

Úloha II.P ... la bomba

10 bodů; průměr 5,42; řešilo 52 studentů

*Jakého maximálního výkonu dosahuje jaderná bomba?**Karel přemýšlel nad americkými prezidenty.*

Všichni jsme asi slyšeli o shoení jaderných bomb na japonská města Hirošima a Nagasaki za druhé světové války. Naštěstí už od té doby jaderné zbraně nikdy ve válce použity nebyly. V zadání úlohy jsme tázáni na maximální výkon jaderné bomby. Dává tato otázka vůbec smysl? Není náhodou výbuch jaderné bomby jedním velkým okamžitým „třeskem“ a neblíží se tedy maximální okamžitý výkon k nekonečnu? Na zodpovězení těchto otázek si každopádně nejprve musíme uvědomit, na jakém fyzikálním principu tato zařízení fungují.

Vazebná energie jádra

Princip výtěžku energie z jaderné reakce (ať už v jaderné elektrárně, nebo u jaderné bomby) je založen na ekvivalenci energie a hmotnosti, kterou si poprvé uvědomil Einstein. Samozřejmě se jedná o známý vztah

$$E = mc^2.$$

Další ingrediencí je fakt, že klidové hmotnosti jader atomů nejsou dané pouhým součtem klidových hmotností jednotlivých nukleonů, ze kterých jsou složena, ale jsou o určitou hodnotu m_v menší. Tato hodnota (ještě vynásobená konstantou c^2) je právě vazebná energie držící jádro pohromadě. Zmíněná skutečnost odpovídá univerzálnímu principu přírody, že fyzikální systémy mají tendenci obsazovat takové konfigurace, které extremalizují (zpravidla minimalizují) energii tohoto systému. Pro rozdíl hmotností m_v^1 platí

$$m_v = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M,$$

kde Z a A je protonové resp. nukleonové číslo a m_p , m_n , M jsou klidové hmotnosti protonu, neutronu a daného atomového jádra. Pro vazebnou energii potom platí

$$E_v = m_v c^2.$$

V částicové fyzice se často volí hodnota $c = 1$. Ekvivalence energie a hmotnosti je poté ze vztahu výše ještě více patrná.

Při jaderných reakcích ze zákona zachování energie potom plyne

$$M_{\text{in}} c^2 = M_{\text{out}} c^2 + \Delta E,$$

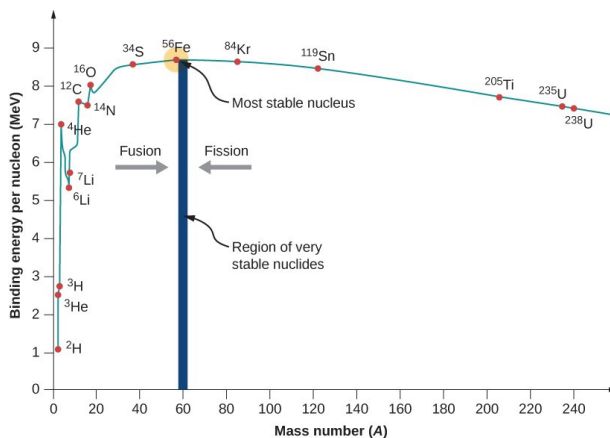
kde M_{in} jsou klidové hmotnosti reagujících částic, M_{out} jsou klidové hmotnosti produktů reakce a ΔE je získaná energie, a to ve formě gamma záření a kinetické energie produktů. Aby byla reakce exotermická, musí být klidová hmotnost produktů menší než klidová hmotnost reagujících částic. Pro lepší orientaci v problému je výhodné si zavést pomocnou veličinu

$$\varepsilon_v = \frac{E_v}{A},$$

neboli vazebnou energii na jeden nukleon. Její hodnoty pro různé izotopy můžeme vidět na obrázku 1. Při jaderných reakcích pak budeme energii získávat, pokud bude ε_v produktů větší než ε_v reagujících jader.

Obecně se energie uvolňuje při slučování (fúzi) lehkých jader až do jádra železa a pak při štěpení těžkých jader. To je třeba důvod, proč v jádru Slunce najdeme železo, ale žádné těžší prvky již ne.

¹Anglicky *mass defect*, <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/mass-defect>.

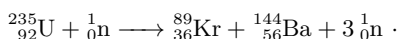


Obr. 1: Závislost vazebné energie příslušející jednomu nukleonu na atomovém čísle (<https://opentextbc.ca/universityphysicsv3openstax/chapter/nuclear-binding-energy>).

Řetězová reakce

V jaderných reaktorech a zbraních se navíc využívá dalšího jevu zvaného řetězová reakce. Ta nastává u jaderných reakcí, kde jeden nebo více produktů (např. neutron) je zároveň schopen danou reakci iniciovat. Příkladem takové reakce je štěpení izotopu uranu² ^{235}U , viz obrázek 2.

Rovnice jedné takové reakce je například



Štěpných reakcí ^{235}U je však mnoho (z hlediska možných produktů) a typicky u nich dochází k produkci jednoho až sedmi neutronů (v průměru 2,4).³ Relativní zastoupení různých izotopů v produktech štěpné řetězové reakce popisuje „velbloudí křivka“.⁴

Kritické množství

Další důležitý pojem související s řetězovou reakcí, kterou iniciují neutrony, je faktor efektivního násobení neutronů k příslušející dané konfiguraci paliva. Je to číslo které udává, kolik neutronů z jedné reakce v průměru iniciuje další reakci. V případě ^{235}U tedy bude k určitě menší než 2,4, protože ne všechny neutrony produkované štěpením znovu štěpení iniciují.⁵ Číslo k závisí na izotopickém složení paliva a roste s hustotou a hmotností. Dále pak lze k ovlivnit geometrickým tvarem použitého paliva a nebo třeba obklopením paliva vrstvou reflektující neutrony.

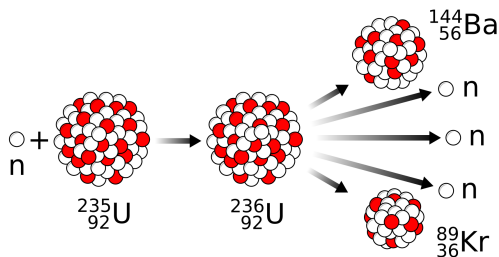
Průběh řetězových reakcí se dělí na tři případy v závislosti na k :

²Ve všech dosavadních jaderných reaktorech a zbraních se kromě používalo ^{235}U ještě ^{239}Pu , které bylo např. použito jako palivo bomby „Fat Man“ shozené na Nagasaki.

³Hodnota se značí $\bar{\nu}$ a pozvolně roste s energií nalétávajícího neutronu. Výraznější růst nastává až pro E větší než přibližně 1 MeV. Viz https://en.wikipedia.org/wiki/Prompt_criticality.

⁴Slangový výraz odvozený z faktu, že při logaritmické svislé ose křivka vypadá jako dva hrby. Křivka závisí na štěpném izotopu a na kinetické energii štěpícího neutronu. Viz https://en.wikipedia.org/wiki/Fission_product_yield.

⁵Některé například z materiálu vyletí, jiné se zase zachytí v jádře bez toho, aby nastala štěpná reakce.



Obr. 2: Jedna z možných štěpných reakcí ^{235}U
 (https://en.wikipedia.org/wiki/Discovery_of_nuclear_fission).

- Pro $k < 1$ říkáme, že materiál má podkritické množství a pokud takovému materiálu dodáme nějaký počáteční impuls neutronů, počet reakcí bude s časem exponenciálně klesat. Jediný konstantní zdroj neutronů v takovémto případě bude ze spontánních jaderných rozpadů.
- Pro $k = 1$ říkáme, že materiál má kritické množství,⁶ reakce je samoudržitelná.
- Pro $k > 1$ říkáme, že materiál má nadkritické množství. Množství reakcí v materiálu roste s časem exponenciálně a pokud se číslo k vlivem uvolňování obrovského množství energie nezmenší, v podstatě vždy dochází k destrukci materiálu a pokud reakce probíhá dostatečně rychle, tak dochází i k explozi.

„Okamžitá“ kritičnost

Jak jsme se již zmínili výše, pro materiál v nadkritickém stavu roste počet štěpných reakcí exponenciálně s časem podle vztahu

$$N(t) = N_0 k^{\frac{t}{T}}.$$

Čas T je v tomto případě průměrná doba, za kterou neutron vylétávající ze štěpné reakce iniciuje novou štěpnou reakci.

Většina neutronů generovaná rozpadovou reakcí pochází přímo z reakce samotné, viz obr. 2. Těmto neutronům se říká „okamžité“.⁷ Tyto neutrony iniciují další štěpení v řádu nanosekund. Standardně se uvažuje průměrná doba mezi dvěma interakcemi jeden shake = 10 ns.⁸ Do neutronů generovaných rozpadovou reakcí se ale započítávají i ty, které jsou generovány rozpadem dalších produktů štěpení. Např. ^{92}Kr i ^{141}Ba jsou oba radioaktivní izotopy. Těmto neutronům, které tvoří méně než jedno procento celkových neutronů uvolněných štěpnou reakcí, se říká „opožděné neutrony“.⁹ Uvolňují se v řádu desetin až desítek sekund po reakci (souvisí s poločasem rozpadu štěpných produktů).

Toho se využívá v jaderných reaktorech, kde jsou tyto opožděné neutrony nutné k tomu, aby se materiál dostal nad kritickou mez. Průměrný čas mezi jednotlivými generacemi neutronů je

⁶Anglicky *critical mass*, https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_mass.

⁷Anglicky *prompt neutrons*, https://en.wikipedia.org/wiki/Prompt_criticality.

⁸Z anglického rčení „in two shakes of a lamb's tail“.

⁹Anglicky *delayed neutrons*.

proto relativně velký a je možné reakci regulovat pomocí regulačních tyčí. Navíc je v jaderných reaktorech reakce moderovaná. To znamená, že jsou palivové tyče ponořené do moderátoru,¹⁰ jenž spomaluje neutrony, které pak ochotněji s palivem reagují.¹¹ K výbuchu prakticky dojít nemůže, protože při uvolnění velkého množství energie se zhorší podmínky pro štěpení (horší moderace, Dopplerův jev, . . .) a číslo k tím klesne pod kritickou mez.

Oproti tomu v případě, že pro nadkritickou mez stačí uvažovat reakce iniciované z „okamžitých“ neutronů, z textu výše vyplývá, že čas mezi jednotlivými generacemi T je v řádech shake. My dále budeme uvažovat přesně $T = 1$ shake. Reakce se tedy v podstatě okamžitě vymyká kontrole a dochází k výbuchu.

Jaderné zbraně

V předchozích odstavcích jsme si stručně představili fyzikální principy, na kterých jsou jaderné zbraně založeny. Jejich praktická implementace je ale samozřejmě velmi složitá a sofistikovaná. Představme si teď dva hlavní druhy jaderných zbraní a také veličinu sloužící k popisu jejich ničivé síly.

Energie uvolněná explozí se obvykle uvádí v jednotkách tun TNT¹² tzn. energie, kterou by uvolnila exploze dané hmotnosti TNT. Jedna kilotuna TNT je rovna 4,18 TJ. Obecně je velmi náročné energii výbuchu přesně určit. Nejpřesnější metodou je radiochemické měření radioaktivního spadu. Při testu bomby Trinity se Enrico Fermi pokusil měřit energii výbuchu z toho, jak tlaková vlna posune vypuštěné kousky papírků v bezvětří.

Jako jaderné zbraně se většinou označují bomby založené na principu neřízené řetězové reakce jader těžkých prvků. Energie těchto bomb se tedy získává ze štěpení těžkých jader. Někdy se pak mezi jaderné zbraně zařazují i zbraně založené na fúzi lehkých jader, které se označují jako termonukleární.

Štěpné jaderné bomby se dělí na dva základní typy (viz obr. 3):

- Nejjednodušší štěpná jaderná bomba je tzv. dělového typu.¹³ Skládá se ze dvou podkritických množství štěpného materiálu, která se odpálením konvenční chemické bomby srazí, čímž vznikne nadkritické množství štěpného materiálu. U tohoto typu ke štěpení dojde ve velmi malé části materiálu. U jaderné bomby se jménem „Little Boy“ shozené na Hirošimu se štěpilo pouze $\sim 1,4\%$ z celkového materiálu a celková uvolněná energie byla ~ 15 kt.
- Druhým, rafinovanějším typem je tzv. implozní puma.¹⁴ Materiál ve tvaru dutého válce nebo sféry je obklopen konvenční trhavinou, která ho stlačí do nadkritického stavu. Někdy se dovnitř sféry přidává fúzní materiál, většinou plyn tritia a deuteria. Této metodě se říká boosting. Fúzní materiál slouží jako další zdroj neutronů pohánějící štěpnou reakci. Štěpné reakce mají horní hranici danou tím, že větší množství materiálu by již překročilo kritické množství i bez odpálení startující trhaviny. Tuto hranici představuje bomba „Ivy King“ s ničivou silou 500 kt.

Dalším, o mnoho ničivějším typem jsou již zmíněné termonukleární bomby. Standardní typ této bomby je tzv. Teller-Ulamův, který je možné vidět na obr. 4. Bomba funguje tak, že se nejdříve spustí primární štěpná reakce. Energie z této primární reakce zahřeje polystyren obklo-

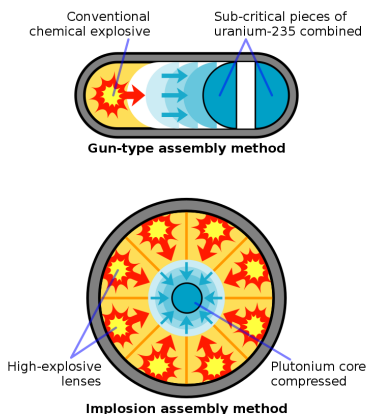
¹⁰Typickým moderátorem je tzv. „těžká voda“ s chemickým vzorcem D_2O , kde D značí deuterium, což je vodík se dvěma protony neboli 2_1H .

¹¹Moderátor efektivně zvyšuje číslo k na nadkritickou hodnotu.

¹²Standardně se značí stejně jako tuna čili t.

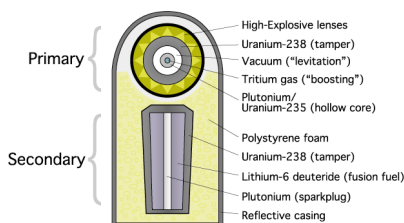
¹³Anglicky *gun-type*.

¹⁴Anglicky *implosion type*.



Obr. 3: Dva typy štěpných bomb (https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_weapon).

pující sekundární nálož na tak vysoké teploty, že se z něj stane plazma. Ta poté stlačí sekundární nálož, takže se spustí jaderné štěpení uvnitř sekundární nálož¹⁵. Dále se zahřeje fúzní materiál na teploty v řádech milionu kelvinů a spustí se fúzní reakce. Nakonec produkty této fúzní reakce iniciují štěpení materiálu obklopujícího sekundární nálož, u kterého by normálně k výraznému štěpení nedocházelo. Je také možné přidat třetí, větší fúzní nálož, která bude „zapálena“ energií z té předchozí. V principu se tento proces dá opakovat libovolně-krát a energetický výtěžek termonukleární bomby je tak v podstatě neomezený.¹⁶ Nejsilnější odpálená termonukleární bomba vůbec „Tsar Bomba“ měla sílu 50 Mt.



Obr. 4: Teller-Ulam konfigurace (https://en.wikipedia.org/wiki/Thermonuclear_weapon).

Maximální výkon jaderné bomby

Teď se konečně vracíme k otázce ze zadání. Nejdříve si ale musíme vybrat, jaký typ jaderné bomby budeme uvažovat. Jelikož energie termonukleární bomby je v podstatě neomezená a také proto, že proces výbuchu ve štěpné bombě se lépe popisuje, vybereme si štěpnou bombu.

¹⁵ sparkplug

¹⁶ https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_weapon

Jak již bylo zmíněno, energie výbuchu štěpné bomby je generována štěpnými reakcemi, které jsou iniciovány „okamžitými“ neutrony. Předpokládejme, že známe okamžitě uvolněnou energii E_o ¹⁷ jedné štěpné reakce. Pokud poté známe energii exploze bomby E_e , tak můžeme určit počet rozpadlých jader materiálu jako

$$N_{\text{in}} = \frac{E_e}{E_o}.$$

Dále víme, že počet rozpadů v n -tý shake je

$$N_n = N_0 k^n.$$

Pro jednoduchost volme konstantu $N_0 = 1$. Předpokládáme, že řetězovou reakci spustil jediný neutron. Ve štěpných jaderných bombách v průměru proběhne 80 shake,¹⁸ než štěpný materiál expanduje natolik, že řetězová reakce ustane.¹⁹ Pokud chceme zjistit faktor efektivního násobení neutronů pro danou bombu, stačí nám řešit rovnici

$$\sum_{i=0}^{80} k^i = N_{\text{in}}.$$

V našem modelu, který je daný rovnicí výše předpokládáme, že k je neměnné. Pokud se nám to nezdá příliš pravděpodobné, můžeme třeba předpokládat, že v posledních 5 shake se materiál již rozpíná a hodnota k bude postupně klesat např. na polovinu původní hodnoty.²⁰ Místo toho, aby platilo $N_n = N_{n-1} \cdot k$, platí $N_{76} = N_{75} \cdot k \cdot \frac{10-9}{10}$, $N_{77} = N_{76} \cdot k \cdot \frac{10-8}{10}$, atd. Dostáváme upravený vztah

$$\sum_{i=0}^{75} k^i + \sum_{i=1}^5 k^{75+i} \cdot \prod_{j=1}^i \frac{10-j}{10} = N_{\text{in}}.$$

Hledáme tedy kořen polynomu stupně 80 na kladné reálné poloose.²¹ To se na první pohled může zdát jako komplikovaná úloha. Stačí si ale uvědomit, že koeficient před každou mocninou k je kladný. To znamená, že pokud $P(0) < 0$, což v našem případě platí, bude mít tento polynom na kladné reálné ose pouze jeden kořen, neboť je v tomto intervalu ryze rostoucí. Tuto rovnici hravě vyřeší v podstatě libovolný výpočetní software jako je např. Mathematica. Také je problém možné vyřešit „vlastnoručně“ implementací Newtonovy metody v libovolném programovacím jazyce a jako počáteční hodnotu zvolit nulu (nebo jakékoli kladné číslo). Pro zjištění maximálního výkonu

$$P_{\text{max}} = \frac{\Delta W}{\Delta t},$$

nám pak stačí vybrat generaci s největším počtem reagujících neutronů N_{max} .²² ΔW potom bude dáno prostým vztahem

$$\Delta W = N_{\text{max}} E_o.$$

¹⁷To znamená kinetickou energii vzniklých jader, kinetickou energii „okamžitých“ neutronů a energii gamma záření.

¹⁸Vytvoří se 80 generací neutronů.

¹⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_mass

²⁰Přesný tvar tohoto předpokladu není odůvodněn výpočtem, ale pouze fyzikální intuicí, že reakce nepřestane probíhat náhle v jednom okamžiku, ale utlumuje se postupně. Slouží spíše pro ilustraci toho, že se do vztahu dá promítnout právě jistá fyzikální intuice.

²¹Záporné a imaginární hodnoty k totiž nemají fyzikální smysl.

²²Pro $k > 2$ to vždy bude 80. generace.

Tato energie je samozřejmě generovaná za časový úsek $\Delta t = 1$ shake. Máme tedy

$$P_{\max} = N_{\max} E_o \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

Zkusme si tento výpočet provést konkrétně pro tři bomby, které měly jako štěpný materiál ^{235}U .

Tab. 1: Tři bomby

Jméno	$\frac{m_p}{\text{kg}}$	$\frac{E_c}{\text{kt}}$	$\frac{E_e}{\text{kt}}$	$\frac{E_e/E_c}{\%}$	k	$\frac{\Delta W}{\text{kt}}$	$\Delta W/E_e$	$\frac{P_{\max}}{W}$
Little Boy	64	1 131	15	1,3	2,027	3,65	0,244	$1,53 \cdot 10^{21}$
Ivy King	60	1 060	500	47,2	2,120	132,54	0,265	$5,55 \cdot 10^{22}$
Orange Herald	117	2 067	720	34,8	2,130	192,47	0,267	$8,05 \cdot 10^{22}$

Hodnota m_p v tabulce značí hmotnost štěpného materiálu. Z ní a ze vztahu

$$M_{235\text{U}} = \frac{m_p}{n},$$

kde $M_{235\text{U}}$ je molární hmotnost, můžeme dopočítat počet částic a pak i energii uvolněnou při kompletním rozštěpení materiálu E_c . Hodnoty energie výbuchu E_e jsou známé²³ Podíl E_e/E_c pak udává, jak velká část materiálu byla při výbuchu rozštěpena. Nakonec podíl $\Delta W/E_e$ říká, jak moc velká část energie výbuchu vznikla při štěpení pomocí neutronů z nejpočetnější generace.²⁴

Z předposledního sloupce tabulky je patrné, že pro náš model je podíl energie ze štěpení poslední generace a celkové energie přibližně 0,25²⁵ Maximální výkon jaderné štěpné jaderné bomby můžeme přibližně vyjádřit pomocí energie jejího výbuchu

$$P_{\max} = 0,25 \cdot E_e \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

V posledním sloupci je uveden dopočítaný maximální výkon, kterého bomba dosahovala. Pro představu porovnejme výkon bomby „Ivy King“, což je největší čistě štěpná jaderná bomba, co kdy byla odpálena,²⁶ a výkon největší fungující jaderné elektrárny na světě, což je Jihokorejská jaderná elektrárna Kori. Kori má celkový výkon 7 489 MW. To znamená, že bomba „Ivy King“ měla v jeden okamžik výkon $7,4 \cdot 10^{12}$ krát větší.

Jan Novotný
jan.novotny@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

²³https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_weapon_yield

²⁴Ve všech zmíněných případech byla tato generace tou poslední, neboť $k > 1$ i pro posledních pět generací u všech uvažovaných bomb.

²⁵V případě, kdy uvažujeme k fixní, tak tento poměr vychází přibližně 0,50, takže maximální výkon dostáváme řádově stejný.

²⁶Bomba „Orange Herald“ měla ještě dodatečný fúzní boosting.