrná konstanta, kterou touto metodou určit nedokážeme.

Kromě rychlosti vln ale koupajícího se Jindru ještě zajímá, z jakého směru k němu vlny dorazí. Definujme souřadnicovou soustavu, ve které hladina vody leží v rovině xy. Linie pobřeží má rovnici $y = 0$, oceán leží v polorovině $y > 0$. Hloubka vody h je funkcí vzdálenosti od pobřeží $h = \gamma y$, kde $\gamma =$ konst. Na širém oceánu, kde je rychlost vln c konstantní (není ovlivněna hloubkou), postupují rovinné vlny, jejichž čela svírají s osou x úhel θ_0. Najděte diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)$$

popisující tvar čela vlny v blízkosti pobřeží, ale nepokoušejte se ji řešit, není vůbec triviální. Spočítejte, pod jakým úhlem narážejí čela vln na pobřeží.

Bonus *Vyřešte diferenciální rovnici a najděte tvar čel vln v blízkosti pobřeží.*

Jindra miluje jednoduchou rozměrovou analýzu a těžké diferenciální rovnice.

Jednotkou tíhového zrychlení je $[g] = \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, jednotkou hloubky je $[h] = \mathrm{m}$ a jednotkou rychlosti je $[v] = \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Při rozměrové analýze se snažíme najít takové exponenty α a β, aby veličina $v = g^\alpha h^\beta$ měla rozměr rychlosti. Dosadíme do rovnice jednotky zmíněných třech veličin

$$\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = \mathrm{m^\alpha{\cdot}s^{-2\alpha}{\cdot}m^\beta} = \mathrm{m^{\alpha+\beta}{\cdot}s^{-2\alpha}}\,.$$

Rozměrová analýza vede vždy na soustavu lineárních rovnic. V našem případě z rovnosti exponentů na levé a pravé straně vznikne soustava

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta\,,\\ -1 &= -2\alpha\,, \end{aligned}$$

s řešením $\alpha = 1/2$ a $\beta = 1/2$. Závislost rychlosti vln na hloubce vody je

$$v = Cg^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}} = C\sqrt{gh}\,,$$

kde C je bezrozměrná konstanta, kterou bohužel z rozměrové analýzy zjistit nemůžeme.

Jelikož hloubka moře je lineární funkcí vzdálenosti od pobřeží $h = \gamma y$, rychlost vln je $v = C\sqrt{g\gamma y}$. Vlny se šíří v souladu se Snellovým zákonem. Úhel, který svírají čela vln s pobřežím je stejný jako úhel mezi paprsky (kolmými na vlnoplochy) a kolmicí na pobřeží. Nechť čelo vlny ve vzdálenosti y od pobřeží svírá s linií pobřeží úhel θ. Ze Snellova zákona odvodíme

$$\frac{\sin\theta}{v} = \frac{\sin\theta_0}{c} \quad\Rightarrow\quad \sin\theta = \frac{v\sin\theta_0}{c} = \frac{C\sqrt{g\gamma y}\sin\theta_0}{c} = \sqrt{ay}\,,$$

kde a je konstanta pro zjednodušení zápisu. Vztah mezi derivací a úhlem θ je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,,$$

Za $\sin\theta$ můžeme dosadit z předchozí rovnice, čímž dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{ay}}{\sqrt{1-ay}}\,. \tag{1}$$

Pobřeží se nachází na souřadnici $y = 0$. Dosazením do rovnice zjistíme

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{y=0} = \frac{0}{\sqrt{1-0}} = 0$$

neboli čela vln jsou rovnoběžná s linií pobřeží. To je zajímavé zjištění. Až budete někdy u moře nebo u jiné velké vodní plochy, všimněte si toho, že vlny vždy dorážejí na břeh kolmo nezávisle na směru vln dál od břehu.

Možná vás zarazilo, že naše diferenciální rovnice (1) nedává smysl pro příliš velké hodnoty y, poněvadž výraz pod odmocninou by se stal záporným. To nevadí, protože pro velká y tato rovnice neplatí. Odvozený vztah pro rychlost vln $v \propto \sqrt{gh}$ je použitelný jen pokud je hloubka vody mnohem menší než vlnová délka λ vlny (rozumně použitelný je pro $h/\lambda < 0{,}05$).

Naopak pro velké hloubky vody (hranice je přibližně $h/\lambda > 0{,}5$) platí pro rychlost vln jiný vztah $v \approx g/(2\pi f)$, kde f je frekvence vlnění. Přítomnost dna už rychlost neovlivňuje. Pro sinusoidální vlnu je tudíž rychlost konstantní. Přechod mezi těmito dvěma režimy je obtížnější popsat, to nás však nemusí trápit. Snellův zákon totiž říká, že poměr $\sin\theta/v$ musí být pro každou vlnu všude stejný, takže můžeme propojit rychlost a úhel vlny na širém moři s rychlostí a úhlem u pobřeží. Zájemci o další informace o vodních vlnách mohou začít například na anglické wikipedii.[1]

Bonus

Diferenciální rovnici separujeme a integrujeme

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x\,.$$

Tato rovnice vypadá na první pohled neřešitelně. Její řešení je sice dlouhé, avšak existuje. My si ho krok za krokem ukážeme.

Řešení integrálu na pravé straně je triviální

$$\int \mathrm{d}x = x + D\,, \tag{2}$$

kde D je integrační konstanta.

Levé straně se však musíme věnovat podrobněji. V integrálech se členem pod odmocninou bývá užitečné zbavit se šikovnou substitucí oné odmocniny. Tvar „něco minus jedna“ napovídá, že šikovnou substitucí by mohlo být použití druhé mocniny hyperbolického kosinu místo „něčeho“

$$\begin{aligned}\frac{1}{ay} &= \cosh^2\psi\,, \quad y > 0\,, \quad \psi > 0\,,\\ y &= \frac{1}{a\cosh^2\psi}\,,\\ \mathrm{d}y &= -\frac{2}{a}\frac{\sinh\psi}{\cosh^3\psi}\,\mathrm{d}\psi\,.\end{aligned}$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_(water_waves)

Po dosazení získáme

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1}\,\mathrm{d}y = -\frac{2}{a}\int \sqrt{\cosh^2\psi - 1}\,\frac{\sinh\psi}{\cosh^3\psi}\,\mathrm{d}\psi = -\frac{2}{a}\int \frac{\sinh^2\psi}{\cosh^3\psi}\,\mathrm{d}\psi\,.$$

Ani nový integrál bohužel není na první pohled řešitelný, můžeme jej však dále zjednodušit použitím per partes, kde označíme

$$\frac{\sinh^2\psi}{\cosh^3\psi} = uv'\,,$$

pro funkce

$$u = \sinh\psi\,, \qquad v = -\frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2\psi}\,,$$
$$u' = \cosh\psi\,, \quad v' = \frac{\sinh\psi}{\cosh^3\psi}\,.$$

Tím integrál převedeme do tvaru

$$-\frac{2}{a}\int \frac{\sinh^2\psi}{\cosh^3\psi}\,\mathrm{d}\psi = -\frac{2}{a}\left(-\frac{1}{2}\frac{\sinh\psi}{\cosh^2\psi} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cosh\psi}\,\mathrm{d}\psi\right) = \frac{1}{a}\frac{\sinh\psi}{\cosh^2\psi} - \frac{1}{a}\int \frac{1}{\cosh\psi}\,\mathrm{d}\psi\,,$$

který už je naštěstí řešitelný substitucí

$$\operatorname{tgh}\frac{\psi}{2} = t\,,$$
$$\psi = 2\operatorname{argtgh} t\,,$$
$$\mathrm{d}\psi = \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Tato substituce s hyperbolickým tangens je analogická často používané substituci pro složité výrazy s goniometrickými funkcemi $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = t$. Vztah mezi hyperbolickým tangens s polovičním argumentem a hyperbolickým kosinem je

$$t = \operatorname{tgh}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\psi - 1}{\cosh\psi + 1}} \quad \Rightarrow \quad \cosh\psi = \frac{1+t^2}{1-t^2}\,.$$

Po dosazení substituce do integrálu vyjde

$$\int \frac{1}{\cosh\psi}\,\mathrm{d}\psi = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\operatorname{arctg} t = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\cosh\psi - 1}{\cosh\psi + 1}}\,.$$

Integrační konstantu nemusíme psát, protože jsme ji napsali už do integrálu (2) z pravé strany rovnice. Konečný výsledek je

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1}\,\mathrm{d}y = -\frac{2}{a}\int \frac{\sinh^2\psi}{\cosh^3\psi}\,\mathrm{d}\psi = \frac{1}{a}\frac{\sinh\psi}{\cosh^2\psi} - \frac{2}{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\cosh\psi - 1}{\cosh\psi + 1}}\,.$$

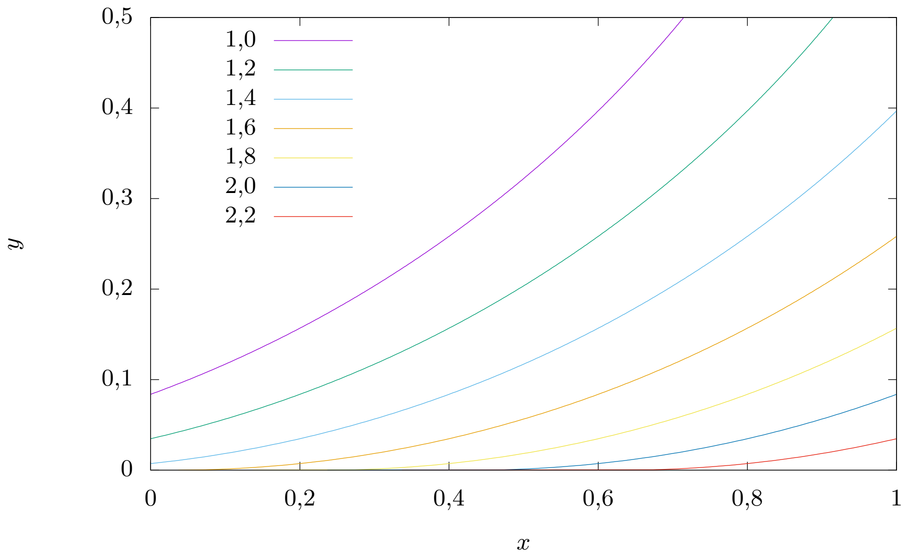
Nyní ještě místo substituční proměnné ψ musíme dosadit původní proměnnou y

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1}\,\mathrm{d}y = y\sqrt{\frac{1}{ay} - 1} - \frac{2}{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\sqrt{ay}}{1+\sqrt{ay}}}\,.$$

Řešení pravé strany v rovnici (2) spojíme s právě odvozeným řešením levé strany. Vztah pro tvar čela vlny v blízkosti pobřeží je

$$x + D = y\sqrt{\frac{1}{ay} - 1} - \frac{2}{a}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{\frac{1-\sqrt{ay}}{1+\sqrt{ay}}}\,.$$

Číslo D je integrační konstanta. Výraz $x + D$ nám říká, že můžeme řešení libovolně posunout v souřadnici x, což dává smysl. Na souřadnici x totiž rychlost vln ani jejich tvar nijak nezávisí. Tvar čel vln v blízkosti pobřeží je vykreslen na obrázku 1. Ačkoli konstanta a má jednotku m^{-1}, můžeme jí považovat za bezrozměrnou, pokud to samé uděláme i s osami x a y.



Obr. 1: Tvar vln dorážejících na pobřeží pro $a = 1$ a různé hodnoty D.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.