Úloha I.1 ... auta

3 body; průměr 2,48; řešilo 179 studentů

Dvě auta vyjedou ve stejný čas ze stejného bodu rychlostmi $v_1 = 100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ *a* $v_2 = 60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. *Je možné, aby se auta od sebe vzdalovala některými z následujících rychlostí? Pokud ano, příslušné situace načrtněte.*

$$v_a = 160\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,,\quad v_b = 40\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,,$$
$$v_c = 30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,,\quad v_d = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

Ivo chtěl Dana srazit přesně definovanou rychlostí.

Úlohu lze zřejmě řešit metodou „kouknu a vidím", kdy si hned všimneme, že nejmenší rychlosti (v_b) bude dosaženo při pohybu stejným směrem, největší rychlost (v_a) dostaneme při pohybu od sebe, hodnota v_d bude odpovídat „něčemu mezi tím" a varianta v_c není možná. Ukážeme si však také, k čemu dospějeme, jestliže se pokusíme poctivě ověřit všechny „samozřejmé" kroky řešení.

Situaci budeme popisovat pomocí vektorů. Polohu prvního auta v čase t označíme $\mathbf{r}_1(t)$, potom
$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v}_1 t\,.$$
Pro druhé auto platí obdobná rovnice. Vzájemnou rychlost aut spočítáme jako změnu velikosti jejich vzájemné vzdálenosti vydělenou časem, během kterého ke změně došlo. Po uplynutí času Δt bude platit
$$\mathbf{r}_1(t+\Delta t) = \mathbf{v}_1\cdot(t+\Delta t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{v}_1\Delta t\,.$$
Na toto místo je vhodné zařadit poznámku o použitém značení. Závorky mohou mít dva významy – buď obsahují funkční argumenty (jako třeba u $\mathbf{r}_1(t+\Delta t)$), anebo vyjadřují násobení (například u $\mathbf{v}_1\cdot(t+\Delta t)$). V tomto případě odlišujeme druhou variantu pro větší názornost tečkou. Zpravidla tomu tak nicméně není a mezi oběma variantami se rozlišuje pouze velikostí mezery, přičemž větší znamená násobení. Konkrétním příkladem může být právě $\mathbf{v}_1\;(t+\Delta t)$ či $f\;(x)$ (srovnejte s $f(x)$). Naneštěstí většina autorů ignoruje i toto pravidlo, a význam závorek je tak často nutné odhadovat pouze z kontextu.

Vzájemná vzdálenost bodů, kterou označíme s, není nic jiného než velikost jejich rozdílu
$$s = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\,.$$
Pro hledanou vzájemnou rychlost dostáváme
$$v(t) = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{r}_1(t+\Delta t) - \mathbf{r}_2(t+\Delta t)| - |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|}{\Delta t} =$$
$$= \frac{|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\cdot(t+\Delta t)| - |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\,t|}{\Delta t} = |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)|\,.$$

Tímto možná až zbytečně složitým výpočtem jsme ukázali to, co jsme byli schopni vytušit už na samém začátku svých úvah, a sice že vzájemná rychlost automobilů je rovna rozdílu jejich rychlostí. Nyní už jen stačí najít všechny vyhovující hodnoty.

Označme úhel mezi vektory rychlostí jako φ. Potom pro trojúhelník se stranami v_1, v_2 a v platí kosinová věta
$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi\,.$$

Kosinus φ nabývá všech hodnot mezi -1 a $+1$. Pro -1 vyjde $v = v_1 + v_2 = 160\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = v_a$, pro $+1$ dostaneme $v = v_1 - v_2 = 40\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = v_b$. Rychlost v_c zřejmě leží mimo tento interval, pročež jí není možné dosáhnout. Konečně rychlost v_d získáme při úhlu

$$\cos\varphi = \frac{v_1^2 + v_2^2 - v_d^2}{2v_1v_2} = \frac{11}{24}\,,$$
$$\varphi \doteq 1{,}09 \doteq 63^\circ\,.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz