

Úloha II.S ... stlačujeme

10 bodů; průměr 3,95; řešilo 20 studentů

Jakou energii musí mít laserový impuls trvající 10 ns, aby jím vytvořená rázová vlna byla schopná ohřát plazma na teplotu, při níž může dojít k termojaderné fúzní reakci? Jakou hustotu bude mít stlačené palivo?

Poznámka Předpokládejte, že počáteční plazma je jednoatomový ideální plyn.

Termojadrová fúzia môže nastať, pokiaľ teplota plazmy prekročí 5 keV. Pri predpoklade jednoatomového plynu $\gamma = 5/3$ spočítame Machovo číslo M , z ktorého zistíme rýchlosť rázovej vlny

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{\gamma M^2 + 1}{M^2} (M^2 - 1),$$

$$\frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) M^2 = \gamma M^4 - \gamma M^2 + M^2 - 1.$$

Vidíme, že sa jedná o bikvadratickú rovnicu s neznámou M^2 , upravíme ju teda na tvar

$$\gamma M^4 - \left[(\gamma - 1) + \frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) \right] M^2 - 1 = 0,$$

ktorý odpovedá rovnici $ax^4 + bx^2 + c = 0$ s koeficientami

$$a = \gamma,$$

$$b = -(\gamma - 1) - \frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right),$$

$$c = -1.$$

Pre M potom platí

$$M = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \approx \pm \frac{\gamma + 1}{\gamma} \sqrt{\frac{T_1}{2T_0}}.$$

Za predpokladu, že uvažujeme len kladné riešenia, a po dosadení hodnôt $T_0 = 20 \text{ K}$, $T_1 = 5 \cdot 10^7 \text{ K}$ a $\gamma = 5/3$, získavame $M \doteq 1790 \approx 1800$.

Pre výpočet rýchlosti rázovej vlny potrebujeme ešte vypočítať rýchlosť zvuku, tú určíme pomocou vzťahu

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{M_i}},$$

kde $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ je Boltzmannova konštanta, $T = T_0 = 20 \text{ K}$ a M_i je priemerná hmotnosť deutéria a trícia, teda

$$M_i = \frac{M_D + M_T}{2} = \frac{3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 5,01 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{2} = 4,17 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Po dosadení dostávame $c_s = 332 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, z toho už môžeme vypočítať rýchlosť rázovej vlny $v_{\text{rv}} = M c_s \doteq 594\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 600 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Aby sme získali energiu laserového pulzu, budeme vychádzať zo vzťahu pre rýchlosť rázovej vlny

$$v_{\text{rv}} = \left(\frac{E_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}}$$

za predpokladu počiatocnej hustoty DT paliva $0,225 \text{ g/cm}^3$. Energiu laserového pulzu môžeme vyjadriť ako

$$E_0 = \rho t^3 v_{\text{rv}}^5,$$

dosadením $t = 10 \text{ ns} = 10^{-8} \text{ s}$ dostávame energiu $E_0 \doteq 17 \text{ MJ}$. Vzhľadom na vysokú mocninu rýchlosti rázovej vlny vo výpočte sa však jedná skôr o rádový odhad – potrebujeme energiu v ráde desiatok MJ.

Ak chceme spočítať hustotu paliva ρ_1 , ktorú je možné získať rázovou vlnou, použijeme Rankinove-Hugoniotove rovnice. Na to budeme musieť poznať počiatočný p_0 a konečný p_1 tlak.

Za predpokladu ideálneho plynu môžeme vyjsť zo stavovej rovnice $pV = nRT$, kde R je univerzálna plynová konštanta. Látkové množstvo si môžeme vyjadriť ako $n = \frac{m}{M_m}$ (kde M_m je molárna hmotnosť) a dostávame

$$p_0 V = \frac{m}{M_m} RT,$$

pričom $\rho_0 = m/V$, čo je naša počiatočná hustota. Po úprave dostávame

$$p_0 = \frac{\rho_0}{M_m} RT.$$

Môžeme dosadiť $T = 20 \text{ K}$, $M_m = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ a $\rho_0 = 0,225 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ pre DT palivo, čím dostávame $p_0 = 15 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Konečný tlak získame z rovnice

$$p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 v_{\text{rv}}^2 \doteq 5,95 \cdot 10^{13} \text{ Pa} \approx 6 \cdot 10^{13} \text{ Pa}.$$

Nakoniec dosadíme do vzťahu pre pomer hustôt

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1) p_1 + (\gamma - 1) p_0}{(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_0} \approx \frac{(\gamma + 1) p_1}{(\gamma - 1) p_1} = 4.$$

Vzhľadom k veľkosti tlakov, kde konečný tlak bol približne o 7 rádov väčší než počiatočný, sa tento výsledok dal očakávať.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.