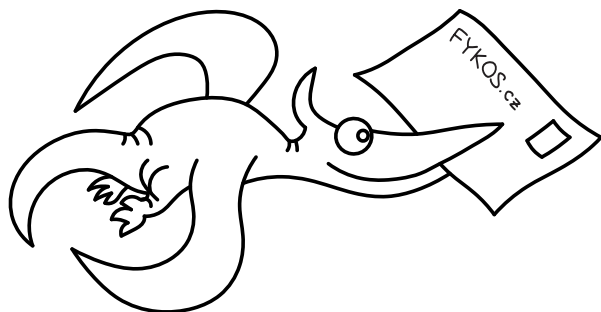


DANIELA PITTNEROVÁ A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XXXIV. ročník – 2020/21



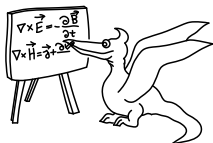
Copyright © Daniela Pittnerová, 2021
Copyright © MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy, 2021

ISBN 978-80-7378-446-1



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	13
Zadání experimentálních úloh	112
Řešení experimentálních úloh	113
Kmity a vlnění	152
Kapitola 1: Kmity a vlnění	152
Kapitola 2: Tření a vnější síly	162
Kapitola 3: Víc oscilátorů víc ví	169
Kapitola 4: Symetrie a lineární algebra	179
Kapitola 5: Vlny	194
Kapitola 6: Polarizace	203
Řešení úloh ze seriálu	212
Akce FYKOSu	235
Podzimní soustředění v Kořenově	235
Jarní soustředění (neproběhlo)	236
Fyziklání 2021	236
Fyziklání online	238
Fyzikální Náboj	240
Den s experimentální fyzikou	242
FYKOSí online víkend	243
Pořadí řešitelů	244



Předmluva

Milá čtenářko, milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala publikace, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v jeho XXXIV. ročníku, který probíhal ve školním roce 2020/21.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v České republice. Je organizován studenty především Matematicko-fyzikální fakulty UK, ale i jiných škol v České republice i zahraničí, a podporován zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK. Snaží se oslovit studenty se zájmem o fyziku, matematiku a techniku, zkrátka o svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku publikujeme celkem sedm brožur, ve kterých se nachází šest sérií po osmi úlohách. Dvě z nich jsou „jednoduché“ (zaměřené především na první dva ročníky středních škol), jedna „problémová“, vyžadující hlubší zamyšlení, jedna experimentální a jedna „seriálová“. Zbylé tři příklady se týkají libovolného fyzikálního tématu a tvoří jádro série. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které studenti znají z hodin fyziky. Mnohdy vyžadují nějakou hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídka je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení (ať už poštou nebo přes internet). Opravující pak jejich řešení okomentují, obodují a vysvětlí případné chyby. Zpracovaná řešení pošleme zpět řešitelům spolu s výsledkovými listinami, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni. V tomto školním roce jsme vzhledem k pandemii nemoci COVID-19 omezili poštovní komunikaci s řešiteli na minimum, nicméně všechny materiály a informace byly k nalezení na našem webu.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpoblábnější jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutů Česka. Jejich účastníci si užijí bohatý program plný odborných přednášek z oblasti matematiky, fyziky nebo jiných přírodních věd, ale i her a dalších aktivit v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na zajímavá místa. Tento akademický rok se podzimní soustředění konalo v Kořenově a jarní soustředění bylo kvůli pandemii nahrazeno FYKOSím online víkendem.

Další FYKOSí akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá vědecká pracoviště v Praze a okolí, kde probíhá aktuální fyzikální výzkum. V tomto akademickém roce proběhl DSEF také

jenom v online podobě, což ale umožnilo ozvláštnit ho o netradiční části programu.

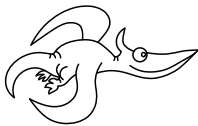
Fyziklání je tříhodinová soutěž až pětičlenných týmů v řešení fyzikálních úloh. Vyhrává tým s největším bodovým ziskem, přičemž rozhoduje jak správnost, tak i rychlost. V letošním 15. ročníku měla soutěž online podobu, což umožnilo zapojení týmů z celého světa. Účastnilo se rekordních 442 družstev z téměř 30 států. Celkově 1916 soutěžících je pro nás skvělým důkazem, že se fyzika a přírodní vědy obecně mezi středoškolskými studenty stále těší popularitě. K samotné soutěži už neoddělitelně patří také doprovodný víkendový program.

Fyzikláním je inspirovaná internetová soutěž Fyziklání online (v zahraniční verzi Online Physics Brawl). V listopadu 2020 proběhl její desátý ročník a opět zaznamenala velký úspěch. Kromě tří kategorií pro středoškoláky, kterým je soutěž určena především, je ve Fyziklání online také kategorie Open, kde může soutěžit opravdu každý. Tohoto ročníku se zúčastnilo 474 středoškolských a 145 dalších týmů z celkově 47 zemí. To svědčí o narůstající popularitě soutěže, která se již také řadí mezi tradiční FYKOSí akce.

Kromě toho FYKOS organizuje i další menší události, o nichž se dozvíte dále v této publikaci nebo na našich webových stránkách.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXXIV. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamyšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je seriál o kmitání a vlnění, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci publikace se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujal natolik, že by ses chtěl stát řešitelem či organizátorem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>
 e-mail: fykos@fykos.cz

A jak vypadal XXXIV. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 199 studentů ze 122 středních škol z různých koutů světa. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 2 744 došlých řešení a udělili 11 158 bodů.



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... skoro zastavené světlo

3 body

Jaký index lomu by musela mít průhledná planoparalelní deska tloušťky $d = 1$ cm, abychom při pohledu na ni viděli světlo, které do ní vniklo z druhé strany před rokem? A jak moc je daná situace reálná? (řešení str. 13)

Úloha I.2 ... brzdi!

3 body

Karlovo auto, jedoucí rychlostí v_0 , zastaví na vzdálenosti s_0 při použití konstantní brzdné síly F_0 . Kolikrát delší bude brzdná dráha při stejné síle, ale dvojnásobné počáteční rychlosti? Kolikrát větší musí být brzdná síla, aby auto zastavilo na stejné dráze při dvojnásobné počáteční rychlosti? (řešení str. 14)

Úloha I.3 ... cyklistický anemometr

5 bodů

Vašek jede za větrného počasí na kole. Jede-li rovně rychlostí $v = 10 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, naměří, že proti němu fouká vítr vodorovně pod úhlem 25° od směru jízdy. Při vyšší rychlosti $v' = 20 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ je tento úhel už jenom 15° . Určete rychlost a směr větru vzhledem k nehybnému pozorovateli. (řešení str. 14)

Úloha I.4 ... solární plachetnice

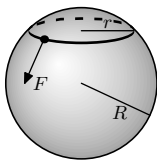
8 bodů

Ve vzdálenosti $0,8 \text{ au}$ od Slunce se vznáší solární plachetnice ve tvaru tenké desky o ploše $S = 500 \text{ m}^2$ s plošnou hustotou $\sigma = 1,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$. Jakou silou na ni působí záření dopadající ze Slunce v okamžiku, kdy se plachetnice právě začíná pohybovat? Jaké bude v mít tu chvíli zrychlení? Zářivý výkon Slunce je $L_\odot = 3,826 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Předpokládejte, že záření dopadá na plachetnici kolmo a odráží se pružně.

Nápověda Doporučujeme najít zrychlení při malé počáteční rychlosti v_0 a poté dosadit $v_0 = 0$. (řešení str. 17)

Úloha I.5 ... jak si navléci čepici jednou rukou?

8 bodů



Mějme kouli o poloměru R a cyklickou nehmotnou gumičku o poloměru r_0 s tuhostí k , přičemž $r_0 < R$. Třecí koeficient mezi gumičkou a koulí je f . Určete podmínku pro hodnoty těchto parametrů, aby bylo možné přetáhnout gumičku přes kouli tak, že se gumičky budeme dotýkat jenom v jednom bodě.

Pro jednoduchost uvažujte, že gumička je pružná pouze v tečném směru (takže vždy leží v jedné rovině). (řešení str. 19)

Úloha I.P ... Přežijeme ve vakuu?

10 bodů

Různé filmy dávají vzniknout různým představám o tom, co a jak rychle se stane, pokud astronautovi praskne skafandr. Některé z nich jsou dokonce protichůdné. Odůvodněte, co by se s největší pravděpodobností ve skutečnosti stalo, pokud by se dosud zdravý člověk ocitl nijak nechráněný uprostřed vakua. Co by bylo nejrychlejší příčinou smrti? *(řešení str. 20)*

Úloha II.1 ... svítí-nesvítí

3 body

Délka dne a noci se v průběhu roku mění, přičemž na různých místech na Zemi se může měnit jinak. Jak je to však s roční průměrnou délkou dne? Je všude stejná, nebo se na různých místech na Zemi liší? Stačí uvést pouze kvalitativní popis.

Bonus Pokuste se odhadnout, o kolik nejvíce může být průměrný den delší, než 12 h. *(řešení str. 23)*

Úloha II.2 ... loď na obzoru

3 body

Kačka a Katka sledují loď plující konstantní rychlostí do přístavu. Kačka stojí na skále nad přístavem, přičemž má oči ve výšce $h_1 = 20$ m nad hladinou. Katka se nachází dole pod skálou, její oči jsou v nadmořské výšce $h_2 = 1,7$ m. Pokud Katka zahlédne na obzoru vrchol blížící se lodi se zpožděním $t = 25$ min oproti Kačce, za jak dlouho loď vysoká $h = 30$ m dopluje do přístavu? Zemi považujte za dokonalou kouli se známým poloměrem. *(řešení str. 24)*

Úloha II.3 ... auto na dně jezera

5 bodů

Ne jednou se ve filmu stalo, že auto spolu s cestujícími spadlo do vody. Vypočítejte, jakým momentem sil by musel řidič tlačit na dveře, aby je otevřel na dně jezera, když je jejich spodní rám 8,0 m pod hladinou. Uvažujte obdélníkové dveře s rozměry 132 cm \times 87 cm, které se otvírají podle svislé osy. *(řešení str. 26)*

Úloha II.4 ... vytahování ledu teplem

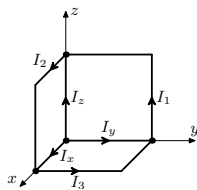
7 bodů

Ve sklepě v hloubce $h = 4,2$ m je uskladněný led, který potřebujeme vytáhnout nahoru. Máme tepelný stroj, který pracuje s teplotou okolí a ledu s $\eta = 12\%$ účinností vůči jeho maximální možné účinnosti (dané Carnotovým cyklem). Teplota vzduchu je $T_v = 24$ °C, vytažený led potřebujeme mít na teplotě $T_{\max} = -9,0$ °C. Jakou teplotu musí mít led ve sklepě, aby jej bylo možné vytáhnout pomocí tohoto stroje? Proč to půjde, i když přitom zahřejeme led, který současně vytahujeme? *(řešení str. 27)*

Úloha II.5 ... detektor magnetických nestacionarit

10 bodů

Elektrický obvod znázorněný na obrázku může sloužit jako detektor nestacionárního magnetického pole. Jedná se o dvě hrany krychle tvořené elektrickým drátem. Elektrický odpor jedné hrany je R . Nachází-li se tato konstrukce v nestacionárním homogenním magnetickém poli, které má pro jednoduchost konstantní směr a jeho velikost se mění jen pomalu, tečou na vyznačených místech proudy I_1 , I_2 , I_3 . Určete ze znalosti těchto proudů směr a časovou změnu velikosti magnetického pole v prostoru.


(řešení str. 28)
Úloha II.P ... nákladný hokej

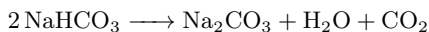
9 bodů

Odhadněte, kolik stojí kompletní zalednění hokejového hřiště.

(řešení str. 32)
Úloha III.1 ... pečící

3 body

Při pečení perníku se do těsta přidává jedlá soda – hydrogenuhličitan sodný (NaHCO_3). Uvažujte, že se při vyšší teplotě rozloží podle rovnice



na uhličitan sodný, oxid uhličitý a vodu. O kolik se díky bublinkám oxidu uhličitého a vodní páry zvětší objem buchty, když do ní přidáme 10 g hydrogenuhličitanu sodného? Počítejte, že oxid uhličitý a vodní pára se chovají jako ideální plyny a těsto v okolí bublinek tuhne při teplotě 200°C a tlaku 1013 hPa .

(řešení str. 36)
Úloha III.2 ... bungee

3 body

Jirka s Kátou si chtějí vyzkoušet bungee-jumping. Na skok z výšky $h = 100 \text{ m}$ mají dokonale pružné lano o délce $l = 40 \text{ m}$, které je kalibrované tak, že když s ním skočí Káta o hmotnosti $m_K = 50 \text{ kg}$, zastaví se ve výšce $h_K = 16 \text{ m}$ nad zemí. Může toto lano bezpečně použít Jirka s hmotností $m_J = 80 \text{ kg}$? Odpor vzduchu a výšku Káti a Jirku zanedbejte.

(řešení str. 37)
Úloha III.3 ... bum-bác, bum-bác

6 bodů

Představme si, že na geosynchronní oběžnou dráhu umístíme velké množství satelitů. Shodou okolností dojde ke srážce, která se vymkne kontrole a vytvoří tenkou sférickou vrstvu homogenně posetou deseti miliony úlomků o průměrné velikosti $x = 10 \text{ cm}$. Předpokládejte, že směry rychlostí jednotlivých úlomků jsou v tečné rovině ke sféře orientované náhodně. Kolik času průměrně uplyne mezi dvěma srážkami?

(řešení str. 38)

Úloha III.4 ... větrníkový katapult

6 bodů

Malý myšák Joe se rád katapultuje z konce vrtule ventilátoru tak, že se jednoduše ve vhodnou dobu pustí a odletí. Kdy se má pustit, aby doletěl co nejdál? Vrtule má délku l a otáčí se s úhlovou rychlostí ω , přičemž rovina otáčení je kolmá na vodorovnou rovinu. Dodejme, že střed otáčení je ve výšce h nad zemí.

*(řešení str. 40)***Úloha III.5 ... pašování ve vesmíru**

9 bodů

Dvě vesmírné lodě letí v jedné přímce proti sobě. Jejich počáteční vzdálenost je d . První se pohybuje rychlostí v_1 , druhá v_2 (ve stejné vztažné soustavě). První dokáže vyvinout maximální zrychlení a_1 , druhá a_2 (obě v libovolném směru). Posádky lodí si chtějí předat nějaké „zboží“, ale k tomu potřebují, aby se lodě potkaly ve stejný čas na stejném místě a přitom měly stejnou rychlost. Za jaký nejmenší čas je toho možné dosáhnout? Relativistické jevy neuvazujte.

*(řešení str. 44)***Úloha III.P ... vlnitý elektromagnetismus**

11 bodů

Co kdyby přírodní zákony nebyly v celém vesmíru stejné? Co kdyby se nějak měnily s polohou? Zaměřme se na elektromagnetickou interakci. Jak minimálně by se konstanta v Coulombově zákonu musela měnit se vzdáleností, abychom to mohli pozorovat? Jak bychom to pozorovali?

*(řešení str. 47)***Úloha IV.1 ... dvě kapky**

3 body

Od vodovodního kohoutku se těsně za sebou odtrhnou dvě kapky a začnou padat dolů. Jak se bude jejich vzájemná vzdálenost měnit v čase? Odpor vzduchu zanedbejte.

Bonus Odpor vzduchu započítejte, odhadněte potřebné parametry a určete vzdálenost kapek po dlouhé době.

*(řešení str. 51)***Úloha IV.2 ... pružinek není nikdy dost**

3 body

Jakou práci vykonáme při zkroutení pružiny z rovnovážné polohy o úhel $\alpha = 60^\circ$, pokud pružinu ve zkrouteném stavu udržujeme momentem síly $M = 1,0 \text{ N}\cdot\text{m}$?

*(řešení str. 54)***Úloha IV.3 ... křivá optika**

5 bodů

Mějme bodový zdroj světla a rovinnou skleněnou desku s indexem lomu $n = 1,50$. V místě paty kolmice od zdroje na desku se uvnitř desky nacházejí vlnoplochy s poloměrem křivosti $R = 5,00 \text{ m}$. Jaká je skutečná vzdálenost zdroje a desky?

(řešení str. 54)

Úloha IV.4 ... mravenčí

8 bodů

Mravenci přišli na zajímavý způsob vyhřívání mraveniště – vylezou ven, nechají se ohřát slunečním zářením a opět vlezou dovnitř, kde zase předají teplo mraveništi. To aproximujeme kuželem o výšce $H = 0,8\text{ m}$ s poloměrem podstavy $R_0 = 1,5\text{ m}$. Celulózové stěny s tepelnou vodivostí $\lambda = 0,039\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ jsou široké 2 cm.

Předpokládáme, že veškerá tepelná výměna mezi mraveništěm a okolím (které má teplotu $T_o = 10\text{ }^\circ\text{C}$) je zprostředkována pouze mravenci a vedením přes stěny, tepelnou výměnu se zemí můžeme zanedbat. Mravenec váží $m = 5\text{ mg}$ a má měrnou tepelnou kapacitu odhadem $4000\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Kolik mravenců vyhřátých na $T_m = 37\text{ }^\circ\text{C}$ musí každou sekundu přilézt do mraveniště, aby v celém vnitřním objemu udrželi konstantní teplotu $T_M = 20\text{ }^\circ\text{C}$? *(řešení str. 55)*

Úloha IV.5 ... Efhári-Goiteía

8 bodů

Efhári a Goiteía jsou dvě složky dvojsouhvězdí okolo nedávno vzniklé hvězdné soustavy. Obíhají okolo společného těžiště po kruhových trajektoriích ve vzdálenosti $a = 250 \cdot 10^3\text{ km}$. Efhári má poloměr $R_1 = 4300\text{ km}$, hustotu $\rho_1 = 4100\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a dobu siderické rotace $T_1 = 14\text{ h}$. Goiteía je menší s poloměrem $R_2 = 3800\text{ km}$, má však větší hustotu $\rho_2 = 4500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a kratší dobu rotace $T_2 = 11\text{ h}$. Osy rotace planet i soustavy jsou rovnoběžné. Za několik set milionů let přejde soustava díky slapovým silám do tzv. vázané rotace. Určete výslednou změnu oběžné doby za předpokladu, že tělesa jsou homogenní a přibližně sférická. *(řešení str. 56)*

Úloha IV.P ... pták Fykosák na dovolené

10 bodů

Jak by fungovalo letectví na jiných planetách (s atmosférou)? Zajímejte se hlavně o proudová letadla. Které parametry by působily pozitivněji a které negativněji než na Zemi? *(řešení str. 58)*

Úloha V.1 ... náboj Země

3 body

Jaký celkový náboj by musela mít Země, aby elektrony blízko jejího povrchu odletávaly pryč? Jak by se tento náboj lišil pro protony? *(řešení str. 66)*

Úloha V.2 ... retardovaný Jupiter

3 body

Siderická perioda Jupiteru činí přibližně 11,9 roku, rychlost světla je $3 \cdot 10^8\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, vzájemnou vzdálenost Země a Slunce předpokládejte rovnu $150 \cdot 10^9\text{ m}$. Pomocí těchto veličin odhadněte, jak dlouho poletí světlo z Jupiteru na Zem, jestliže se Jupiter nachází na místě, na které se z opozice dostane za jednu čtvrtinu synodické periody. *(řešení str. 67)*

Úloha V.3 ... nedobrovolné breathariánství

6 bodů

Lukáš si chtěl uvařit večeři. Postavil hrnc na plotnu, ale zapomněl do něj dát vodu (nebo cokoliv jiného). Teplota hrnce a vzduchu uvnitř něj se ustálila na $100\text{ }^\circ\text{C}$

(neptejte se, jak se to bez vody podařilo). Lukáš si záhy svoji chybu uvědomil a hrnec z plotny sundal, po vychladnutí na pokojovou teplotu z něj ale nedokázal sejmout poklici o ploše S a hmotnosti m . Spočítejte, jakou silou poklice na hrnci držela, pokud ji tam Lukáš dal

1. těsně před sundáním z plotny,
2. před začátkem přípravy večeře.

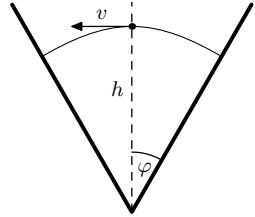
Předpokládejte, že vzduch se chová jako ideální plyn.

(řešení str. 68)

Úloha V.4 ... perioda velkých kmitů

7 bodů

Uvažujme dvě poloroviny, které svírají úhel $2\varphi < \pi$. Umístíme je tak, aby jejich společná přímka byla vodorovná a jejich rovina symetrie byla svislá, takže vytvoří jakési údolí. Následně vezmeme hmotný bod a z výšky h nad společnou přímkou jej hodíme rychlostí v ve vodorovném směru tak, aby začal konat periodický pohyb jako na obrázku. Jak velkou rychlostí ho musíme hodit? Předpokládejte dokonale pružné odrazy od polorovin.



(řešení str. 68)

Úloha V.5 ... rheonomní katapult

10 bodů

Mějme tenkou obdélníkovou desku, která se otáčí kolem své horizontálně orientované hrany konstantní úhlovou rychlostí. V okamžiku, kdy se deska nachází ve vodorovné poloze a otáčí se směrem nahoru, na ni umístíme malý kvádřík tak, aby se vzhledem k ní zpočátku nepohyboval. Jak se bude kvádřík po desce pohybovat, jestliže je tření mezi oběma tělesy nulové? Kam musíme kvádřík na začátku umístit, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky desky? Diskutujte dále všechny potřebné předpoklady, které pro to musí být splněny.

Bonus Jaký výkon dodává deska kvádříku a jakou celkovou práci na něm vykoná?

(řešení str. 70)

Úloha V.P ... to nechceš

9 bodů

Jistě jste již někdy slyšeli, že skořápka běžného slepičího vejce dokáže vydržet i poměrně velký tlak. Vysvětlete, jak je to možné, když je přeci velmi snadné vejce rozbít. V jakém směru snese skořápka největší zatížení? Proč a jak se rozbije, když ji zatížíme příliš? Popište různé mechanismy a určete, který je nejpravděpodobnější. Nezapomeňte, že se zabýváme skutečnými, nikoli ideálními vejci. Kde to bude možné, zkuste svá tvrzení podpořit výpočty.

(řešení str. 81)

Úloha VI.1 ... krasobruslařka

3 body

Uvažujme krasobruslařku s rozpaženými rukama, točící se úhlovou rychlostí ω kolem své osy. Jakou úhlovou rychlostí ω' se bude točit, pokud připažít? Jakou práci musí vykonat, aby připažila? Tvar krasobruslařky aproximujte dle svého uvážení.

(řešení str. 90)

Úloha VI.2 ... rotující kyvadélko

3 body

Mějme matematické kyvadlo délky l se závažím o hmotnosti m v tíhovém poli se zrychlením g . Kyvadélko uvedeme do rotačního pohybu okolo svislé osy s konstantní úhlovou rychlostí ω . Určete stabilní polohy kyvadla. Výsledek vyjádřete pomocí úhlu od svislice. (řešení str. 91)

Úloha VI.3 ... třikrát a dost

5 bodů

Úsek silnice o délce $a = 2,8$ km začíná semaforem s periodou T , na kterém signál zeleného světla trvá po dobu $t_1 = 79$ s. Na konci tohoto úseku je druhý semafor se stejnou periodou, ale délka trvání téhož signálu je pro něj $t_2 = 53$ s. Na obou semaforech se zelené světlo rozsvítí vždy ve stejný okamžik. Spočítejte, za jak dlouho průměrně přejedete celý úsek silnice (včetně čekání na semaforech), pokud se při jízdě pohybujete rychlostí $v = 60$ km·h⁻¹. Čas potřebný na rozjezdy a brzdění zanedbejte. (řešení str. 94)

Úloha VI.4 ... spatřil jsem kometu

8 bodů

Dlouhoperiodické a neperiodické komety začnou vyvrhovat plyn zpravidla při překročení dráhy Saturnu. Do té doby se pro pozorovatele na Zemi jeví jen jako malé kusy skal, a jsou tedy téměř nepozorovatelné. Uvažujte kometu se vzdáleností v přísluní rovnou $q = 0,5$ au a odhadněte, za jak dlouho od okamžiku, kdy překoná dráhu Saturnu, poprvé překročí dráhu Země. Trajektorie komety má excentricitu velmi blízko jedné. (řešení str. 104)

Úloha VI.5 ... těžká pružina

9 bodů

Mějme homogenní pružinu s tuhostí k a hmotností m , jejíž šířka je zanedbatelná vůči její délce. Pružinu uchytneme na jednom konci tak, aby kolem něj mohla rotovat, a následně ji roztočíme úhlovou rychlostí ω . Kolikrát se tato pružina při rotaci prodlouží? Vliv tíhového pole neuvažujte. (řešení str. 106)

Úloha VI.P ... nebezpečnější korona

10 bodů

Dojde-li k výronu koronální hmoty ze Slunce, začne se tato hmota velkou rychlostí šířit prostorem. Někdy může zasáhnout Zemi a ovlivnit její magnetické pole. Odhadněte, jak velké elektrické proudy by mohl takový výron generovat na Zemi v síti elektrického vedení. Na jakých parametrech to závisí? Okomentujte, jaké by měla taková událost dopady na lidskou civilizaci. (řešení str. 108)



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... skoro zastavené světlo

Jaký index lomu by musela mít průhledná planparalelní deska tloušťky $d = 1$ cm, abychom při pohledu na ni viděli světlo, které do ní vniklo z druhé strany před rokem? A jak moc je daná situace reálná?

Index lomu vyjadruje pomer rychlosti svetla vo vákuu c a v prostredí v a je definovaný ako

$$n = \frac{c}{v},$$

kde rychlost svetla v prostredí máme z podmienky zo zadania danú ako $v = d/t$. Po dosadení dostávame

$$n = \frac{ct}{d} \doteq 9,5 \cdot 10^{17}.$$

Vzhľadom na vysoký index lomu dosky navyše ani nie je nutné uvažovať pri výpočte uhol zovretý lúčom a kolmicou na rozhranie. Dopadajúce lúče sa totiž na prvom rozhraní lámu veľmi blízko ku kolmici, na druhom sa rozbehnú pod pôvodnými smermi.

Nielenže takýto index lomu je úplne nezmyselný (všetky známe materiály majú index lomu menší ako 10), ale aj vlnová dĺžka viditeľného svetla by v tomto materiáli bola $\lambda = 5 \cdot 10^{-25}$ m, čo je o desať rádov menej ako rozmery jadra atómu. Aby sme v jednotlivých miestach nevideli svetlo z rôznych častí dňa, musela by byť doska veľmi presne planparalelná, na úrovni $\Delta h \approx 10$ nm pre časový rozdiel rádu minút. Materiál by navyše musel mať nulovú disperziu, aby rôzne farby cez dosku neprechádzali rôzne dlho.

A čo je najsmutnejšie, použitím Fresnelových vzorcov dostávame, že cez prvé rozhranie by pri kolmom dopade prešlo len¹

$$1 - R = 1 - \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 = \frac{4n}{(n + 1)^2} \approx \frac{4}{n} \doteq 4,2 \cdot 10^{-18}$$

z dopadnutej svetelnej intenzity a zvyšok by sa odrazil. Teda ak by taký materiál naozaj existoval, nič by sme cezeň nevideli.

¹ R označuje koeficient odrazivosti, teda časť svetelnej intenzity odrazenej od rozhrania.

Úloha I.2 ... brzdi!

Karlovo auto, jedoucí rychlostí v_0 , zastaví na vzdálenosti s_0 při použití konstantní brzděné síly F_0 . Kolikrát delší bude brzděná dráha při stejné síle, ale dvojnásobné počáteční rychlosti? Kolikrát větší musí být brzděná síla, aby auto zastavilo na stejné dráze při dvojnásobné počáteční rychlosti?

Auto jedoucí rychlostí v_0 má kinetickou energii $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$. Po zastavení bude jeho kinetická energie nulová. Síla F_0 musí tedy za dráhu s_0 vykonat práci E_{k0} . Jelikož je síla konstantní, platí vztah

$$F_0 s_0 = E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Bude-li mít na začátku auto rychlost $2v_0$, pak musí síla F_0 přes novou brzděnou dráhu s_1 vykonat práci

$$F_0 s_1 = E_{k1} = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 = 4\frac{1}{2}mv_0^2 = 4E_{k0} = 4F_0 s_0. \quad (1)$$

Vydělíme-li oba vztahy silou F_0 a porovnáme, vidíme

$$s_1 = 4s_0,$$

při zdvojnásobení počáteční rychlosti bude tedy výsledná brzděná dráha čtyřnásobná.

Pokud chceme zastavit na dráze s_0 z rychlosti $2v_0$, síla musí opět vykonat práci $4E_{k0}$. Ze vztahu 1 je hned vidět, že v takovém případě musí mít síla velikost $4F_0$.

Úloha I.3 ... cyklistický anemometr

Vašek jede za větrného počasí na kole. Jede-li rovně rychlostí $v = 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, naměří, že proti němu fouká vítr vodorovně pod úhlem 25° od směru jízdy. Při vyšší rychlosti $v' = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ je tento úhel už jenom 15° . Určete rychlost a směr větru vzhledem k nehybnému pozorovateli.

Jedná se o úlohu, kterou vyřešíme vektorovým skládáním rychlostí. Zavedeme souřadnice spojené s nehybným pozorovatelem, ve kterých je rychlost Vaška v prvním případě $\mathbf{v} = (v, 0)$. V druhém případě pak zrychlí na rychlost $\mathbf{v}' = (v', 0)$. Vítr vzhledem k nehybnému pozorovateli vane rychlostí \mathbf{u} zapsanou ve složkách jako $\mathbf{u} = (u \cos \alpha, u \sin \alpha)$, kde α je úhel, který svírá rychlost větru \mathbf{u} s rychlostí cyklisty \mathbf{v} a je odlišný od úhlu, který pozoruje Vašek v jeho pohybuující se soustavě.

Označme \mathbf{w} a \mathbf{w}' rychlost větru vzhledem k Vaškovi v prvním a v druhém případě. Rychlost větru vzhledem k cyklistovi získáme odečtením rychlosti cyklisty od rychlosti větru vzhledem k nehybnému pozorovateli (jedná se vlastně o Galileovu transformaci rychlostí), neboli v obou případech platí

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\mathbf{w}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}'. \quad (3)$$

Ze zadání víme, že vektor rychlosti větru \mathbf{w} , resp. \mathbf{w}' , svírá s vektorem rychlosti cyklisty úhel $\beta = 155^\circ$, resp. $\gamma = 165^\circ$, pokud na cyklistu fouká vítr zprava, viz obr. 1. Jestliže na něj fouká vítr zleva, platí $\beta = -155^\circ$, $\gamma = -165^\circ$. Rychlosti \mathbf{w} a \mathbf{w}' potom vyjádříme ve složkách jako $\mathbf{w} = (w \cos \beta, w \sin \beta)$ a $\mathbf{w}' = (w' \cos \gamma, w' \sin \gamma)$. Dosadíme-li do rovnic (2), (3) konkrétní složky, dostaneme 4 rovnice

$$w \cos \beta = u \cos \alpha - v, \quad (4)$$

$$w \sin \beta = u \sin \alpha, \quad (5)$$

$$w' \cos \gamma = u \cos \alpha - v', \quad (6)$$

$$w' \sin \gamma = u \sin \alpha. \quad (7)$$

Vyřešením těchto rovnic nalezneme hledanou velikost u rychlosti větru vzhledem k zemi a jeho směr α vztažený na směr rychlosti cyklisty. Rovnic máme akorát, neboť ještě neznáme w a w' . Postupovat můžeme např. následovně. Nejdříve eliminujeme z rovnic w a w' a to tak, že rovnici (4) vydělíme rovnicí (5), a navíc vzniklou rovnicí vynásobíme faktorem $u \sin \alpha$. Podobné upravy provedeme také s rovnicemi (6) a (7), což vede na soustavu rovnic

$$u \sin \alpha \cotg \beta = u \cos \alpha - v, \quad (8)$$

$$u \sin \alpha \cotg \gamma = u \cos \alpha - v'. \quad (9)$$

Nejdříve nalezneme u . Odečtením rovnice (9) od (8) dostaneme

$$u \sin \alpha (\cotg \beta - \cotg \gamma) = v' - v, \quad (10)$$

Dále rovnici (8) vynásobíme $\cotg \gamma$, rovnici (9) vynásobíme $\cotg \beta$ a obě rovnice od sebe odečteme, takže dostaneme

$$u \cos \alpha (\cotg \beta - \cotg \gamma) = v' \cotg \beta - v \cotg \gamma, \quad (11)$$

Umocnění rovnic (10) a (11) na druhou a jejich součet vede na

$$u^2 (\cotg \beta - \cotg \gamma)^2 = (v' - v)^2 + (v' \cotg \beta - v \cotg \gamma)^2, \quad (12)$$

odkud plyne

$$u = \frac{\sqrt{(v' - v)^2 + (v' \cotg \beta - v \cotg \gamma)^2}}{|\cotg \beta - \cotg \gamma|}, \quad (13)$$

kde jsme vyloučili záporné řešení.

Nyní nalezneme úhel α . Jednoduchými algebraickými úpravami rovnic (8), (9) dostaneme

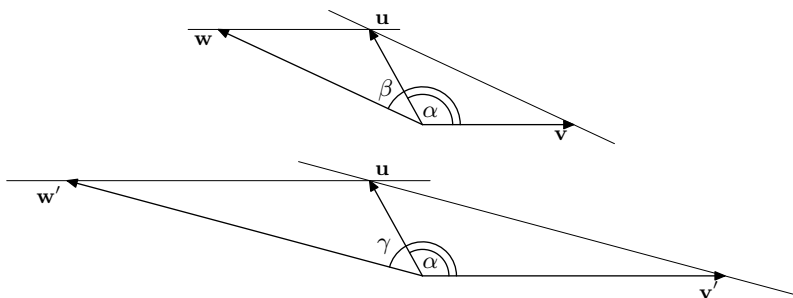
$$u (\cos \alpha - \cotg \beta \sin \alpha) = v, \quad (14)$$

$$u (\cos \alpha - \cotg \gamma \sin \alpha) = v'. \quad (15)$$

Dále vydělením rovnic (14), (15) dostaneme rovnici, ze které vyjádříme $\operatorname{tg} \alpha$ jako

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v' - v}{v' \operatorname{cotg} \beta - v \operatorname{cotg} \gamma}. \quad (16)$$

Fouká-li na Vaška vítr zprava, dostaneme po číselném dosazení hodnot ze zadání do rovnice (13) velikost rychlosti větru vzhledem k zemi $u \doteq 7,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Rovnice (16) vede v intervalu $(-\pi, \pi)$ pokývajícím všechny směry na dvě řešení, které po číselném dosazení hodnot ze zadání jsou $\alpha \doteq 120^\circ$ a $\alpha \doteq -60^\circ$. Řešení $\alpha \doteq -60^\circ$ však odpovídá zápornému řešení u rovnice (12), a proto představuje stejný vektor \mathbf{u} jako $\alpha \doteq 120^\circ$ a $u \doteq 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Na závěr doplníme, že v případě, kdy na Vaška fouká vítr zleva, dostaneme řešení $\alpha \doteq -120^\circ$ a $u \doteq 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. 1: Skládání rychlostí. Nahoře má Vašek nižší rychlost, dole vyšší.

Ukážeme si také, jak lze dojít ke správnému řešení rychlejší cestou s pomocí sinové a kosinové věty. Obrázek 1 překreslíme dohromady tak, jak je znázorněno na obrázku 2. Místo úhlů β a γ budeme používat jejich doplňkové úhly $\beta' = 180^\circ - \beta = 25^\circ$ a $\gamma' = 180^\circ - \gamma = 15^\circ$. Aplikací sinové věty na pravý trojúhelník dostaneme rovnost

$$\frac{w}{\sin \gamma'} = \frac{v' - v}{\sin(\beta' - \gamma')},$$

ze které plyne vztah

$$w = \frac{(v' - v) \sin \gamma'}{\sin(\beta' - \gamma')}. \quad (17)$$

Dosazením hodnot ze zadání dostáváme $w \doteq 14,9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Z levého trojúhelníku už tedy známe w , ze zadání samozřejmě také v a úhel β' , a chceme najít u a úhel α . V obou případech si poradíme kosinovou větou. Pro první případ použijeme kosinovou větu s úhlem β' ve tvaru

$$u^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos \beta'. \quad (18)$$

Odmocněním a dosazením za w z rovnice (17) získáme vztah pro výpočet velikosti rychlosti větru vzhledem k nehybnému pozorovateli

$$u = \sqrt{v^2 + \left(\frac{(v' - v) \sin \gamma'}{\sin(\beta' - \gamma')} \right)^2 - 2v(v' - v) \frac{\sin \gamma' \cos \beta'}{\sin(\beta' - \gamma')}}. \quad (19)$$

V našem konkrétním případě má velikost $u \doteq 7,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, tedy výsledek se shoduje s prvním způsobem výpočtu. Jinou aplikací kosínové věty na levý trojúhelník v obr. 2 dostaneme vztah

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2vu \cos \alpha,$$

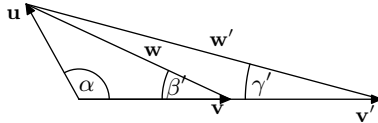
ze kterého jednoduše plyne

$$\cos \alpha = \frac{v^2 + u^2 - w^2}{2vu}.$$

Pravou stranu této rovnice můžeme ještě zjednodušit pomocí rovnice (18) následovně

$$\cos \alpha = \frac{v - w \cos \beta'}{u},$$

čímž jsme získali vztah pro výpočet úhlu α . Dosadíme-li do něho za w z rovnice (17) a za u z rovnice (19) a poté číselné hodnoty ze zadání, dostáváme v rozsahu $(-180^\circ, 180^\circ)$ dvě řešení $\alpha \doteq 120^\circ$ a $\alpha \doteq -120^\circ$, které odpovídají případu, kdy fouká vítr na Vaška zprava a zleva. Zcela správně by řešení $\alpha \doteq -120^\circ$ mělo odpovídat úhlům $\beta' - 25^\circ$, $\gamma' = -15^\circ$. Všimněte si však, že rovnice v druhém způsobu výpočtu nejsou k současné změně znamének úhlů β' a γ' citlivé. Tento postup je tedy v souladu s prvním způsobem výpočtu.



Obr. 2: Druhý způsob skládání rychlostí.

Úloha I.4 ... solární plachetnice

Ve vzdálenosti $0,8 \text{ au}$ od Slunce se vznáší solární plachetnice ve tvaru tenké desky o ploše $S = 500 \text{ m}^2$ s plošnou hustotou $\sigma = 1,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$. Jakou silou na ni působí záření dopadající ze Slunce v okamžiku, kdy se plachetnice právě začíná pohybovat? Jaké bude v mít tu chvíli zrychlení? Zářivý výkon Slunce je $L_\odot = 3,826 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Předpokládejte, že záření dopadá na plachetnici kolmo a odráží se pružně.

Nápověda Doporučujeme najít zrychlení při malé počáteční rychlosti v_0 a poté dosadit $v_0 = 0$.

Slnko vysílá světelné žiarenie vo forme fotónov, ktoré sú nositeľmi hybnosti. Ich hybnosť p je daná ich energiou E podľa kvantovej fyziky ako $p = \frac{E}{c}$, kde c je rýchlosť svetla. Podľa 2. Newtonovho zákona je sila pôsobiaca na plachtu daná podielom zmeny jej hybnosti a času, za ktorý táto zmena nastane

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Pri dopade fotónu na povrch plachty sa fotón dokonale pružne odrazí, pričom pri pružnej zrážke sa zachováva celková energia aj hybnosť sústavy.

Uvažujme, že fotón s hybnosťou p_0 narazí do dosky (plachetnice), ktorá sa od neho pohybuje rýchlosťou v_0 a má hmotnosť m . Potom sa fotón odrazí späť s hybnosťou p , ktorá smeruje od dosky, teda má opačný smer ako p_0 . Doska po tejto interakcii s fotónom pokračuje v pohybe v pôvodnom smere, teraz už rýchlosťou v (má smer rovnaký ako v_0 a p_0). Zákon zachovania hybnosti (ZZH) má teda tvar

$$p_0 + mv_0 = -p + mv.$$

Napíšeme si tiež zákon zachovania energie (ZZE)

$$p_0c + \frac{1}{2}mv_0^2 = pc + \frac{1}{2}mv^2.$$

Zo ZZH si vyjadríme p , dosadíme do ZZE a riešime kvadratickú rovnicu pre v . S využitím vzorca $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sa úpravami dopracujeme k výrazu

$$v = -c + \sqrt{(v_0 + c)^2 + \frac{4p_0c}{m}}.$$

Za predpokladu $(v_0 + c)^2 \gg \frac{4p_0c}{m}$, ktorý je v tomto prípade iste splnený (pretože ľavá strana je viac ako c^2 , zatiaľ čo pravá strana obsahuje hybnosť fotónu), môžeme použiť aproximáciu

$$v \approx -c + (v_0 + c) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4p_0c}{m(v_0 + c)^2} \right) = v_0 + \frac{2p_0c}{m(v_0 + c)}.$$

Zmena rýchlosti dosky v dôsledku odrazu fotónu bude teda

$$\Delta v = v - v_0 = \frac{2p_0c}{m(v_0 + c)}.$$

Ak predpokladáme, že doska bola pred nárazom v pokoji (teda $v_0 = 0$), alebo sa pohybovala dostatočne pomaly (teda platí $v_0 \ll c$), pre zmenu rýchlosti dosky a následne zmenu hybnosti dostávame

$$\Delta v = \frac{2p_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 2p_0.$$

Po dosadení tohto výrazu do 2. Newtonovho zákona máme

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{2p_0}{\Delta t}.$$

Hodnotu p_0 získame z energie slnečného žiarenia. Za čas Δt na plachtu dopadne žiarenie s energiou

$$E = W\Delta tS.$$

Veličina W je svetelný výkon dopadajúci na jednotku plochy vo vzdialenosti r od Slnka

$$W = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}.$$

Potom pre silu dostávame

$$F = \frac{2p_0}{\Delta t} = \frac{2E}{c\Delta t} = \frac{2WS}{c} = \frac{L_{\odot}S}{2\pi cr^2} \doteq 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Zrýchlenie plachetnice spočítame jednoducho ako

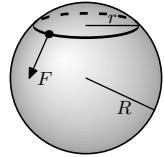
$$a = \frac{F}{m} = \frac{L_{\odot}}{2\pi cr^2\sigma} \doteq 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Na plachtu pôsobí žiarenie Slnka silou 7,1 mN a udáva jej zrýchlenie $10 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Úloha I.5 ... jak si navléci čepici jednou rukou?

Mějme kouli o poloměru R a cyklickou nehmotnou gumičku o poloměru r_0 s tuhostí k , přičemž $r_0 < R$. Třecí koeficient mezi gumičkou a koulí je f . Určete podmínku pro hodnoty těchto parametrů, aby bylo možné přetáhnout gumičku přes kouli tak, že se gumičky budeme dotýkat jenom v jednom bodě.

Pro jednoduchost uvažujte, že gumička je pružná pouze v tečném směru (takže vždy leží v jedné rovině).



Gumičku buď považujeme za nehmotnou a nebo neuvažujeme tíhové zrychlení, takže na gumičku pôsobí kromě vnější síly F pouze síly třecí. Orientace v tomto případě nehraje roli, ale v rámci analogie s navlékáním čepice na hlavu si představme, že gumička je volně položená na horní části koule tak, jak je to na obrázku.

Nejjistější způsob navlékání gumičky přes kouli je takový, že gumičku v jednom bodě tlačíme směrem tečným ke kouli a kolmým ke gumičce. V případě, že se opačná část gumičky začne zvedat, máme problém a gumičku přes kouli nedokážeme přetáhnout. Aby bylo možné gumičku navléci, nesmí se pohnout protilehlý bod gumičky vůči působišti síly.

Kritické místo je přesně v tomto protilehlém bodě. V tomto bodě musí platit, že tečná síla je menší než normálová síla přenásobená třecím koeficientem. Hledáme tedy podmínku na to, kdy tento bod gumičky na kouli staticky drží a neprokluzuje. Příklad vyšetřování jednoho kritického bodu si můžeme nahradit symetrickou situací, kdy jsou všechny body symetricky „také kritické“. To znamená, že budeme vyšetřovat případ, kdy je gumička na kouli navlečena tak, že její poloměr je $r > r_0$.

Situace je analogická s prokluzem tělesa na rovné podložce (např. na nakloněné rovině), tady těleso neproklouzne, když je splněna podmínka $\text{tg } \alpha \leq f$, kde α je úhel, který svírá směr výslednice sil působících na těleso s normálou k podložce. Nezajímá nás tedy velikost síly, kterou je gumička napínána, ani velikost síly, kterou gumička tlačí do koule (značíme F_0). Stačí nám znát směr této síly – v každém bodě dotyku směřuje do středu gumičky (ne do středu koule).

V našem případě gumičky na kouli je úhel α sevřen v libovolném bodě dotyku mezi směrem do středu koule (tj. normála k povrchu) a směrem do středu gumičky (tj. směr působící síly F_0). Tento úhel je zřejmě největší pro nejkratší délku gumičky, postupným natahovááním na kouli ho zmenšujeme. Nejkritičtější je proto případ

hned na začátku natahování, když má gumička poloměr r_0 ². Hledaný úhel snadno spočítáme s využitím poloviny rovnoramenného trojúhelníka, jehož ramena tvoří poloměry kuličky o délce R a základnu tvoří průměr gumičky $2r_0$, viz obrázek 3.

$$\cos \alpha = \frac{r_0}{R},$$

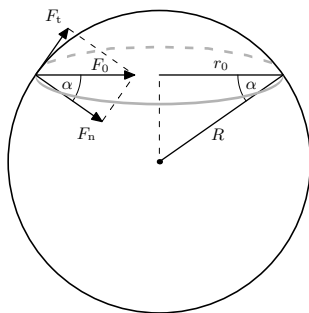
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0}.$$

V poslední úpravě jsme využili vztahů mezi goniometrickými funkcemi stejného úhlu (nebo alternativně Pythagorovu větu). Po dosažení do podmínky pro neproklouznutí dostáváme

$$\frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0} \leq f,$$

$$r_0 \geq \frac{R}{\sqrt{f^2 + 1}}.$$

Tedy podmínka samozřejmě vůbec nezávisí na tuhosti gumičky, nýbrž pouze na poloměrech a třecím koeficientu. Všimněme si také, že pro velmi malé f se podmínka blíží k $r_0 \geq R$. To znamená, že pro nulové f nedokážeme přes kouli přetáhnout žádnou gumičku, která je menší než koule.



Obr. 3: Rozklad sil gumičky a polovina trojúhelníku pro výpočet úhlu.

Úloha I.P . . . Přežijeme ve vakuu?

Různé filmy dávají vzniknout různým představám o tom, co a jak rychle se stane, pokud astronautovi praskne skafandr. Některé z nich jsou dokonce protichůdné. Odůvodněte, co by se s největší pravděpodobností ve skutečnosti stalo, pokud by se dosud zdravý člověk ocitl nijak nechráněný uprostřed vakua. Co by bylo nejrychlejší příčinou smrti?

²Aby gumička působila silou na kouli, musí být její poloměr o libovolně málo větší než r_0 .

Vieme, že v mnohých filmoch je ne jeden jav, ktorý odporuje fyzikálnym zákonom. Pre vytvorenie napínavejšieho a dramatickejšieho deja sú vytvorené scény, ktoré nezodpovedajú realite aj napriek tomu, že sa javia vierohodne. Toto sa tiež týka situácii, keď vo filmoch človeku vo vesmíre praskne skafander. Vo filmoch telo exploduje, alebo okamžite zmrzne.³ Avšak v skutočnosti to vôbec nie je až také jednoduché. Kvôli komplexnosti ľudského tela sa pri prasknutí skafandra začne odohrávať mnoho javov a zostáva nám len teoreticky opísať, čo by bolo najrýchlejšou príčinou smrti.

Únik vzduchu z pľúc

Pri poškodení skafandra dochádza k rozdielu tlakov v ľudských pľúcach a vákuu, čo spôsobí únik vzduchu z pľúc. Tlak vzduchu v pľúcach je rovný atmosférickému, čiže cca 101 000 Pa, a tlak vo vesmírnom vákuu je cca 3 300 Pa – 130 mPa (stredné vákuum).⁴ V dôsledku nedostatku kyslíka by človek po zhruba 15 sekundách stratil vedomie – podobne ako pri topení sa³ – a neskôr by došlo k uduseniu. Po 3–5 minútach bez prísunu kyslíka dochádza k vážnemu poškodeniu mozgu, ktorý sa v tom čase už nedá zachrániť.⁵ Absencia kyslíka taktiež vedie k nevyučovaniu škodlivých látok, a teda dôjde k otrave organizmu, ktorá však bude výrazne pomalšia ako udusenie.

Tlak

Ak by krv bola vo vesmíre priamo vystavená vákuu, tak by po pár sekundách začala vriieť.⁶ Telo vo vesmíre expanduje, avšak kvôli jeho elasticite nie dostatočne na to, aby sa vnútri v tele vytvoril tlak vákuu. Krv je preto v ľudskom tele chránená pred priamym vystavením vákuu a vriieť nezačne, ale začnú sa v nej tvoriť vzduchové bublinky spôsobené rozpúšťaním vzduchu z krvi. Ak by však človek vo vákuu mal povrchovú ranu, tak by došlo k varu krvi.

Ľudské telo je zložené z cca 70 % vody. Var vody vo vákuu nastane zhruba pri izbovej teplote, čiže 21 °C.⁷ Podobne ako v prípade krvi, voda priamo vystavená vákuu začne vriieť, čo bude mať za následok rýchle vyschnutie slín, slizníc a očného sekrétu. Plynové bubliny, ktoré sa vytvárajú v dôsledku varu vody, spôsobujú spolu s vnútorným tlakom pretlak, ktorý má za následok nafúknutie ľudského tela na takmer dvojnásobok.³ Avšak koža je biologický materiál s veľmi odolnými vlastnosťami, čiže nedôjde k explózii tela.

Koža má maximálnu odolnosť voči deštrukcii približne 21,6 MPa,⁸ čo znamená, že rozdiel vnútorného tlaku a tlaku vo vákuu nemôže byť väčší ako daná hodnota, aby telo neexplodovalo. Rozdiel medzi atmosférickým tlakom (101 325 Pa⁹) a tlakom vo vákuu (1 650 Pa) je cca 99 700 Pa, čiže k deštrukcii kože nedôjde.

³<https://youtu.be/hPya55bVKDc?t=300>

⁴<https://sk.wikipedia.org/wiki/Vákuum>

⁵[https://sk.wikipedia.org/wiki/Dusenie_\(nedýchanie\)](https://sk.wikipedia.org/wiki/Dusenie_(nedýchanie))

⁶<https://youtu.be/jU3MOLqA3WA>

⁷<https://tinyurl.com/waterInVacuum>

⁸<https://arxiv.org/pdf/1302.3022v1.pdf>

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_pressure

Srdcový tep sa na začiatku zvýši a neskôr zase klesne, pričom arteriálny krvný tlak taktiež klesne za čas 30 – 60 s. Tlak v žilách sa zvýši v dôsledku rozťahnutia žilového systému a spôsobí zastavenie cirkulácie krvi.¹⁰

Teplo

Vo vesmíre je síce zima, avšak nie je tam médium, ktoré by ľudské telo ochladilo. Preto by človek strácal svoje teplo iba vyžarovaním, čiže po určitom čase by začalo telo mrznúť. Avšak plyn a vodná para budú prúdiť von cez dýchacie cesty a toto kontinuálne vyparovanie bude mať za následok ochladenie úst a nosa takmer až na teplotu mrazu. Zvyšok tela sa bude postupne ochladzovať tiež, avšak pomalšie, až kým nadobudne teplotu mrazu.¹⁰ Závisiac od miesta, kde sa vo vesmíre človek nachádza, zamrzol by za 12 až 26 hodín.¹¹

Avšak ak sa človek nachádza v blízkosti nejakého zdroja energie, ktorým je napríklad Slnko, hrozí mu prehriatie.

Neplánovaný experiment

V roku 1966, testovaný subjekt Jim LeBlanc bol prvým človekom, ktorý si náhodou vyskúšal vystavenie vákuu.¹² Vďaka nemu a jeho pracovníkom v NASA rozumieme aspoň trochu z toho, čo sa udeje v takej situácii. Pánovi LeBlancovi sa odpojila jedna hadička na prototyp skafandra a bol vystavený zmene tlaku z 3,8 psi (26 200 Pa) na 0,1 psi (689 Pa) za 10 sekúnd.¹² Následne bol vystavený vákuu zhruba 30 sekúnd, avšak kvôli pohotovosti jeho kolegov bol zachránený skôr, ako by utrpel vážne zdravotné problémy. Vyviazol z tohto incidentu „len“ s boľavým uchom.¹³ O vystavení človeka vákuu sa nevie veľa, avšak ľudia strácajú vedomie cca za 15 sekúnd, efekty vákuu začnú likvidovať ľudské telo za cca 30 sekúnd a úplná smrť nastane za cca 90 sekúnd.¹³ „Ako som sa potácal dozadu, cítil som, ako mi začínajú bublať sliny na jazyku tesne pred tým, než som odpadol.“ – spomína LeBlanc.¹² Tento incident nám potvrdzuje, že voda v tele začne vriieť, a teda sekrety a sliny začnú vysychať. Hneď potom dôjde k strate vedomia, ktorá je dôsledkom úniku vzduchu.

Záver

Ľudské telo je príliš komplexné na to, aby sme vedeli bez experimentov presne určiť najrýchlejšiu príčinu smrti v prípade, keď je človek vystavený vákuu. Z vyššie uvedeného však vieme povedať, že únik kyslíka a zmena tlaku v žilách sú kľúčovými faktormi, keďže vedú k zlyhaniu obehového traktu a vážnemu poškodeniu mozgu, čo má rýchle a fatálne následky.

¹⁰<https://youtu.be/iWGMchu6mQ>

¹¹https://youtu.be/_Mr8f63Vinc

¹²<https://tinyurl.com/jimLeBlanc>

¹³<https://www.popularmechanics.com/space/a24127/nasa-vacuum-exposure/>

Úloha II.1 . . . svítí-nesvítí

Délka dne a noci se v průběhu roku mění, přičemž na různých místech na Zemi se může měnit jinak. Jak je to však s roční průměrnou délkou dne? Je všude stejná, nebo se na různých místech na Zemi liší? Stačí uvést pouze kvalitativní popis.

Bonus Pokuste se odhadnout, o kolik nejvíce může být průměrný den delší, než 12 h.

Délku dne pre pozorovatele na Zemi ovplyvňuje kombinácia jeho zemepisnej šírky a deklinácie Slnka, ktorá sa v priebehu roka mení. Slnko je na oblohe najjužnejšie počas zimného slnovratu 21. alebo 22. decembra a najsevernejšie počas letného slnovratu 20. alebo 21. júna. To má za následok, že na severnej pologuli je deň v tieto dáta najkratší, resp. najdlhší, a na južnej pologuli naopak. Hranica, keď je dĺžka dňa a noci rovnaká, nastáva počas jarnej (20. marca) a jesennej (23. septembra) rovníkovej rovnodennosti.¹⁴ V tento deň sa na póloch mení polárna noc na polárny deň. Na rovníku je situácia jednoduchá – Slnko je nad obzorom vždy 12 h, vychádza a zapadá kolmo na obzor.

Pre nás je najvýhodnejšie pozerat sa na situáciu zo sústavy spojenej so Slnkom a hviezdami. Hore popísané zmeny sa dajú popísať jednoducho. Okolo Slnka obieha Zem, ktorej rotačná os je v tejto sústave orientovaná pevne so sklonom asi $23,5^\circ$. Počas obehu sa tak postupne mení poloha snečného tieňa na Zemi. Z dĺžky rovnobežiek v tieni Zeme by sme potom ľahko určili dĺžku noci. Vidíme, že za predpokladu rovnomerného obehu Zeme okolo Slnka po kružnici, je stredná dĺžka dňa aj noci na celej Zemi presne 12 h. Dni, ktoré sú pol roka od seba sa navzájom presne spriemerujú na stred, teda na 12 h.

Tento predpoklad musíme pre riešenie problému opustiť. Zem obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe – najbližšie k Slnku je v perihéliu, okolo 4. januára, a najďalej v aféliu, okolo 5. júna. Z druhého Keplerovho zákona potom môžeme vidieť, že v januári sa Zem okolo Slnka pohybuje rýchlejšie a v júni pomalšie. Preto je leto na severnej pologuli dlhšie ako na južnej (ktoré je práve okolo januára). Na severnej pologuli sú dni dlhšie ako 12 h viac ako pol roka, a to až 186 dní medzi rovníkovej rovnodennosťami. Na zbytek roka tak pripadá len 179 dní, čo je o týždeň menej. Máme záver, že priemerný deň je dlhší na severnej pologuli ako na južnej. Krátko ešte odhadnime dĺžku priemerného dňa na severnom póle. Je tu 186 dní Slnko nad obzorom a 179 dní pod ním. V priemere teda dostávame

$$T = 24 \text{ h} \frac{186 \text{ d}}{365 \text{ d}} = 12,23 \text{ h},$$

čo je o skoro 14 minút viac ako 12 hodín na rovníku.

Na záver spomeňme ešte iné javy spôsobujúce zmenu dĺžky dňa ako času, keď sa nachádza aspoň nejaká časť snečného kotúča nad obzorom. Prvým z nich je samotný rozmer Slnka na oblohe, jeho polomer je asi $0,25^\circ$. Ďalej ohyb svetla

¹⁴Situácia je v skutočnosti komplikovanejšia ako načrtnuté riešenie, ktoré považuje deň za čas medzi prechodom stredu disku Slnka matematickým horizontom. Správne by sa mala uvažovať stredná refrakcia na obzore, ktorá je približne $0,5^\circ$ a horný okraj disku. Získaný všeobecný záver je však naďalej platný.

v zemskej atmosfére spôsobuje zdanlivé nadvihnutie objektov najvýraznejšie pri obzore. Objekt nachádzajúci sa na horizonte je v skutočnosti už asi $0,5^\circ$ pod ním. Ďalej na dĺžku dňa má samozrejme vplyv aj tvar nášho lokálneho horizontu. Ako jeden zaujímavý vplyv uvedieme vplyv nadmorskej výšky (čím vyššie sa nachádzame, tým viac pod horizont budeme vidieť). Je zrejmé, že tieto efekty budú mať rôzny vplyv na rôznych zemepisných šírkach, predĺženie dňa totiž závisí na sklone dráhy Slnka na oblohe voči horizontu. Na póloch tak uvidíme ešte o niekoľko polárnych dní viac, ako je uvedené vyššie. Tento vplyv môže k dobe trvania priemerného dňa pridať aj štvrt hodiny.

Úloha II.2 ... loď na obzoru

Kačka a Katka sledujú loď plujúcú konstantní rychlostí do prístavu. Kačka stojí na skále nad prístavem, pričom má oči ve výške $h_1 = 20$ m nad hladinou. Katka se nachází dole pod skalou, její oči jsou v nadmořské výšce $h_2 = 1,7$ m. Pokud Katka zahlédne na obzoru vrchol blížící se lodi se zpožděním $t = 25$ min oproti Kačce, za jak dlouho loď vysoká $h = 30$ m dopluje do prístavu? Zemi považujte za dokonalou kouli se známým poloměrem.

Nákres situace je na obrázku 4. Bod S označuje střed Země a body P_1, P_2 jsou polohy očí prvního a druhého pozorovatele. Bod V_1 značí polohu vrcholu blížící se lodi v okamžiku, kdy ji zahlédne první pozorovatel. Analogicky bod V_2 je vrchol lodi v okamžiku, kdy ji zahlédne druhý pozorovatel.

Ve chvíli, kdy se na obzoru vrchol lodi objeví, je přímkou procházející okem pozorovatele a vrcholem lodi tečnou k zemskému povrchu. Její bod dotyku označíme T_1 pro prvního pozorovatele, respektive T_2 pro druhého pozorovatele.

Abychom zjistili, za jak dlouho loď doplue, potřebujeme znát její rychlost a vzdálenost od prístavu po zemském povrchu. Nejprve vyjádříme vzdálenost lodi v okamžiku, kdy ji zahlédne první pozorovatel. K tomu využijeme znalost poloměru Země a velikost úhlu $\varphi_1 = |P_1SV_1|$. Pro tu zřejmě platí

$$\varphi_1 = |P_1ST_1| + |T_1SV_1| = \theta_1 + \rho_1,$$

kde jsme čistě pro přehlednost označili příslušné úhly řeckými písmeny. Velikosti úhlů θ_1 a ρ_1 dokážeme zjistit z příslušných pravoúhlých trojúhelníků

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{r}{r+h_1} \Rightarrow \theta_1 = \arccos \frac{r}{r+h_1}, \\ \cos \rho_1 &= \frac{r}{r+h} \Rightarrow \rho_1 = \arccos \frac{r}{r+h}. \end{aligned}$$

Na tomto místě můžeme využít aproximace – protože je $h \ll r$, platí

$$\frac{r}{r+h} = \left(1 + \frac{h}{r}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{h}{r}.$$

Zároveň víme, že pro malé úhly lze použít vzorec $\cos x = 1 - x^2/2$. Kombinací obou vztahů dostáváme

$$\rho_1 = \arccos \frac{r}{r+h} \approx \sqrt{\frac{2h}{r}}, \quad \theta_1 \approx \sqrt{\frac{2h_1}{r}}.$$

Celková velikost úhlu φ_1 bude

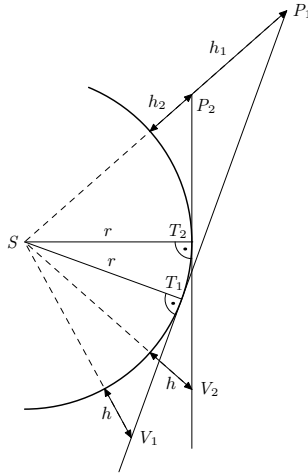
$$\varphi_1 = \arccos \frac{r}{r+h_1} + \arccos \frac{r}{r+h} \approx \frac{\sqrt{2h_1} + \sqrt{2h}}{\sqrt{r}}.$$

Vyjádříme-li tento úhel v radiánech a pak ho vynásobíme poloměrem Země, dostaneme povrchovou vzdálenost lodi v okamžiku, kdy její vrchol zahlédne první pozorovatel. Tu si označíme $s_1 = r\varphi_1$. Obdobným způsobem můžeme vyjádřit i povrchovou vzdálenost lodi s_2 v okamžiku, kdy její vrchol zahlédne druhý pozorovatel. Dostaneme

$$s_2 = r\varphi_2 = r \left(\arccos \frac{r}{r+h_2} + \arccos \frac{r}{r+h} \right) \approx \frac{\sqrt{2h_2} + \sqrt{2h}}{\sqrt{r}}.$$

Ze zadání víme, že loď se pohybuje rovnoměrně čili má konstantní rychlost v . Získáme ji vydělením rozdílu povrchových vzdáleností ($s_1 - s_2$) rozdílem časů t

$$v = \frac{s_1 - s_2}{t} \approx \frac{\sqrt{2r} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{t}.$$



Obr. 4: Povrch Země s tečnými paprsky.

Nyní již známe povrchovou vzdálenost lodi od přístavu i rychlost. Čas, za který loď dopluje, spočítáme jako jejich podíl. Musíme si však určit od jakého okamžiku čas počítáme. Chceme-li určit čas doplutí lodi od okamžiku, kdy ji spatřil druhý pozorovatel, dostaneme ho jako

$$t_2 = \frac{s_2}{v} \approx \frac{\sqrt{h_2} + \sqrt{h}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}} t.$$

Všimneme si, že výsledek vôbec nezávisí na polomere Země (za předpokladu, že platí $r \gg h, h_1, h_2$). Po dosazení hodnot ze zadání vychází $t_2 \doteq 53,5$ min. Pokud bychom se rozhodli počítat čas doplutí od okamžiku, kdy loď spatřil první pozorovatel, dostaneme obdobný vztah

$$t_1 = \frac{s_1}{v} \approx \frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}} t \doteq 78,5 \text{ min}.$$

Úloha II.3 ... auto na dně jezera

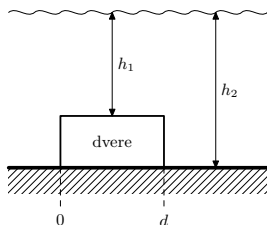
Ne jednu se ve filmu stalo, že auto spolu s cestujícími spadlo do vody. Vypočítejte, jakým momentem sil by musel řidič tlačít na dveře, aby je otevřel na dně jezera, když je jejich spodní rám 8,0 m pod hladinou. Uvažujte obdélníkové dveře s rozměry 132 cm \times 87 cm, které se otvírají podle svislé osy.

Na dveře auta na dne jezera působí tlaková síla okolitej kvapaliny s velikostí $F = pS$. Hydrostatický tlak je závislý na hloubce h ako $p = h\rho g$, čiže v rôznych hlĺbkach jazera je tento tlak rôzny. Keďže dveře majú nezanedbateľnú výšku, bude potrebné použiť diferenciálny počet. Dveře rozdelíme na elementárne štvorčeky a skúmame silové pomery na týchto elementoch. Pozdĺž osi y sa táto elementárna síla mení podľa vzťahu $dF = p dS = h\rho g dS = h\rho g dx dh$. Tlak atmosféry môžeme zanedbať, lebo predpokladáme, že atmosferický tlak je aj v aute.

Voči pántom dverí táto elementárna síla vyvodzuje elementárny moment. Keďže momentový účinok síly je rôzny v rôznych vzdialenostiach od pántov dverí, tak sa tento elementárny moment pozdĺž osi x mení podľa vzťahu $dM = x dF$, kde x je vzdialenosť od pántov dverí. Pre prehľadnosť označme šírku dverí d .

Matematický zápis momentu síly, ktorým musí šofér pôsobiť na dveře je $M = \int dM$. Z toho dostávame

$$\begin{aligned} M &= \int_{\text{dvere}} x dF = \int_{\text{dvere}} x h \rho g dS = \rho g \int_0^d \int_{h_1}^{h_2} x h dh dx = \rho g \left[\frac{h^2}{2} \right]_{h_1}^{h_2} \int_0^d x dx = \\ &= \rho g \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^d \left[\frac{h^2}{2} \right]_{h_1}^{h_2} = \frac{\rho g d^2}{4} (h_2^2 - h_1^2) \doteq 56\,000 \text{ Nm}. \end{aligned}$$



Obr. 5: Dveře auta pod hladinou.

Na to, aby šofér otvoril dvere na dne jazera, musí na ne pôsobiť momentom sily 56 kNm. Ak bol rozmer 132 cm použitý ako výška dvier auta a rozmer 87 cm ako šírka dvier auta, potom by bol moment sily 36 kNm.

Úloha II.4 . . . vyťahování ledu teplem

Ve sklepe v hloubce $h = 4,2\text{ m}$ je uskladněný led, který potřebujeme vytáhnout nahoru. Máme tepelný stroj, který pracuje s teplotou okolí a ledu s $\eta = 12\%$ účinností vůči jeho maximální možné účinnosti (dané Carnotovým cyklem). Teplota vzduchu je $T_v = 24\text{ }^\circ\text{C}$, vytažený led potřebujeme mít na teplotě $T_{\max} = -9,0\text{ }^\circ\text{C}$. Jakou teplotu musí mít led ve sklepe, aby jej bylo možné vytáhnout pomocí tohoto stroje? Proč to půjde, i když přitom zahřejeme led, který současně vyťahujeme?

Carnotov cyklus je teoretický model stroja, ktorý pracuje čisto tým, že presúva teplo z teplejšieho objektu (v našom prípade vzduch) do chladnejšieho (v našom prípade ten vyťahovaný ľad). Dá sa počítať, že maximálna dosiahnuteľná účinnosť je v takom prípade

$$\eta_C = 1 - \frac{T}{T_v},$$

pričom zadanie hovorí, že náš stroj má celkovú účinnosť $\eta_c = \eta \eta_C$.

Takže už vieme s akou účinnosťou daný ľad vyťahujeme. Čo z nej vieme ešte zistiť? Vieme, že účinnosť udáva podiel medzi vykonanou prácou a dodaným teplom. Teplo dodáva okolitý vzduch, čiže to nás až tak nezaujíma. To, čo nás zaujíma je teplo dodané ľadu. Teplo, ktoré nám dodal vzduch sa môže premeniť jedine na prácu a na teplo, ktoré dodáme ľadu. Symbolicky $Q_{\text{in}} = W + Q_{\text{out}}$. Z toho môžeme (s použitím definície účinnosti $\eta_c = W/Q_{\text{in}}$) vyjadriť teplo dodané ľadu v závislosti na vykonanej práci

$$Q_{\text{out}} = \frac{W}{\eta_c} - W = \frac{1 - \eta_c}{\eta_c} W.$$

Pričom netreba zabúdať, že η_c závisí od teploty ľadu, ktorá sa bude v priebehu vyťahovania meniť.

Predpokladajme, že vyťahovaný kus ľadu má hmotnosť m a počiatočnú teplotu T_0 (naša neznáma). Potom na to, aby sme ho zdvihli o malú zmenu výšky dh je potrebná práca $dW = mg dh$. Ľad teda príjme teplo $dQ = mg dh (1 - \eta_c) / \eta_c$. Keď si mernú tepelnú kapacitu ľadu označíme c a dosadíme za η_c dostávame diferenciálnu rovnicu

$$dT = \frac{g}{c} \frac{1 - \eta \left(1 - \frac{T}{T_v}\right)}{\eta \left(1 - \frac{T}{T_v}\right)} dh,$$

kde aktuálnu teplotu ľadu značíme pre jednoduchosť T .

Teploty sú samozrejme udávané v Kelvinoch a tým pádom môžeme očakávať, že podiel T/T_v bude približne 1. Taktiež sa dá predpokladať, že $1 \gg \eta (1 - T/T_v)$, čo nám výraz napravo značne zjednoduší a diferenciálnu rovnicu môžeme prepísať do separovaného tvaru

$$(T_v - T) dT = \frac{gT_v}{c\eta} dh,$$

Tak nám stačí už len obe strany zintegrovať.

Na pravej strane sa integruje konštanta, takže výsledok bude jednoducho

$$\frac{gT_v}{c\eta} h,$$

kde zo zadania $h = 4,2\text{ m}$ je výška, o ktorú sme ťad vytiahli.

Ľavá strana je polynóm, takže primitívna funkcia k nej je jednoducho $T_v T - T^2/2$. Integrujeme od T_0 po T_{\max} , a tak integrál bude

$$T_v (T_{\max} - T_0) - \frac{T_{\max}^2 - T_0^2}{2},$$

takže dostávame kvadratickú rovnicu

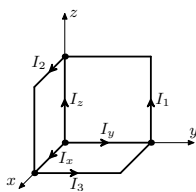
$$\frac{1}{2}T_0^2 - T_v T_0 - \frac{1}{2}T_{\max}^2 + T_v T_{\max} - \frac{gT_v}{c\eta} h = 0.$$

Rovnica nevyzerá najkrajšie, ale všetko (okrem neznámej) sú konkrétne zadané čísla. Stačí nám teda numericky dopočítať, pričom je dôležité nezabudnúť, že teploty treba dosádzať v Kelvinoch.

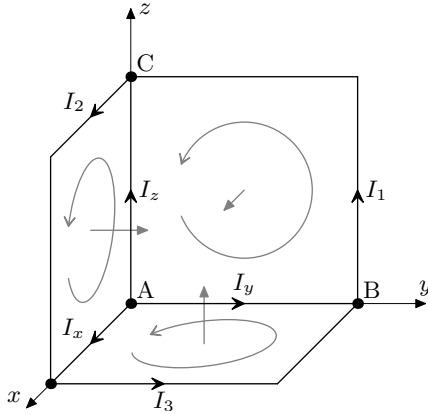
Dostaneme, že $T_0 \doteq -10,5\text{ }^\circ\text{C}$ (druhý koreň vychádza okolo $58\text{ }^\circ\text{C}$, čo nedáva zmysel nielen preto, že by sa už nejednalo o ťad, ale hlavne preto, že by tento ťad bol teplejší než vzduch, pričom všetky naše úvahy pracovali s tým, že ťad je chladič). Môžeme si rovno overiť, že výraz $\eta(1 - T/T_v)$ dosahuje hodnoty maximálne rádu 0,01, čiže to, že sme ho zanedbali voči 1, bolo úplne v poriadku.

Úloha II.5 ... detektor magnetických nestacionarit

Elektrický obvod znázorněný na obrázku môže sloužit jako detektor nestacionárního magnetického pole. Jedná se o devět hran krychle tvořených elektrickým drátem. Elektrický odpor jedné hrany je R . Nachází-li se tato konstrukce v nestacionárníhom homogenním magnetickém poli, které má pro jednoduchosť konstantní směr a jeho velikost se mění jen pomalu, tečou na vyznačených místech proudy I_1, I_2, I_3 . Určete ze znalosti těchto proudů směr a časovou změnu velikosti magnetického pole v prostoru.



Odkud se berou proudy v našem detektoru? Konstrukci detektoru si lze představit jako systém spojených vodivých smyček. Jako nezávislé smyčky lze např. zvolit smyčky ležící v jednotlivých rovinách definovaných vždy dvěma kartézskými osami. Budeme hovořit o smyčkách 1, 2, resp. 3, myslíme-li smyčku ležící v rovině yz , zx , resp. xy . Tok magnetického pole těmito jednotlivými smyčkami se s časem mění, a proto se podle zákona elektromagnetické indukce na těchto smyčkách indukuje elektromotorické napětí, které zapříčiní vznik elektrického proudu. Úloha je komplikovaná v tom, že máme složitější systém, na kterém se projevuje elektromagnetická indukce, a je třeba si s ním správně poradit.



Obr. 6: Schéma zapojení včetně znázornění směru kladných napětí a orientace normál k jednotlivým stěnám.

Předpokládejme, že na jednotlivých smyčkách se nám indukovalo elektromotorické napětí U_i , kde $i = 1, 2, 3$, přičemž směr kladného napětí U_i je vyznačen na obrázku 6 šipkou uvnitř odpovídající smyčky. Pro doplnění, směr napětí nám udává, jakým směrem je urychlován kladný náboj ve smyčce. Elektromotorická napětí U_i nebudeme do obr. zakreslovat a to z toho důvodu, že ho nelze zakreslit jako jeden zdroj v každé smyčce. Uvědomme si, že při řešení vzniklého elektrického obvodu záleží na tom, jak bychom náhradní zdroj do smyčky umístili. Napětí U_i se ve skutečnosti rozdělí do všech větví každé smyčky a to třeba i nerovnoměrně. Zákon elektromagnetické indukce nám pouze říká, jaké je celkové elektromotorické napětí U_i pro danou smyčku. Tato informace nám však stačí. Za předpokladu, že jsou časové změny pomalé, můžeme uvažovat kvazistacionární přiblížení a přistoupit tak ke druhému Kirchhoffovu zákonu. Jeho aplikací na smyčku 1 dostaneme

$$U_1 - RI_y - 2RI_1 + RI_z = 0. \quad (20)$$

Druhý, třetí a čtvrtý člen představují po řadě úbytky napětí na větvích AB, BC a CA. V rámci kvazistacionárního přiblížení se nám také nikde v obvodu nemění nábojová hustota, a proto výsledný proud tekoucí do každého uzlu musí být nulový, neboli platí

$$I_x = I_3 - I_2, \quad I_y = I_1 - I_3, \quad I_z = I_2 - I_1. \quad (21)$$

Dosazením (21) do (20) dostaneme

$$U_1 = R(4I_1 - I_2 - I_3). \quad (22)$$

Analogicky pro smyčky 2 a 3 dostaneme

$$U_2 = R(4I_2 - I_3 - I_1), \quad (23)$$

$$U_3 = R(4I_3 - I_1 - I_2). \quad (24)$$

Všimněme si, že tyto rovnice získáme z (22) cyklickou permutací $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Podobně v (21) se vyskytuje cyklická permutace $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Nyní se podíváme kvalitativně na to, co nám říká o napětí U_i zákon elektromagnetické indukce. Říká, že napětí U_i je rovno záporně vzaté časové změně toku Φ_i magnetického pole \mathbf{B} plochou Σ_i obepínající smyčku i , neboli zapsáno matematicky

$$U_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}. \quad (25)$$

Plocha Σ_i může být volena téměř libovolně, pro jednoduchost však volíme plochu rovinnou. Pak všechny Σ_i mají stejný povrch S . Navíc je pro zvolenou plochu důležité správně zvolit orientaci. Orientace plochy musí být zvolena „souhlasně“ s její hranicí, tj. smyčkou. Vzhledem k naší volbě kladného směru obíhání smyček je potřeba zvolit orientace normál k jednotlivým plochám, jak je znázorněno na obrázku 6. Pro volbu „souhlasně“ orientace si můžete pomoci pravou rukou. Při této volbě pak bude znaménko v rovnici (25) správně.

Magnetické pole je nestacionární a homogenní, a proto ho lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{B} = B\mathbf{n},$$

kde $B \equiv B(t)$ je časově závislá velikost magnetického pole a \mathbf{n} je konstantní, v každém bodě stejně orientovaný jednotkový vektor. Vzhledem k naší volbě souřadnic (viz obrázek 6) a vzhledem k tomu, že jsou námi zvolené plochy časově neměnné, je tok magnetického pole smyčkou 1 jednoduše roven

$$\Phi_1 = B_x S,$$

kde B_x je x -ová komponenta magnetického pole. Z rovnice (25) pak plyne

$$U_1 = -S \frac{dB_x}{dt}. \quad (26)$$

Výše zmíněnými cyklickými permutacemi dostaneme

$$U_2 = -S \frac{dB_y}{dt}, \quad (27)$$

$$U_3 = -S \frac{dB_z}{dt}. \quad (28)$$

Směr a orientaci magnetického pole v prostoru určíme pomocí standardní volby sférických úhlů θ a φ . Úhel θ měří odklon od osy z a φ je úhel v rovině xy měřený v kladném směru od osy x . Projekce magnetického pole do směrů jednotlivých os pak jsou

$$\begin{aligned} B_x &= B \sin \theta \cos \varphi, \\ B_y &= B \sin \theta \sin \varphi, \\ B_z &= B \cos \theta. \end{aligned} \quad (29)$$

Úhly θ a φ jsou dle zadání časově neměnné. Dosazením rovnic (29) do rovnic (26)-(28) dostaneme

$$U_1 = -S \frac{dB}{dt} \sin \theta \cos \varphi, \quad (30)$$

$$U_2 = -S \frac{dB}{dt} \sin \theta \sin \varphi, \quad (31)$$

$$U_3 = -S \frac{dB}{dt} \cos \theta. \quad (32)$$

Z rovnic (30)-(32) chceme vyjádřit úhly θ a φ a také časovou změnu velikosti magnetického pole. Jedná se vlastně o problém podobný transformaci kartézských souřadnic do sférických s tím rozdílem, že faktor $-S \frac{dB}{dt}$, který hraje roli radiální souřadnice r , může nabývat kladných i záporných hodnot. Z rovnic (30)-(32) můžeme určit pouze směr magnetického pole a ne jeho orientaci, tj. můžeme určit pouze podél jakých přímk magnetické pole míří. Ukážeme, proč tomu tak je.

Uvažujme, že známe $\frac{dB}{dt}$ a je např. záporné. Potom faktor $-S \frac{dB}{dt}$ hraje roli kladné radiální souřadnice a z transformace do radiálních souřadnic nalezneme úhly θ a φ . Stejně pravé strany rovnic (30)-(32) však dostaneme, pokud změníme znaménko $\frac{dB}{dt}$ a zároveň provedeme inverzi, tj. záměnu $\theta \rightarrow \pi - \theta$ a $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$. Přesvědčit se můžete sami dosazením a použitím součtových vzorců pro goniometrické funkce. V našem případě to znamená, že nezjistíme rozdíl mezi prvním případem, kdy magnetické pole míří do orientovaného směru daného úhly θ a φ a zároveň jeho velikost klesá, a mezi druhým případem, kdy má magnetické pole opačnou orientaci danou úhly $\pi - \theta$ a $\varphi + \pi$ a zároveň jeho velikost roste.

Z rovnic (30)-(32) na základě předchozí diskuze a na základě podobnosti transformace kartézských souřadnic do sférických dostáváme vztah pro velikost časové změny magnetického pole

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{1}{S} \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$$

a vztah pro úhly udávající směr přímk, podél kterých míří magnetické pole,

$$\theta = \arccos \left(\frac{U_3}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}} \right),$$

$$\varphi = \text{atan2}(U_2, U_1),$$

kde funkce atan2 představuje zobecnění funkce arctg . Na závěr dosadíme za napěť U_i z rovnic (22)-(24), čímž dostaneme hledané vztahy

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{R}{S} \sqrt{18(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) - 14(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1)},$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{4I_3 - I_1 - I_2}{\sqrt{18(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) - 14(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1)}} \right),$$

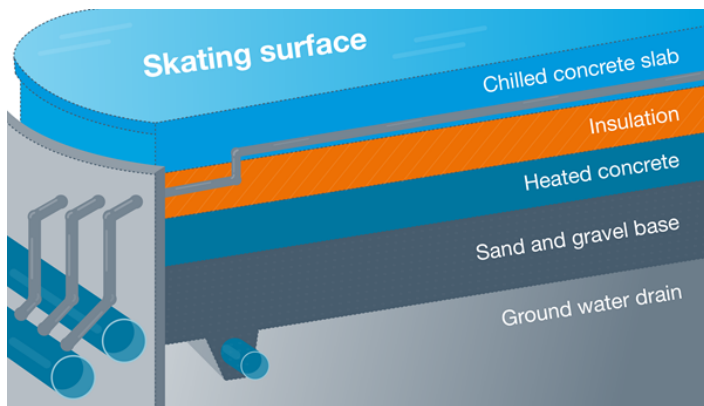
$$\varphi = \text{atan2}(4I_2 - I_3 - I_1, 4I_1 - I_2 - I_3).$$

Úloha II.P ... nákladný hokej

Odhadňte, kolik stojí kompletní zalednění hokejového hřiště.

Aby sme mohli vytvoriť odhad ceny zaľadnenia hokejového ihriska, musíme najprv zistiť, ako je vlastne celý proces realizovaný.

Hokejové ihrisko tvorí niekoľko vrstiev materiálov: ľadový povrch, vychladená betónová doska, izolácia, zohriaty betón, pieskový a štrkový podklad a odvod vody, viď obrázok 7 (zdroj¹⁵). Ľadový povrch je vytváraný vo vrstvách. Tenká vrstva vody nanosená na vychladenú betónovú dosku zamrzne okamžite a vytvorí tak základ pre ľadový povrch, na ktorý sa postupne nanášajú ďalšie tenké vrstvy vody. Časti prvých ľadových vrstiev sa farbía požadovanými farbami, aby bolo vytvorené ihrisko. Vychladená betónová doska spočiatku zabezpečuje zamrznutie nanášaných vodných vrstiev a následne udržuje ľadový povrch zamrznutý, a to optimálne na teplote $T = -4\text{ }^{\circ}\text{C}$, ktorú ovplyvňuje mnoho faktorov, ako napríklad okolitá teplota v budove štadiónu, vonkajšia teplota a vlhkosť.¹⁵ Chladenie je realizované chladiacim systémom zabudovaným v betónovej doske, ktorý si podrobnejšie rozoberieme o chvíľu. Vrstva izolácie a ohriateho betónu udržiava zem pod ľadom nezamrznutú, pretože inak by mohlo dôjsť k expanzii a prípadnému poškodeniu ihriska. Celá konštrukcia ihriska je položená na podklade tvorenom pieskom a štrkom, ktorý obsahuje odvod vody.

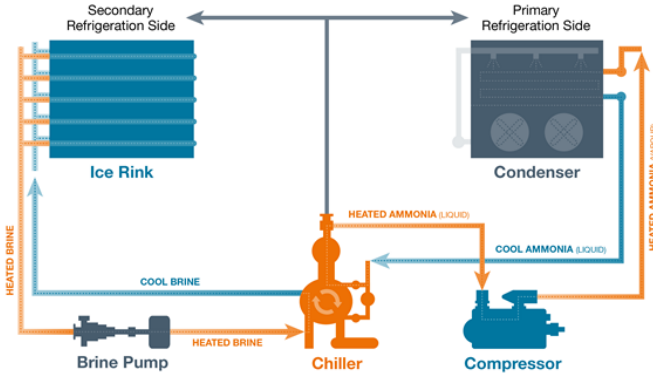


Obr. 7: Prierez ľadom a vrstvami podkladov hokejového ihriska

Samotné chladenie je realizované pomocou nepriameho chladiaceho systému.¹⁵ Ten používa tekutý chladič (zvyčajne amoniak), ktorý absorbuje teplo zo sekundárnej tekutiny (zvyčajne slaná voda, prípadne etylén či propylénglykol), ktorá zase absorbuje teplo zo zdroja. Sланá voda sa používa preto, lebo mrzne až pri teplote nižšej ako je bod mrazu čistej vody na povrchu. Pri teplote nižšej ako $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ môže

¹⁵<https://tinyurl.com/ice-rinks-refrigeration>

voda stále tteč cez potrubie, ale zároveň je dost studená na to, aby mohla zabezpečiť zamrznutie vody na povrchu. V nepriamom chladiacom systéme sú tri hlavné komponenty: chladič, kompresor a kondenzátor. Proces chladenia je prehľadne znázornený na obrázku 8 (zdroj¹⁶), preto ho tu nebudeme slovné popisovať.



Obr. 8: Schéma nepriameho chladiaceho systému použitého na chladenie ľadovej plochy.

Z tohto popisu hokejového ihriska už máme celkom dobrú predstavu o tom, ako funguje chladenie hokejového ihriska, a čo je na vytvorenie ľadovej plochy potrebné. Poďme sa teda postupne pozrieť na jednotlivé náklady s tým spojené. Budeme pritom predpokladať, že nestavíme hokejové ihrisko nanovo, ale už máme kúpený kompletný chladiaci systém.

Na zaľadnenie ihriska budeme určite potrebovať vodu, a to nie malé množstvo. Na vytvorenie povrchu hokejového ihriska je potrebných 45 – 57 tisíc litrov vody, pričom ľadová vrstva má typicky hrúbku medzi 0,75 až 1,5 palca (cca 1,9 – 3,8 cm)¹⁶. Hrúbka vrstvy nemôže byť tenšia, pretože by sa korčuľa mohla ľadom prerezať až k betónu. Nemôže byť ani hrubšia, pretože by pre väčšie množstvo ľadu nemuselo postačovať chladenie, a teda by sa ľad na povrchu roztápal. Oficiálna hokejová ľadová plocha by mala byť $l = 200$ ft (teda 60,96 m) dlhá a $w = 85$ ft (čiže 25,91 m) široká¹⁷. Ak by bola vrstva ľadu hrubá $h = 2,9$ cm (priemer typických hrúbok uvedených vyššie), a to na celej ploche ihriska, tak celkový objem ľadu na ihrisku by bol

$$V_1 \approx h l w \doteq 46 \text{ m}^3,$$

čo je teda 46 000 ℓ ľadu. Ako je všeobecne známe, hustota ľadu¹⁸ $\rho_1 = 917 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je menšia ako hustota vody $\rho_v = 1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Tento objem ľadu preto zodpovedá

¹⁶<https://tinyurl.com/ice-rinks-refrigeration>

¹⁷<http://science.unctv.org/content/scienceblog/ice-hockey>

¹⁸<https://cs.wikipedia.org/wiki/Led>

vode s objemom

$$V_v = \frac{\rho_l}{\rho_v} V_1 \doteq 42\,000 \ell.$$

Vidíme, že táto hodnota je o niečo menšia ako minimálna hodnota, ktorú sme uviedli vyššie. Nesmieme zabúdať ani na straty spôsobené napríklad vyparovaním vody počas procesu chladenia, keďže vyparovanie z povrchu prebieha v určitej miere pri všetkých teplotách kvapaliny. Uvažujme preto, že na vytvorenie požadovanej vrstvy ľadu spotrebujeme $V_v = 45\,000 \ell$ vody. Predpokladajme, že naše hokejové ihrisko zaľadňujeme niekde v Prahe. Je žiaduce, aby ľad na hokejovom ihrisku bol čo najčistejší, keďže práve taký ľad má optimálne vlastnosti pre korčuľovanie.¹⁹ Použijeme naň preto pitnú vodu a budeme predpokladať, že má dostatočne dobré vlastnosti a nemusíme preto kupovať prostriedky na čistenie vody. Cena pitnej vody v Prahe je v súčasnosti²⁰ $c_v = 50,30 \text{ Kč} \cdot \text{m}^{-3}$. Čiže za vodu, z ktorej vyrábame ľad celkovo zaplatíme

$$S_1 = c_v V_v \doteq 2\,270 \text{ Kč}.$$

Druhá vec, ktorá bude najviac prispievať do ceny zaľadnenia ihriska je elektrická energia spotrebovaná chladiacim systémom. Uvažujme, že chladiaci systém ako celok má príkon²¹ $P = 106 \text{ kW}$. Nech vytvorenie ľadovej plochy trvá²² $t = 48 \text{ h}$. Za túto dobu chladiaci systém spotrebuje energiu

$$E = Pt \doteq 5\,088 \text{ kWh}.$$

Pozrime sa na to, či naozaj bude toľkoto energie stačiť na premenu studenej vody na ľad. Hmotnostné skupenské teplo tuhnutia ľadu je²³ $l_t = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. To je o dva rády viac ako energia prislúchajúca zmene teploty vody o $1 \text{ }^\circ\text{C}$, teda ak uvažujeme zamrzanie vody s teplotou blízkou $0 \text{ }^\circ\text{C}$. Pre odhad nám stačí uvažovať iba teplo potrebné na zmenu skupenstva. To spočítame ako

$$Q = l_t V_v \rho_v \doteq 15 \text{ GJ} \doteq 4\,170 \text{ kWh}.$$

Takéto množstvo tepla potrebujeme z vody odobrať, aby sme ihrisko zaľadnili. Ak by sme jednoducho predpokladali, že chladiaci systém musí dostať na svoje fungovanie aspoň toľko elektrickej energie, koľko tepla musí odobrať vode, tak z našich výpočtov vyplýva, že táto energia bude postačovať. Samozrejme, situácia je oveľa komplikovanejšia. Zariadenia nemajú 100 %-nú účinnosť, čo vyplýva už zo zákonov termodynamiky, a tiež nesmieme zabúdať na rôzne tepelné straty. V každom prípade môžeme zhadnotiť, že nami získaná energetická spotreba chladiaceho systému môže byť reálna. Teraz spočítajme, koľko nás bude táto energia stáť. Uvažujme priemernú cenu elektrickej energie²⁴ $c_E = 1,9 \text{ Kč} \cdot \text{kWh}^{-1}$. Potom za elektrinu spotrebovanú pri zaľadnení hokejového ihriska zaplatíme

$$S_2 = c_E E \doteq 9\,670 \text{ Kč}.$$

¹⁹<http://science.unctv.org/content/scienceblog/ice-hockey>

²⁰<https://www.pvk.cz/vse-o-vode/cena-vodneho-a-stocneho/>

²¹<http://tiny.cc/screw-chiller>

²²<http://science.unctv.org/content/scienceblog/ice-hockey>

²³https://sk.wikipedia.org/wiki/Merné_skupenské_teplo_topenia

²⁴<https://www.usetreno.cz/energie-elektrina/cena-elektriny/>

Dokopy za vodu, ktorú necháme premeniť na ľad a elektrickú energiu, ktorá sa spotrebuje chladiacim systémom, zaplatíme $S = S_1 + S_2 \doteq 12\,000$ Kč.

Síce uvažujeme, že chladiaci obeh už obsahuje všetky potrebné komponenty a nie je potrebné ich preto nakupovať. Zo zaujímavosti si ale môžeme spočítať, koľko by mohla stáť slaná voda použitá v chladiacom obeh. Objem vody použitý na chladenie je asi $V_c = 9\,000$ galónov,²⁵ teda cca $34\,000$ ℓ. Predpokladajme, že budeme opäť brať pôvodne pitnú vodu. Zaplatíme za ňu

$$S_3 = c_v V_c \doteq 1\,950 \text{ Kč}.$$

Na výrobu slanej vody budeme ešte potrebovať soľ, pričom môžeme použiť NaCl pre priemyselné účely. Uvažujme, že slaný roztok bude čo najviac nasýtený, aby mal čo najnižšiu teplotu tuhnutia. V tom prípade bude hmotnostná koncentrácia soli vo vode²⁶ $k = 23,3\%$, teda musí platiť

$$k = \frac{m_s}{m_s + m_c},$$

kde m_s je hmotnosť soli a m_c hmotnosť vody v potrubí. Odtiaľ si úpravami vyjadríme hmotnosť soli, ktorú budeme potrebovať a dostaneme

$$m_s = m_c \frac{k}{1 - k} = V_c \rho_v \frac{k}{1 - k} \doteq 10\,330 \text{ kg}.$$

Nech kupujeme priemyselnú NaCl za cenu²⁷ $c_s = 6 \text{ Rs} \cdot \text{kg}^{-1} \doteq 1,80 \text{ Kč} \cdot \text{kg}^{-1}$. Potom za soľ zaplatíme

$$S_4 = c_s m_s \doteq 18\,600 \text{ Kč}.$$

Slaná voda v chladiacom obeh by teda podľa našich odhadov stála asi $20\,500$ Kč. V porovnaní s cenou spotrebovanej elektrickej energie na jedno zaľadnenie a takisto ceny potrebnej vody vidíme, že keby sme mali nakupovať aj komponenty do chladiaceho obeh, tak aj cena zaľadnenia by značne vzrástla.

Ak by sme naozaj chceli hokejové ihrisko zaľadniť, potrebovali by sme na to určite aj nejakých odborných pracovníkov, ktorí by sa podieľali na realizácii celého procesu. Týchto pracovníkov by sme, samozrejme, tiež museli vyplatiť, čo by zdvihlo cenu zaľadnenia. Uvažujme, že títo technickí pracovníci majú v roku 2020 minimálnu mzdu²⁸ (nepodarilo sa nám nájsť žiadne údaje o tom, koľko v ČR reálne zarábajú) $m = 87,30 \text{ Kč} \cdot \text{hod}^{-1}$. Zamestnávateľ musí ešte okrem tejto sumy za svojho zamestnanca odvieť ďalších 34% do zdravotnej a sociálnej poisťovne.²⁹ Uvažujme, že počas celej doby zaľadňovania, sú v každej chvíli prítomní priemerne $n = 3$ zamestnanci. Potom celkovo za jedno zaľadnenie zaplatí zamestnancom

$$S_5 = 1,34 m n \doteq 16\,850 \text{ Kč}.$$

²⁵<https://www.rsi.edu/blog/hvacr/ice-hockey-rink-refrigeration/>

²⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Brine#Refrigerating_fluid

²⁷<http://tiny.cc/sodium-chloride>

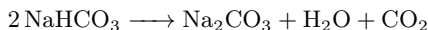
²⁸<https://www.kurzy.cz/kalkulacka/minimalni-mzda/>

²⁹<https://www.migrace.com/cs/poradna/informace-pro-cizince/cizinci-ze-zemi-mimo-eu/pracovni-pomer/zamestnani-mimo-eu-odvody>

Na záver môžeme zhrnúť, že ak máme pripravené všetko vybavenie na zaľadnenie hokejového ihriska, tak zaň zaplatíme asi 12 000 Kč. Za odborných pracovníkov, ktorí zaľadnenie vykonajú, zaplatíme ďalších 16 850 Kč. Celkovo teda bude jedno zaľadnenie stáť odhadom 30 000 Kč.

Úloha III.1 ... pečící

Při pečení perníku se do těsta přidává jedlá soda – hydrogenuhličitan sodný (NaHCO_3). Uvažujte, že se při vyšší teplotě rozloží podle rovnice



na uhličitan sodný, oxid uhličitý a vodu. O kolik se díky bublinkám oxidu uhličitého a vodní páry zvětší objem buchty, když do ní přidáme 10 g hydrogenuhličitanu sodného? Počítejte, že oxid uhličitý a vodní pára se chovají jako ideální plyny a těsto v okolí bublinek tuhne při teplotě 200 °C a tlaku 1 013 hPa.

Z rovnice je patrné, že počet molů hydrogenuhličitanu sodného je roven počtu molů plynu (vodní páry a oxidu uhličitého). Pro určení počtu molů plynu tedy stačí pouze určit počet molů NaHCO_3 , a to jako podíl hmotnosti této látky a její molární hmotnosti

$$n_h = \frac{m_h}{M_h}.$$

Molární hmotnost hydrogenuhličitanu sodného získáme součtem molárních hmotností jednotlivých atomů, z nichž se daná molekula skládá. Tyto údaje nalezneme například v periodické tabulce prvků a dostáváme

$$M_h = M_{\text{Na}} + M_{\text{H}} + M_{\text{C}} + 3M_{\text{O}} = 84,02 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

Objem plynu určíme pomocí stavové rovnice ideálního plynu

$$pV = nRT,$$

kde $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ je molární plynová konstanta.

Pro hledaný objem tedy dostáváme rovnici

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{RTm_h}{pM_h}.$$

Po číselném dosazení vychází objem plynu, o který se perník při pečení zvětší, jako 4,62 litrů. Tuto příliš velkou hodnotu jsme dostali kvůli použití neúplné chemické reakce, unikání plynu z perníku při praskání bublinek, a do značné míry také kvůli idealizovanému modelu tuhnutí těsta kolem bublinek plynu.

Úloha III.2 ... bungee

Jirka s Kátou si chtějí vyzkoušet bungee-jumping. Na skok z výšky $h = 100$ m mají dokonale pružné lano o délce $l = 40$ m, které je kalibrované tak, že když s ním skočí Káta o hmotnosti $m_K = 50$ kg, zastaví se ve výšce $h_K = 16$ m nad zemí. Může toto lano bezpečně použít Jirka s hmotností $m_J = 80$ kg? Odpor vzduchu a výšku Káti a Jirky zanedbejte.

V úloze nás zajímá pouze počáteční a finální stav, bude tedy výhodné použít výpočet pomocí energií. Konkrétně nás bude zajímat potenciální tíhová energie E_g a potenciální energie pružnosti E_p nataženého lana – jelikož v nejvyšším i v nejnižším bodě dráhy bude rychlost pádu nulová, bude v těchto bodech nulová i kinetická energie E_k . Přitom se nám vyplatí položit nulovou hladinu E_p do výšky $h = 100$ m, nikoli do výšky nulové, jak by se mohlo zdát. Uvažme nyní člověka o hmotnosti m , jenž se po seskoku s lanem ze zadání (o neznámé tuhosti k) zastaví ve výšce h_0 nad zemí. Jeho celková energie se nebude měnit, a protože ve výšce h nad terénem jsou hodnoty všech typů energie rovny nule, musí obecně platit

$$E_p + E_g + E_k = 0. \quad (33)$$

Ve výšce h_0 nad zemí je pak jeho tíhová potenciální energie rovna

$$E_g = m(h_0 - h)g, \quad (34)$$

a jak je vidět, pro $h_0 < h$ bude tato energie záporná. Energie pružnosti lana v této výšce je pak

$$E_p = \frac{1}{2}k(h - h_0 - l)^2. \quad (35)$$

Rovnice (35) vychází z obecného vztahu pro potenciální energii pružiny $E_p = ky^2/2$, přičemž si musíme uvědomit, že než se lano začne napínat, uletí padající člověk l metrů, a výchylka y je proto o l menší než rozdíl h_0 a h .

Zajímá nás výška nad terénem, ve které se zastaví Jirka – označíme ji h_J . Dosazením rovnic (34) a (35) do rovnice (33) a uvážením skutečnosti, že Jirkova kinetická energie je ve výšce h_J nulová, dostaneme rovnici

$$m_J(h_J - h)g + \frac{1}{2}k(h - h_J - l)^2 = 0. \quad (36)$$

Roznásobením závorek převedeme rovnici do tvaru normované kvadratické rovnice s neznámou h_J , tedy

$$\frac{1}{2}kh_J^2 + h_J(m_Jg - k(h - l)) - m_Jhg + \frac{1}{2}k(h - l)^2 = 0. \quad (37)$$

U této rovnice nám bohužel žádný trik nepomůže, výsledek proto budeme muset zjistit pomocí diskriminantu. Jeho hodnota je

$$D = (m_Jg - k(h - l))^2 + 2km_Jhg - k^2(h - l)^2 = m_Jg(m_Jg + 2kl) \quad (38)$$

a s použitím tohoto výsledku již hodnotu h_J získáme jednoduše jako

$$h_{J_{1,2}} = \frac{k(h-l) - m_J g \pm \sqrt{m_J g(m_J g + 2kl)}}{k}. \quad (39)$$

Stále však neznáme tuhost lana k . Tu můžeme zjistit díky tomu, že známe všechny ostatní údaje (včetně h_K) pro Kátiin skok. Sestavíme rovnici vycházející ze vztahu (36), do něž pouze dosadíme informace týkající se Káti, a vyjádříme k . Dostaneme

$$k = \frac{2m_K g(h - h_K)}{(h - h_K - l)^2}. \quad (40)$$

Po dosazení do (39) nám vyjdou dva různé výsledky, a to $h_{J_1} = 84,16$ m a $h_{J_2} = -1,04$ m. První výsledek vychází z toho, že v našem matematickém popisu problému je lano interpretováno jako dokonalá pružina nulové délky upevněná ve výšce $h - l$ nad zemí. V tomto případě tedy Jirka „sedí na stlačené pružině“, což však nedává z hlediska popisu seskoku smysl. Správným výsledkem je proto pouze $h_{J_2} = -1,04$ m, což znamená, že Jirka by se zastavil asi 1 m pod zemí. Pokud tedy Jirka nechce, aby byl tento seskok jeho posledním, měl by použít jiné lano než Káťa.

Úloha III.3 ... bum-bác, bum-bác

Představme si, že na geosynchronní oběžnou dráhu umístíme velké množství satelitů. Shodou okolností dojde ke srážce, která se vymkne kontrole a vytvoří tenkou sférickou vrstvu homogenně posetou deseti miliony úlomků o průměrné velikosti $x = 10$ cm. Předpokládejte, že směry rychlostí jednotlivých úlomků jsou v tečné rovině ke sféře orientované náhodně. Kolik času průměrně uplyne mezi dvěma srážkami?

Podľa zadania predpokladáme, že sa všetky úlomky nachádzajú v tenkej vrstve. Geosynchronná dráha je charakterizovaná dobou obehu okolo Zeme a je rovná jednému siderickému dňu $T = 23^h 56^m 4^s$. Polomer tejto sférickej vrstvy určíme z rovnováhy dostredivej a odstredivej sily

$$\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

$$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 42\,164 \text{ km}.$$

Ďalej potrebujeme určiť rýchlosť pohybu objektov. Tú máme jednoducho ako dráhu za čas

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 3,075 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pristúpme k jadrú úlohy. Stredný čas medzi zrážkou jedného konkrétneho telesa s iným určíme ako čas, za ktorý je pravdepodobnosť výskytu iného telesa v potenciálne kolíznom objeme nášho telesa jednotková. Vzhľadom na náhodné rozdelenie

smerov rýchlosti je vzájomná rýchlosť stretu objektov v priemere³⁰ $u = \sqrt{2}v$. Náš kolízny objem konštruujeme pozdĺž trajektórie nášho telesa ako „trubicu“, v ktorej ak sa nachádza stred iného telesa, dôjde k zrážke. Na rozdiel od rovnakých úvah v prípade strednej voľnej dráhy častice v ideálnom plyne, vzhľadom na rovnakú výšku všetkých objektov riešime len 2D problém. Trubicu nahradí pás šírky x na každú stranu od trajektórie telesa.³¹ Za čas t má teda kolízna plocha veľkosť $A(t) = 2\sqrt{2}xvt$.

Určíme ďalej plošnú hustotu častíc na sfére ρ . Na ploche povrchu gule s polomerom R sa nachádza desať miliónov úlomkov

$$\rho = \frac{N}{S} = \frac{N}{4\pi R^2}.$$

Ak položíme očakávaný počet častíc v kolíznej ploche rovný jednej

$$1 = \rho A = \frac{\sqrt{2}Nxvt}{2\pi R^2},$$

dostávame stredný čas medzi zrážkami jedného konkrétneho telesa s iným telesom

$$t = \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}N xv} = \frac{RT}{\sqrt{2}Nx}$$

Zadanie úlohy sa však pýta na strednú dobu medzi zrážkami ľubovoľných telies. Tieto zrážky budú logicky N -krát častejšie, čiže čas ešte musíme predeliť počtom objektov. Ale ešte je tu jeden veľmi dôležitý detail – takto sme zarátali každú zrážku dvakrát, musíme teda ešte čas prenásobiť dvomi.

$$t = \frac{2RT}{\sqrt{2}N^2x} \doteq 0,5 \text{ s}.$$

Zrážky medzi týmito objektami by boli teda veľmi časté. Z počtu úlomkov môžeme za predpokladu strednej hustoty približne $500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (veľká časť uvažovanej veľkosti úlomkov je prázdny priestor) odhadnúť ich celkovú hmotnosť, ktorá sa pohybuje len okolo 5 000 t. V skutočnom prípade budú mať úlomky rôzne veľkosti a samozrejme, že sa nebudú nachádzať len v tenkej vrstve. No už aj náš idealizovaný prípad jasne ukazuje, aké ničivé dôsledky môže mať nekontrolovaný pohyb satelitov.

³⁰

$$\begin{aligned} u &= \langle |v\mathbf{n}_1 + v\mathbf{n}_2| \rangle = v \left\langle \sqrt{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1 + 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_2\mathbf{n}_2} \right\rangle = v \left\langle \sqrt{1 + 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + 1} \right\rangle = \\ &= v\sqrt{1 + 2 \cdot 0 + 1} = \sqrt{2}v \end{aligned}$$

³¹Na to, aby sa telesá zrazili, stačí, aby sa ich stredy nachádzali vo vzdialenosti x od seba, pričom na smere spojnice stredov nezáleží.

Úloha III.4 . . . větrníkový katapult

Malý myšák Joe se rád katapultuje z konce vrtule ventilátoru tak, že se jednoduše ve vhodnou dobu pustí a odletí. Kdy se má pustit, aby doletěl co nejdál? Vrtule má délku l a otáčí se s úhlovou rychlostí ω , přičemž rovina otáčení je kolmá na vodorovnou rovinu. Dodejme, že střed otáčení je ve výšce h nad zemí.

Zadání úlohy se dá chápat dvěma způsoby – můžeme se zajímat o to, při jakém úhlu myšák buď uletí největší vzdálenost nebo dopadne nejdál od sloupu ventilátoru.

Zaměříme se nejprve na první případ. Výšku myšáka nad zemí v čase vystřelení spočítáme jako součet délkou sloupu a vrtule

$$h_0 = h - l \cos \varphi.$$

Úhel φ volíme tak, že při $\varphi = 0$ směřuje vrtule orientována svisle dolů. Orientace úhlu φ je pak standardní (proti směru hodinových ručiček). Kladný směr osy x volíme doprava. Při zanedbání odporu vzduchu bude vektor rychlosti po puštění

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega l \cos \varphi \\ \omega l \sin \varphi - gt \end{pmatrix},$$

kde t je čas od okamžiku, ve kterém se myšák pustil vrtule. Jako počátek x -ové osy je výhodné zvolit bod, ve kterém se myšák nacházel v čase $t = 0$. Potom pro jeho souřadnice dostaneme

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ h_0 + \int_0^t v_y(t') dt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega l t \cos \varphi \\ h - l \cos \varphi + \omega l t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix},$$

kde $y \neq v_y t$, jelikož v_y závisí na čase. Je tedy třeba integrovat, případně z hodin fyziky známe vzdálenost uraženou volně padajícím tělesem $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Pro čas dopadu platí $y(t) = 0$. Z této podmínky vyplývá

$$t_{1,2}(\varphi) = \frac{l \omega \sin \varphi \pm \sqrt{l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi - 2g(l \cos \varphi - h)}}{g},$$

což jsou řešení kvadratické rovnice. Kořen se záporným znaménkem vychází záporně, a proto neodpovídá fyzikálnímu řešení, takže dále budeme pracovat jen s kladným časem t_1 . Za tuto dobu myšák uletí vzdálenost x_1 , pro kterou platí

$$x_1 = v_x t_1 = \omega l t_1 \cos \varphi.$$

Dle nutné podmínky pro maximální vzdálenost

$$\frac{dx}{d\varphi} = 0$$

dostáváme rovnici pro úhel φ , pro který bude uletěná vzdálenost největší

$$0 = \frac{dx}{d\varphi} = \omega l \left(\frac{dt_1}{d\varphi} \cos \varphi + t_1 \frac{d \cos \varphi}{d\varphi} \right),$$

což po zderivování a zjednodušení vede na

$$0 = \cos \varphi \left(\frac{l^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + gl \sin \varphi}{\sqrt{l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi - 2g(l \cos \varphi - h)}} + l \omega \cos \varphi \right) - \\ - \sin \varphi \left(\sqrt{l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi - 2g(l \cos \varphi - h)} + l \omega \sin \varphi \right).$$

Tato rovnice nemá analytické řešení pro $\varphi = \varphi(l, \omega, g, h)$ a musíme se s tímto výsledkem spokojit. Jednu goniometrickou funkci můžeme nahradit druhou pomocí identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, čímž získáme racionální rovnici jen pro jednu proměnnou, například $\sin \varphi$. Po roznásobení a umocnění dostaneme polynom v této proměnné, který ale bude mít příliš vysoký stupeň na to, aby byl řešitelný analyticky (tj. větší než 4).

Pro představu můžeme dosadit hodnoty pro nějaký zcela obyčejný větrník. Například pro $l = 1 \text{ m}$, $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a $h = 10 \text{ m}$ vyjde 6 kořenů pro φ , z nichž dva jsou reálné. Největší vzdálenost dostaneme pro

$$\varphi_{\max} \doteq 3,08 \doteq 176^\circ.$$

Pustí-li se myšák pod tímto úhlem, doletí do vzdálenosti

$$x_{\max} = v_x t_{\max} = \omega l t_{\max} \cos \varphi_{\max} \doteq -1,50 \text{ m},$$

kde záporné znaménko je čistě naše konvence směru osy. Všimněme si, že vyšel přibližně příčný úhel, který odpovídá téměř vodorovnému vektoru počáteční rychlosti. To je způsobeno relativně malou úhlovou rychlostí vzhledem k výšce stožáru. Pro dosažení maximální vzdálenosti je potom výhodné investovat většinu rychlosti do x -ové složky.

Druhý případ vyřešíme tak, že jako počátek x -ové osy zvolíme sloup ventilátoru. Vztah pro souřadnici myšáka po vypuštění v závislosti na čase proto přejde na

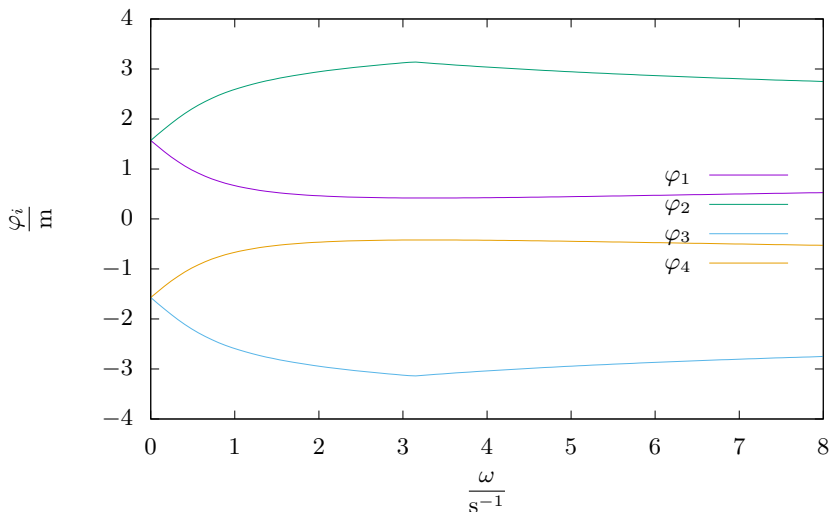
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin \varphi + v_x t \\ h_0 + \int_0^t v_y(t') dt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin \varphi + \omega l t \cos \varphi \\ h - l \cos \varphi + \omega l t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}.$$

Čas letu t_1 v závislosti na φ bude pořád stejný, jenom se změní počátek souřadnicového systému. Pro určení hledaného úhlu znovu použijeme podmínku

$$0 = \frac{dx}{d\varphi} = l \cos \varphi + \omega l \left(\frac{dt_1}{d\varphi} \cos \varphi + t_1 \frac{d \cos \varphi}{d\varphi} \right),$$

tentokrát s novým vztahem pro x -ovou souřadnici. Po zderivování a zjednodušení dostaneme

$$0 = \cos \varphi \left[g + \omega \left(\frac{gl \sin \varphi + l^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{2gh - 2gl \cos \varphi + l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi}} + l \omega \cos \varphi \right) \right] - \\ - \omega \sin \varphi \left(\sqrt{2gh - 2gl \cos \varphi + l^2 \omega^2 \sin^2 \varphi} + l \omega \sin \varphi \right).$$


 Obr. 9: Závislost φ_i na ω .

Roznásobení vede na kubickou rovnici pro $\cos \varphi$ ve tvaru

$$(g^2 + 2l^2\omega^4 + 2gh\omega^2) l \cos^3 \varphi - ((g^2 + 2l^2\omega^4 + 2gh\omega^2) h - 2gl^2\omega^2) \cos^2 \varphi - (l^2\omega^2 + 4gh) l \omega^2 \cos \varphi + hl^2\omega^4 + 2gh^2\omega^2 = 0.$$

Ta může mít obecně až tři kořeny. V tomto případě máme štěstí, neboť jeden kořen můžeme odhadnout, čímž rovnici rozložíme na lineární a kvadratický člen

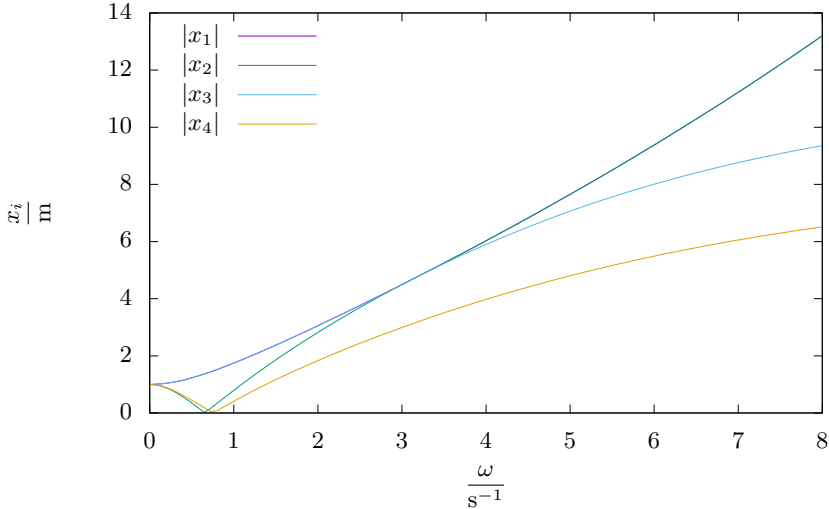
$$\left(\cos \varphi - \frac{h}{l}\right) \left((g^2 + 2l^2\omega^4 + 2gh\omega^2) \cos^2 \varphi + 2gl\omega^2 \cos \varphi - (l^2\omega^2 + 2gh) \omega^2\right) = 0.$$

Pro každý rozumný ventilátor lze předpokládat $h > l$ čili tomuto kořenu neodpovídá žádný reálný úhel φ . Pokud by odpovídal, nejspíš by se stejně jednalo o minimum. Protože funkce \cos není prostá, dostaneme ze zbývajících dvou kořenů čtyři řešení

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arccos \frac{A - gl\omega^2}{B}, & \varphi_4 &= -\arccos \frac{A - gl\omega^2}{B}, \\ \varphi_2 &= \arccos \frac{-A - gl\omega^2}{B}, & \varphi_3 &= -\arccos \frac{-A - gl\omega^2}{B}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{g^2 l^2 \omega^4 + \omega^2 (g^2 + 2l^2 \omega^4 + 2gh \omega^2) (l^2 \omega^2 + 2gh)}, \\ B &= g^2 + 2l^2 \omega^4 + 2gh \omega^2. \end{aligned}$$


 Obr. 10: Závislost $|x_i|$ na ω .

Toto jsou body podezřelé z extrémů. Může se jednat o lokální extrémy, inflexní body, nebo o úplně normální body (při odvozování kubické rovnice jsme dělali neekvivalentní úpravy, například umocňování). Pro jistotu bychom mohli vyšetřit druhé derivace, ale to by bylo zbytečně pracné a nejspíš by nám stejně nevyšlo nic konkrétního. Dále proto budeme postupovat tak, že pro jednotlivé úhly φ_i spočítáme vzdálenosti x_i a z nich vybereme tu největší. Uvědomme si, že souřadnice x může být jak kladná, tak záporná, takže nás ve skutečnosti zajímá veličina $|x|$.

Nejdříve ještě ověříme, zda mají výsledné úhly fyzikální smysl. Výrazy v argumentu arccos jsou vždy v absolutní hodnotě menší než 1, což je v pořádku, jinak by nespádaly do definičního oboru funkce arccos. Ta je prostá a klesající s hodnotami $\langle \pi, \frac{\pi}{2} \rangle$ pro interval $\langle -1, 0 \rangle$ a s hodnotami $(\frac{\pi}{2}, 0)$ pro interval $(0, 1)$. Označme si kvadranty 1 až 4, kde první přísluší $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, druhý $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ atd. Z nerovnosti $A > gl\omega^2 > 0$ a $B > 0$ je patrné, že úhel φ_1 bude vždy v kvadrantu 1, zatímco φ_2 bude v kvadrantu 2.

Jelikož $\varphi_3 = -\varphi_2$ a $\varphi_4 = -\varphi_1$, budou vždy v kvadrantech 3 resp. 4. Intuice nám napovídá, že úhel φ_4 by nikdy neměl být ten, pro který myšák doletí nejdál. Zkusme si tedy podobně jako v první části vypočítat úhly a vzdálenosti pro různé hodnoty parametrů. Protože ale tentokrát máme analytické řešení, můžeme je počítat například jako funkce parametru ω . Ostatní hodnoty si znovu zvolíme $l = 1$ m, $g = 9,8$ m·s⁻², $h = 10$ m.

Výsledné vzdálenosti jsme zobazili v grafu na obrázku 10. Jak je vidět, naše

intuice byla správná. Vzdálenost x_4 není nikdy maximální. Vzdálenost x_1 je oproti tomu vždy maximální. Pro malé rychlosti otáčení je další maximální vzdálenost x_3 , ale když se úhlová rychlost zvětšuje, tak se postupně stane maximální vzdáleností x_2 . Také je velice zajímavé, že vždy existují dvě stejně velká maxima, jedno odpovídající letu doprava (x_1) a jedno doleva (x_2 nebo x_3). Odpovídající úhly φ_i jsou na obrázku 9.

Úloha III.5 . . . pašování ve vesmíru

Dvě vesmírné lodě letí v jedné přímce proti sobě. Jejich počáteční vzdálenost je d . První se pohybuje rychlostí v_1 , druhá v_2 (ve stejné vztažné soustavě). První dokáže vyvinout maximální zrychlení a_1 , druhá a_2 (obě v libovolném směru). Posádky lodí si chtějí předat nějaké „zboží“, ale k tomu potřebují, aby se lodě potkaly ve stejný čas na stejném místě a přitom měly stejnou rychlost. Za jaký nejmenší čas je toho možné dosáhnout? Relativistické jevy neuvážete.

Přejdeme do souřadnic s počátkem v jedné z vesmírných lodí. Potom můžeme označit jejich vzdálenost x , vzájemnou rychlost v a maximální vzájemné zrychlení, které jsou schopné vyvinout, $a = a_1 + a_2$. Na začátku máme obecně $x = x_0 = x_1 - x_2$ a $v = v_0 = v_1 - v_2$ a chceme co nejrychleji docílit stavu, kdy bude platit $x = 0$ a $v = 0$.

Situaci si můžeme představit jako graf, kde na vodorovnou osu vynášíme x a na svislou osu vynášíme v , viz obrázek 11. Jsme-li v bodě (x, v) , znamená to, že lodě jsou od sebe vzdálené x a mají vzájemnou rychlost v . Tento graf je znázorněním fázového prostoru, neboli prostoru všech možných fyzikálních stavů systému. Nás zajímá, jakou trajektorii v grafu máme zvolit, abychom se co nejrychleji dostali do počátku.

Při pohybu v grafu platí, že nad osou x je $v > 0$, tedy se pohybujeme doprava (ve směru rostoucího x), pod osou x se pohybujeme doleva.

Do levého horního kvadrantu grafu si můžeme nakreslit parabolu danou rovnicí

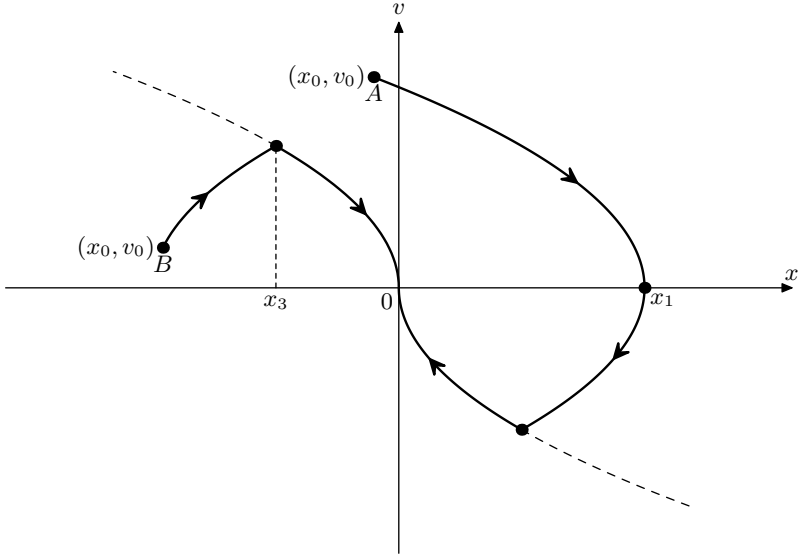
$$v = \sqrt{-2ax}.$$

Ta odpovídá pohybu s maximálním možným zpomalením $-a$. Tato parabola nám horní polovinu rozděluje na dvě části – ze všech bodů nalevo od paraboly se dokážeme dostat do počátku, aniž bychom přitom opustili levý horní kvadrant. Pokud se však nacházíme napravo od paraboly (například v bodě A na obrázku), nedokážeme zabrzdit včas, takže osu x protneme v nějakém bodě $x_1 > 0$, odkud se pak už přes pravý spodní kvadrant dostaneme do počátku.

Rozmysleme si, že to vždy půjde, protože v dolní polovině grafu je situace bodově obrácená vzhledem k počátku. Rovnice dělicí paraboly tam má tvar

$$v = -\sqrt{2ax}.$$

Platí dvě tvrzení. Zaprvé, čím více budeme zpomalovat, tím dříve dosáhneme vzdálenosti x_1 (a tím bude i menší). Zadruhé, čím bude x_1 menší, tím rychleji se poté přesuneme z bodu x_1 do středu (protože potom se jedná jen o pohyb po dráze dlouhé x_1 s nulovou počáteční i konečnou rychlostí).



Obr. 11: Nákres situace. Všechny paraboly mají vrchol na ose x a jsou stejně zakřivené. Dělicí paraboly jsou čárkovaně, čáry se šipkami odpovídají nejrychlejším trajektoriím do počátku.

Kombinací obou tvrzení dostaneme, že pokud se na začátku nacházíme napravo od horní paraboly, nejkratšího času dosáhneme tehdy, když se budeme celou dobu pohybovat s maximální velikostí zrychlení. Přesněji řečeno, do bodu x_1 a pak dál do poloviny vzdálenosti mezi nulou a x_1 to bude $-a$ a potom to bude a . Pohybu do x_1 odpovídají rovnice

$$t_1 = \frac{v_0}{a},$$

$$x_1 - x_0 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{v_0^2}{2a},$$

$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2}{2a}.$$

Druhá část je už jen pohyb s nulovou počáteční i koncovou rychlostí přes vzdále-

nost x_1 , zřejmě platí

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{2} &= \frac{1}{2}a \left(\frac{t_2}{2}\right)^2, \\ t_2^2 &= \frac{4x_1}{a}. \end{aligned}$$

Máme výsledek

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{2v_0^2 + 4ax_0}}{a}.$$

To bylo samozřejmě řešení jen pro první část příkladu, ve které jsme na začátku v horní části napravo od dělicí paraboly. Jak jsme zmínili výše, pokud bychom zpočátku byli nalevo (například v bodě B na obrázku), dokážeme se do počátku souřadnicové soustavy dostat přímo (bez změny znaménka rychlosti). Přitom se samozřejmě chceme celou dobu pohybovat s co největší rychlostí, aby byl výsledný čas co nejmenší.

Řešením je opět pohyb s extrémálním zrychlením – nejdříve to bude a , a to až do bodu, ve kterém protne dělicí parabolu. Poté změním zrychlení na $-a$ a po parabole se dostaneme až do počátku. Označme vzdálenost, ve které protne dělicí parabolu, jako x_3 . Dostáváme

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{v_3^2}{2a}, \\ v_3 &= v_0 + at_3, \\ x_3 - x_0 &= v_0t_3 + \frac{1}{2}at_3^2, \end{aligned}$$

což vede na

$$\begin{aligned} -\frac{(v_0 + at_3)^2}{2a} - x_0 &= v_0t_3 + \frac{1}{2}at_3^2, \\ 2a^2t_3^2 + 4v_0at_3 + 2ax_0 + v_0^2 &= 0, \\ t_3 &= \frac{-2v_0 \pm \sqrt{2v_0^2 - 4ax_0}}{2a}, \end{aligned}$$

kde smysl má samozřejmě kladný čas, tedy kořen s $+$. Dále se už jen pohybujeme po známé parabole, takže hledaný čas, za který z v_3 zpomalíme na nulu, je

$$t_4 = \frac{v_3}{a} = \frac{v_0}{a} + t_3,$$

řešením druhé části tedy je

$$t = t_3 + t_4 = \frac{v_0}{a} + 2t_3 = \frac{-v_0 + \sqrt{2v_0^2 - 4ax_0}}{a}.$$

Shodou okolností jsme dostali vizuálně podobný výsledek jako předtím, čímž máme vše vyřešeno. Pro pořádek dodejme, že jsme celou dobu mlčky předpokládali,

že se na začátku nacházíme v horní polovině grafu. Pokud by tomu tak nebylo, stačí využít středové symetrie grafu a provést záměnu souřadnic $(x_0, v_0) \rightarrow (x'_0, v'_0)$, kde $x'_0 = -x_0$ a $v'_0 = -v_0$. V nových proměnných už budeme v horní části grafu a budou pro ně platit výše odvozené rovnice.

Zbývá jen dosadit hodnoty ze zadání. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 < x_2$ (v opačném případě bychom pouze prohodili rychlosti). Potom platí $x_0 = -d$ a počáteční poloha leží v levé polovině grafu. Rozmyslíme si, že mohou nastat dva případy

$$v_1 - v_2 \geq \sqrt{2(a_1 + a_2)d} \Rightarrow t = \frac{(v_1 - v_2) + \sqrt{2(v_1 - v_2)^2 - 4(a_1 + a_2)d}}{a},$$

$$v_1 - v_2 \leq \sqrt{2(a_1 + a_2)d} \Rightarrow t = \frac{-(v_1 - v_2) + \sqrt{2(v_1 - v_2)^2 + 4(a_1 + a_2)d}}{a}.$$

Na závěr dodejme, že existuje i mnohem jednodušší řešení. Konkrétně stačilo vzít výsledek úlohy III.5 z 32. ročníku a vyjádřit z něj minimální čas. Z toho plyne, že ptáme-li se na to, jak nejrychleji překonáme danou vzdálenost, možná jen chceme zjistit, kam nejdál se můžeme za daný čas dostat. Na tom, že se jedná o vzdálenost ve fázovém prostoru souřadnic a rychlostí, vlastně vůbec nezáleží.

Úloha III.P . . . vlnitý elektromagnetismus

Co kdyby přírodní zákony nebyly v celém vesmíru stejné? Co kdyby se nějak měnily s polohou? Zaměřme se na elektromagnetickou interakci. Jak minimálně by se konstanta v Coulombově zákonu musela měnit se vzdáleností, abychom to mohli pozorovat? Jak bychom to pozorovali?

Prvým krokem riešenia je rozmyslieť si, čo sa má vlastne podľa zadania diať. Coulombov zákon má tvar

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

budeme preto uvažovať priestorovú zmenu hodnoty permitivity vákuu $\epsilon_0 \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$. Ostatné fyzikálne konštanty a vlastnosti elementárnych častíc sa v našej úvahe nebudú meniť. Tu však nastáva menší problém. Takýchto konštánt je totiž viac a sú medzi sebou čiastočne previazané. Napríklad pre rýchlosť svetla vo vákuu c platí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}},$$

kde μ_0 je permitivita vákuu. Ako fundamentálnejšiu konštantu, ktorá sa nebude meniť, budeme uvažovať rýchlosť svetla. So zmenou permitivity sa teda bude nepriamoúmerne meniť aj permeabilita vákuu. Ďalšou používanou konštantou je tzv. impedancia vákuu

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{c\epsilon_0} \doteq 377 \Omega,$$

ktorá sa teda bude meniť tiež nepriamoúmerne permitivite. Na ďalší problém narazíme v kvantovej fyzike, a to v prípade konštanty jemnej štruktúry

$$\alpha = \frac{e^2}{2hc\varepsilon_0} \doteq \frac{1}{137},$$

kde e je elementárny náboj a h je Planckova konštanta, ktoré uvažujeme nemenné. Vidíme teda, že aj konštanta jemnej štruktúry bude nepriamoúmerná permitivite vákuu.

Atomárne spektrá

Začnime so samotným riešením úlohy. Zmenu elektrickej permitivity môžeme chápať najmä ako zmenu sily elektrickej interakcie. Ako prvé sa pozrime na elektrostatické pôsobenie medzi elektrónmi a jadrom v atómoch. Špeciálne pre atóm vodíka máme známe energetické hladiny od hlavného kvantového čísla n

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{2a_B} \frac{1}{n^2} = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \frac{1}{n^2},$$

kde a_B je Bohrov polomer, ktorý sa s hodnotou permitivity mení, preto po prevedení do konštantných veličín obsahujúcich nemennú hmotnosť elektrónu m_e vidíme skutočnú závislosť energetických hladín na permitivite $E \propto \varepsilon_0^{-2}$. So zmenou permitivity vákuu by sa zmenili energie a teda aj vlnové dĺžky (resp. frekvencie) fotónov odpovedajúcim preskokom medzi hladinami. Dá sa očakávať, že táto zmena bude rovnaká pre všetky ostatné atómy, $E \propto \varepsilon_0^{-2}$. Toto je pomerne nepríjemné, keďže sa jedná o celkovú relatívnu zmenu všetkých energií. Takúto zmenu totiž ľahko prehliadneme ako chybu kalibrácie (v meraniach na Zemi), či ako Dopplerov posun (v meraniach vo vesmíre), ak budeme energie merať štandardne spektroskopicky. Tento jav však poskytuje možnosť inému experimentu. Atóm, ktorý deexcitáciou uvoľní fotón totiž nemusí byť schopný absorbovať atóm rovnakého prvku v inom bode priestoru (voči prvému v pokoji).

V spektrách sa však budú vyskytovať isté odchýlky od jednoduchej relatívnej zmeny. Presnejším popisom by sme sa mohli dopracovať pre atóm vodíka k hladinám s tzv. jemnou štruktúrou závislou aj na ďalšom kvantovom čísle j - celkovom momente hybnosti elektrónu³²

$$E_{j,n} = E_n \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right).$$

V spektrách tak vzniká malý posun polohy čiar a ich rozštiepenie. Napríklad hladina pre $n = 2$ sa rozštiepi na dve pre $j = 1/2$ a pre $j = 3/2$. Preto dochádza aj k rozštiepeniu príslušnej spektrálnej čiary Lyman- α zodpovedajúcej prechodu do základného stavu. Ak sa budeme zaujímať o relatívnu veľkosť tohto rozštiepenia voči energii prechodu, tak získame dobre merateľnú veličinu nadobúdajúcu hodnotu

$$w = \frac{E_{3/2,2} - E_{1/2,2}}{E_{1/2,2} - E_{1/2,1}} \approx \frac{-E_2}{E_2 - E_1} \frac{\alpha^2}{4} \approx \frac{\alpha^2}{12}.$$

³²Ide o kvantovomechanické zloženie spinu s a orbitálneho momentu hybnosti l a nadobúda kladné hodnoty, ktoré sú od l vzdialené o $1/2$.

Vidíme teda, že energeticky zodpovedá jednému veľkému prechodu asi 225 000 jemných prechodov. Toto číslo závisí na α a teda aj na ε_0 , keďže $w \propto \alpha^2 \propto \varepsilon_0^{-2}$ a sme ho tak schopní pomerne bezproblémovo zmerať.

Šírenie svetla

Vzhľadom na to, že svetlo je elektromagnetické vlnenie by sme mohli očakávať zmenu v spôsobe jeho šírenia. Pozrime sa preto na situáciu pre rovinnú vlnu na rovinnom rozhraní medzi dvoma prostrediami s rôznou hodnotou permitivity. Na takomto rozhraní musí vlnenie spojiť naväzovať, podobne ako v prípade rozhrania prostredí s rôznym indexom lomu. Z platnosti podmienky v každom čase dostávame nemennosť frekvencie žiarenia. Ďalej, keďže je rýchlosť šírenia v oboch prostrediach rovnaká, musia mať rovnakú veľkosť vlnové dĺžky, a teda aj vlnové vektory. Z platnosti podmienky na celej rovine rozhrania máme, že žiarenie buď prejde cez rozhranie priamo, alebo sa odrazí podľa zákona odrazu. To, aká časť žiarenia sa odrazí, určujú Fresnelove vzorce, ktoré majú vo všeobecnej podobe pre podiel komplexných amplitúd vlny tvar

$$r_s = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t},$$

$$r_p = -\frac{Z_2 \cos \theta_t - Z_1 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_t + Z_1 \cos \theta_i},$$

pre s , resp. p polarizované svetlo, θ_i je uhol dopadu, θ_t uhol lomu a Z je impedancia jednotlivých prostredí. V našom prípade je uhol dopadu rovnaký ako uhol lomu a po zjednodušení tak dostávame

$$r_s = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

$$r_p = -r_s.$$

Záporné znamienko vo výslednom koeficiente znamená zmenu fázy na opačnú. Vidíme teda, že sa paprsok šíri cez rozhranie priamo a bez ohľadu na uhol dopadu a polarizáciu žiarenia sa od rozhrania časť dopadajúcej vlny odrazí, na rozdiel od prípadu v štandardnej optike. V prípade komplexnejšieho rozdelenia permitivity v priestore by sme teda mohli dostať dokonca zaujímavé interferenčné javy. Priame pozorovanie tohto javu ale pravdepodobne nie je jednoduché.

Meranie

Vráťme sa na chvíľu k atómu vodíka. Zmena energií hlavných hladín $E \propto \varepsilon_0^{-2}$ totiž pôsobí zmenu frekvencie zodpovedajúceho prechodu $f \propto E \propto \varepsilon_0^{-2}$. Pre prechod medzi jemnými podhladinami môžeme vidieť zmenu frekvencie $f \propto E_n \alpha^2 \propto \varepsilon_0^{-4}$. Sekunda je definovaná pomocou prechodu hyperjemnej štruktúry cézia, ktorej zmena a samotný pôvod sú komplikovanejšie. Vidíme teda, že po zmene permitivity použitím kmitov rôznych sústav dostaneme časy bežiacie rôznou rýchlosťou. Tento jav by mohol byť merateľný využitím atómových hodín bežiacich na rôznych typoch prechodov.

Okrem merania času sa skomplikuje aj meranie dĺžky. Zmena sily elektrickej interakcie zmení hodnotu Bohrovho polomeru atómu vodíka

$$a_B = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} \propto \varepsilon_0.$$

Podobne sa teda zmenia aj polomery ostatných orbitálov. Celkovo tak dôjde k zmene veľkostí atómov a v prípade medziatómových väzieb aj veľkosti molekúl, či vzdialenosti atómov v kryštáloch. Dá sa teda predpokladať, že naše pravítka (či iné fyzické etalóny meraní dĺžky) budú mať na rôznych miestach priestoru rôznu dĺžku. Túto zmenu by sme vzhľadom na nemennosť rýchlosti svetla mohli zmerať. Fyzickú realizáciu tohto experimentu však komplikuje meranie už spomenutého času. Mohlo by nám napadnúť skúsiť merať dĺžku interferometricky a pozorovať posun interferenčných prúžkov. Pre vlnovú dĺžku svetla platí $\lambda \propto E^{-1} \propto \varepsilon_0^2$ a keďže by sa dĺžka tyče menila úmerne atómovému polomeru $l \propto a_B \propto \varepsilon_0$, tak by sme pozorovali zmenu.

Vzhľadom na uvedené zmeny meradiel jednoduchých veličín môžeme len skonštatovať, že s meraním iných veličín budú len ďalšie problémy. Ak by sme napríklad chceli zmerať permeabilitu vákua pomocou rovnobežných vodičov, musíme uvažovať meranie dĺžky vodičov, meranie sily, ktoré obsahuje v jednotkách aj čas aj priestor a meranie elektrického prúdu. V prípade, ak prúd meriame analógovo, máme opäť problém s dĺžkou a časom. V prípade, že je meranie digitálne sa ani neodvažujeme skúmať zmeny súvisiace s mechanizmom merania.

Experiment na záver

Pokúsme sa detekovať zmenu elektrickej permitivity priamo ako zmenu sily medzi dvomi nábojmi. Majme dve nabité telesá v pokoji vo vzdialenosti r od seba. Náboj aj hmotnosť týchto telies sú dané ich zložením, meniť sa teda rovnako ako elementárny náboj a hmotnosti elementárnych častíc nebudú. Silu medzi nábojmi nebudeme merať priamo, ale pozrieme sa na vzájomné zrýchlenie v okamihu uvoľnenia nábojov. Všetky vzdialenosti budeme merať pomocou vlnovej dĺžky svetla zodpovedajúcej prechodu hlavnej štruktúry, pomocou ktorého budeme merať aj čas. Výslednú nameranú hodnotu permitivity ε_m dostávame zo vzťahu

$$\varepsilon_m = \frac{q_1 q_2}{4\pi F r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi m a r^2},$$

Pri zmene permitivity sa mení hodnota faktoru $a r^2$. Vzhľadom na spôsob merania stačí určiť jednotky tohto súčinu $m^3 \cdot s^{-2}$. Nameranú hodnotu teda dostaneme ako

$$\varepsilon_m \propto \frac{1}{f^2 \lambda^3} \propto f^{-1} \propto \varepsilon_0^2.$$

Vidíme teda, že namerať zmenu sa nám použitím dostatočne presného merania podarí, no nameraná hodnota nezodpovedá skutočnej hodnote permitivity.

Úloha IV.1 . . . dvě kapky

Od vodovodního kohoutku se těsně za sebou odtrhnou dvě kapky a začnou padat dolů. Jak se bude jejich vzájemná vzdálenost měnit v čase? Odpor vzduchu zanedbejte.

Bonus Odpor vzduchu započítejte, odhadněte potřebné parametry a určete vzdálenost kapek po dlouhé době.

Pro jednoduchost předpokládejme, že kapky jsou stejně velké koule. Stejná velikost plyne z toho, že velikost kapky je dána zejména tvarem místa, odkud se odtrhává, a hodnotou povrchového napětí kapaliny, z níž je tvořena. Obě veličiny jsou u obou kapek stejné a jejich poloměr r tak bude také stejný.³³ To, že kapky padají ve tvaru velmi blízkém kouli, se dá pozorovat na zpomalených záznamech rychloběžných kamer.³⁴

Obě kapky padají v homogenním tíhovém poli se zrychlením g . Uvažujeme, že kapky jsou v okamžiku odtržení v klidu a od té chvíle padají rovnoměrně zrychleným pohybem

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

kde h je hloubka, ve které se kapka nachází v čase t po odtržení.

Začněme měřit čas t od chvíle, kdy se uvolní druhá kapka a první kapka je o h_0 níže. Kapky by se neměly dotýkat, tedy $h_0 > 2r$, kde r je poloměr kapky. Pokud bychom uvažovali vzdálenost $h_0 = 2r$, pak by se kapky kvůli povrchovému napětí slily. Ve skutečnosti trvá nějakou dobu než se druhá kapka zformuje, což znamená, že počáteční vzdálenost bude skutečně vyšší. Pro vzdálenost těžišť kapek v závislosti na času platí

$$\begin{aligned} \Delta h = h_1 - h_2 &= \frac{1}{2}g(t_1^2 - t_2^2) = \frac{1}{2}g\left(\left(t_2 + \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right)^2 - t_2^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}g\left(2t_2\sqrt{\frac{2h_0}{g}} + \frac{2h_0}{g}\right) = t_2\sqrt{2gh_0} + h_0, \end{aligned}$$

kde jsme číselným indexem označili veličiny odpovídající jednotlivým kápkám. Doba, kterou padá druhá kapka je ale shodná s dobou, kterou chceme měřit. Když ještě odečteme z předchozího výsledku rozměry kapek, abychom dostali jejich vzdálenost, vidíme, že se zvyšuje s rostoucím časem lineárně dle vztahu

$$D = t\sqrt{2gh_0} + h_0 - 2r.$$

³³Pokud se na daný problém podíváme detailně, můžeme zjistit, že se za velkou kapkou, kvůli kmitání povrchu vody, utrhne ještě další menší kapka. To můžeme pozorovat například na videu <https://youtu.be/c4MUTiJ8f6I>. Zajímejme se pouze o „velké“ kapky, které by měly být prakticky stejně velké.

³⁴Jak ve videu z minulé poznámky, tak i na dalším <https://youtu.be/1LYhK06tMA8>.

Bonus

Pro použití standardních vzorců pro odporovou sílu je potřeba, aby vzdálenost kapek mezi sebou byla dostatečně vysoká. Vzorce zpravidla předpokládají, že okolní odporové prostředí je v klidu a předmět pohybující se skrz něj nutí okolní látku k obtékání. V realitě průchod prvního tělesa tekutinou způsobí, že se tekutina rozpohybuje a obvykle je pro druhý předmět o něco jednodušší pohybovat se tímto prostředím, tedy je mu kladen menší odpor (odporová síla). Toho využívají hejna hus i cyklisti. Efekt se dá v silnější formě ukázat na experimentu s párkem a knihou. Zkuste upustit nejdříve samotnou knihu a pak samotné páčko a sledujte, jak rychle padají tyto předměty k zemi zvlášť. Zkuste pak položit páčko na knihu a upustte je současně. Pokud páčko nesfoukne boční poryv větru, pak spadnou na zem společně.

Nyní bychom měli zvážit, který odporový vztah použít. První variantou je Stokesův vzorec

$$F_S = 6\pi\eta r v,$$

kde η je dynamická viskozita charakterizující vnitřní tření tekutiny a v rychlost tělesa. Stokesův vzorec funguje pro koule, které jsou laminárně obtékány tekutinou. Jinak řečeno, rychlost pohybu tekutiny okolo kapky by musela být taková, aby nevznikaly víry, což platí pro malé rychlosti.

Alternativou je Newtonův vztah

$$F_N = \frac{1}{2} C S \rho v^2,$$

kde ρ je hustota tekutiny, C je bezrozměrný součinitel odporu, který závisí na tvaru tělesa, a S je příčný průřez tělesa. Ten funguje dobře pro vyšší rychlosti, kde nastává turbulentní proudění. Má ovšem také limity – při dalším zvyšování rychlosti, typicky pro ty blízké rychlosti zvuku v daném prostředí, odpor začne růst ještě prudčeji než s kvadrátem rychlosti. Po překročení rychlosti zvuku pak odpor v nějaké oblasti rychlostí klesá, než opět začne růst. Tento „detail“ se nás ale netýká, protože kapka se na takovou rychlost neurýchlí.

Určeme, na jakých maximálních rychlostech by se ustálila kapka o poloměru $r = 1,0$ mm, pokud by se pohybovala podle jednotlivých vztahů. Při ustálení rychlosti se vyrovná odporová síla s tíhovou $F_g = mg$. Dosazovat budeme parametry $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Pa·s, $\rho = 1,29$ kg·m⁻³, $C = 0,50$ a hustotu kapky $\rho_k = 1,00 \cdot 10^3$ kg·m⁻³. Pro hmotnost použijeme vztah $m = \rho_k V$, kde $V = 4\pi r^3/3$ je objem koule a $S = \pi r^2$ její průřez.

$$\begin{aligned} F_S = F_g \quad \Rightarrow \quad 6\pi\eta r v_S &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g, \\ v_S &= \frac{2g\rho_k r^2}{9\eta} \frac{g}{\eta} \approx 120 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \\ F_N = F_g \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} C S \rho v_N^2 &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g, \\ v_N &= \sqrt{\frac{8g\rho_k r}{3C\rho}} \approx 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Jak ale odhadnout, který vzorec by měl být vhodnější? To můžeme rozlišit například s pomocí výpočtu Reynoldsova čísla. Pro kouli pohybující vazkou tekutinou je³⁵

$$\text{Re} = \frac{2rv\rho_k}{\eta}.$$

Zkusíme-li dosadit nižší z rychlostí v_N , dostáváme řádově $7 \cdot 10^5$ a pro v_S by hodnota Reynoldsova čísla byla ještě vyšší. To odpovídá silně turbulentnímu pohybu. Hranice laminárního a turbulentního proudění není úplně jasně definovaná – avšak hodnoty ve stovkách tisíc jednoznačně ukazují na turbulentní. Proto je zřejmě vhodnější využít Newtonův vztah pro kapky s podobným rozměrem.

Celkově je odpovědí na bonus pro tuto jednoduchou úlohu, že nejprve se obě kapky budou urychlovat se zrychlením prakticky stejným jako je tíhové. Tím, jak poroste jejich rychlost, se bude odporová síla zvyšovat. Tím bude zrychlení klesat. Rychlost kapky se bude stále zvyšovat a postupně se blížit terminální rychlosti v_N . Vhodnost využití odporového vzorce pro turbulentní proudění jsme si potvrdili výpočtem Reynoldsova čísla. Po delším čase bude vzdálenost mezi kapkami, které mají stejný poloměr, konstantní. Nejsnadněji ji můžeme vypočítat jako součin rychlosti a rozdílu času startu obou kapek, tedy

$$D = v_N (t_1 - t_2) = t_0 \sqrt{\frac{8g\rho_k r}{3C\rho}}.$$

Proč takto snadno? Protože průběh pádu probíhal u obou kapek stejně, byl pouze posunutý v čase. Necht' po nějaké dostatečně dlouhé době (takové, aby se už kapky pohybovaly terminálními rychlostmi) proletí první kapka bodem h . Druhá jím zřejmě proletí o t_0 později. Jelikož se první pohybuje terminální rychlostí, urazí za tuto dobu vzdálenost $v_N t_0$.

Co jsme neuvažovali a jak by bylo možné zpracování dále vylepšit? Zanedbali jsme vztakovou sílu působící na kapky, ale ta je zhruba $800\times$ menší, než je tíhová. Tíže jsme předpokládali, že kapky padají z velké výšky a nedopadnou na zem a během pádu se nijak nebudou měnit. To nemusí být pravda, protože pádem v suchém vzduchu se bude kapka odpařovat, naopak při pádu v mlze by se její hmotnost a poloměr mohly zvyšovat. Současně ale padají v konstantních podmínkách – konstantní tíhové zrychlení, hustota vzduchu a další parametry, což by pro velice dlouhý pád neplatilo. Dále bychom se mohli více věnovat kapkám s různými poloměry. V tom případě bychom zjistili, že pokud bychom vypustili malou kapku a následně kapku větší, druhá by měla tendenci tu první „dohnat“ a pravděpodobně by se slily. Mohli bychom numericky či analyticky vypočítat vzdálenost kapek v každém čase. Pro dvě velice rychle za sebou padající kapky by pak mohlo být zajímavé numericky simulovat pohyb vzduchu kolem nich v průběhu jejich pádu. Ale to jsou komplikovanější problémy za hranici bonusu jednoduché úlohy.

³⁵Viz např. Wikipedia – Reynolds number – Object in a fluid – Sphere in a fluid https://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number#Sphere_in_a_fluid.

Úloha IV.2 . . . pružinek není nikdy dost

Jakou práci vykonáme při zkroucení pružiny z rovnovážné polohy o úhel $\alpha = 60^\circ$, pokud pružinu ve zkrouceném stavu udržujeme momentem síly $M = 1,0 \text{ N}\cdot\text{m}$?

Postup je analogický ako pre obvyklé natáňovanie pružiny. Stačí len zameniť niektoré veličiny v známých vzťahoch. Prácu určíme ako

$$W = \frac{1}{2} D \alpha^2,$$

kde D je direkčný moment (akási tuhosť v torzii) a α je uhlová výchylka. Namiesto síly pre lineárne natiahnutie pružiny máme pre skrut moment síly

$$M = D \alpha.$$

Vyjadrením direkčného momentu a dosadením dostávame pre prácu

$$W = \frac{1}{2} M \alpha = 0,52 \text{ J},$$

kde pri uhlovej výchylke netreba zabudnúť previesť stupne na radiány.

Úloha IV.3 . . . křivá optika

Mějme bodový zdroj světla a rovinnou skleněnou desku s indexem lomu $n = 1,50$. V místě paty kolmice od zdroje na desku se uvnitř desky nacházejí vlnoplochy s poloměrem křivosti $R = 5,00 \text{ m}$. Jaká je skutečná vzdálenost zdroje a desky?

Nechť r je skutečná vzdálenost, potom paprsek dopadající ve vzdálenosti h od kolmice tvoří trojúhelník, který má u zdroje úhel α . Potom platí

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Paprsek vstupuje do krystalu desky pod úhlem α a zlomí se na úhel β , kde $\sin \alpha = n \sin \beta$. V tom bodě se bude zdát, že paprsek pochází ze zdroje u kterého je úhel β , takže můžeme psát

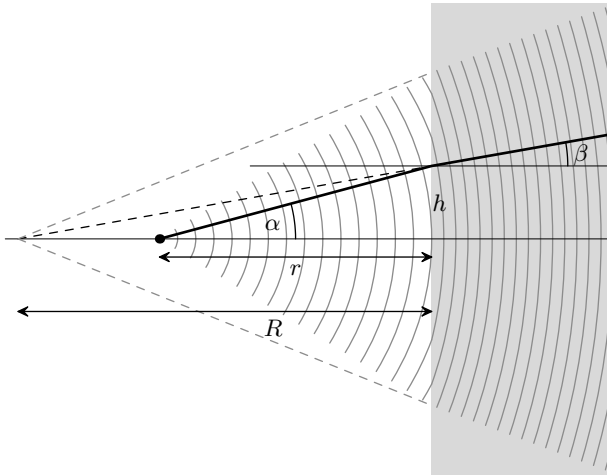
$$\sin \beta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}.$$

Z rovnosti výše máme

$$(h^2 + R^2) = n^2 (h^2 + r^2),$$

což v limitě $h \rightarrow 0$ vede na

$$r = \frac{R}{n} \doteq 3,33 \text{ m}.$$



Úloha IV.4 ... mravenčí

Mravenci přišli na zajímavý způsob vyhřívání mraveniště – vylezou ven, nechají se ohřát slunečním zářením a opět vlezou dovnitř, kde zase předají teplo mraveništi. To aproximujeme kuželem o výšce $H = 0,8 \text{ m}$ s poloměrem podstavy $R_0 = 1,5 \text{ m}$. Celulózové stěny s tepelnou vodivostí $\lambda = 0,039 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ jsou široké 2 cm .

Předpokládejme, že veškerá tepelná výměna mezi mraveništěm a okolím (které má teplotu $T_o = 10 \text{ }^\circ\text{C}$) je zprostředkována pouze mravenci a vedením přes stěny, tepelnou výměnu se zemí můžeme zanedbat. Mravenec váží $m = 5 \text{ mg}$ a má měrnou tepelnou kapacitu odhadem $4000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Kolik mravenců vyhřátých na $T_m = 37 \text{ }^\circ\text{C}$ musí každou sekundu přilézt do mraveniště, aby v celém vnitřním objemu udrželi konstantní teplotu $T_M = 20 \text{ }^\circ\text{C}$?

Tepelný tok stěnou o ploše S a tloušťce a určíme jako

$$P = \frac{S\lambda\Delta T}{a},$$

kde $\Delta T = T_M - T_o$. Plochu mraveniště vypočteme pomocí standardního vzorce pro povrch kužele. Správně bychom měli tok určit rozdělením mraveniště na infinitezimálně tlusté kužely, protože každá „vrstva“ bude mít trochu jiný povrch, a proto i jinak povede teplo. Vzhledem k tomu, že $a \ll R_0$, můžeme tuto skutečnost zanedbat.

Povrch mraveniště bude $S = \pi R_0 \sqrt{R_0^2 + H^2}$, potom pro tepelné ztráty dostaneme

$$P = \frac{\pi R_0 \sqrt{R_0^2 + H^2} \lambda \Delta T}{a} \doteq 156 \text{ W}.$$

Tok stěnami se musí rovnat teplu, které do mraveniště přináší mravenci. Každý mravenec s tepelnou kapacitou c přinese teplo

$$Q_m = cm(T_m - T_M) .$$

Za sekundu jich do mraveniště přijde N . Tedy N -násobek tepla, jež do mraveniště přinese jeden mravenec, se musí rovnat tepelným ztrátám skrz stěny mraveniště. Porovnáním těchto dvou veličin dostaneme

$$N = \frac{P}{Q} = \frac{\pi R_0 \sqrt{R_0^2 + H^2} \lambda (T_M - T_o)}{acm(T_m - T_M)} \doteq 460 \text{ s}^{-1} .$$

Po dosazení hodnot vychází, že pro udržení konstantní teploty musí do mraveniště každou sekundu přijít přibližně 460 vyhřátých mravenců.

Úloha IV.5 . . . Efchári-Goiteía

Efchári a Goiteía jsou dvě složky dvojslunečnice okolo nedávno vzniklé hvězdné soustavy. Obíhají okolo společného těžiště po kruhových trajektoriích ve vzdálenosti $a = 250 \cdot 10^3$ km. Efchári má poloměr $R_1 = 4300$ km, hustotu $\rho_1 = 4100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a dobu siderické rotace $T_1 = 14$ h. Goiteía je menší s poloměrem $R_2 = 3800$ km, má však větší hustotu $\rho_2 = 4500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a kratší dobu rotace $T_2 = 11$ h. Osy rotace planet i soustavy jsou rovnoběžné. Za několik set milionů let přejde soustava díky slapovým silám do tzv. vázané rotace. Určete výslednou změnu oběžné doby za předpokladu, že tělesa jsou homogenní a přibližně sférická.

Slapové síly jsou síly, kterými na sebe gravitačně působí skutečné tělesa, které nejsou bodové. Ich příčinou je různá vzdálenost bodů tělesa od zdroje síly a teda jejich různá velikost v různých bodech. Tieto síly tělesa deformují v směru ich působenia, čo je príčina vzniku výdutí na povrchu planéty (na Zemi je najlepšie pozorovateľnou zložkou tohto pôsobenia príliv a odliv). Kompenzované sú pružnou silou materiálu, z ktorého sú tělesa vytvorené a jeho vlastnou tiažou. Deformácia a jej navrátenie však nie je okamžité. Výduť je unášaná rotáciou planéty mimo priamu spojnicu telies. Na takto pootočenú výduť potom pôsobí druhé těleso nenulovým momentom síly, čo má za následok vyrovnávanie rotačných periód planét s periódou ich vzájomného pohybu. Pri tomto procese sa nezachováva energia (premieňa sa na deformačné teplo), ale zachováva sa celkový moment hybnosti sústavy dvojslunečnice. Na začiatok bude užitočné vyjadriť si hmotnosti zložiek

$$M_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho_1 \doteq 1,365 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad M_2 \doteq 1,034 \cdot 10^{24} \text{ kg} .$$

Ďalej bude užitočné určiť pôvodnú obežnú periódu sústavy, z tretieho Keplerovho zákona

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

máme vzťah

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(M_1 + M_2)}} \doteq 1,963 \cdot 10^6 \text{ s} \doteq 22,7 \text{ d} .$$

Pokúsme sa nájsť celkový moment hybnosti L sústavy tesne po vzniku. Správne by bolo potrebné vektorovo sčítať rotačné momenty hybnosti oboch zložiek ($\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$) s momentom hybnosti zodpovedajúcemu vzájomnému obehu \mathbf{L}_o . Vzhľadom na kolineárnu orientáciu rotačných osí, v ktorých tieto momenty ležia,³⁶ stačí sčítanie vykonať skalárne $L = L_1 + L_2 + L_o$. Pre rotačný moment hybnosti máme $L_i = I\omega$, kde I je moment zotrvačnosti telesa a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je jeho uhlová rýchlosť. Moment zotrvačnosti odhadneme pre planétu ako pre homogénnu guľu

$$I_1 = \frac{2}{5}M_1R_1^2 \doteq 1,010 \cdot 10^{37} \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad I_2 \doteq 0,597 \cdot 10^{37} \text{ kg}\cdot\text{m}^2,$$

$$L_1 = \frac{2\pi I_1}{T_1} \doteq 1,259 \cdot 10^{33} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}, \quad L_2 \doteq 0,948 \cdot 10^{33} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pre určenie orbitálneho momentu hybnosti potrebujeme poznať vzdialenosti telies od ťažiska a_i a ich rýchlosti na orbite v_i . Vzdialenosti od ťažiska máme z definície ťažiska ako hmotného stredy

$$a_1 = \frac{aM_2}{M_1 + M_2}.$$

Vzhľadom na kruhovosť dráh máme potom

$$L_o = M_1v_1a_1 + M_2v_2a_2 = \frac{aM_1M_2}{M_1 + M_2}(v_1 + v_2).$$

Rýchlosť telies určíme napríklad z rovnováhy odstredivej a dostredivej sily

$$\frac{M_1v_1^2}{a_1} = G\frac{M_1M_2}{a^2},$$

kde je dôležité si uvedomiť, že polomer obehu nie je vzdialenosť telies, na ktorej pôsobí gravitačná sila. Po dosadení a úprave

$$v_1 = M_2\sqrt{\frac{G}{a(M_1 + M_2)}},$$

$$L_o = M_1M_2\sqrt{\frac{Ga}{M_1 + M_2}} \doteq 1,177 \cdot 10^{35} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}.$$

Zostáva nám skompletizovať celkový súčet

$$L = \frac{4\pi M_1R_1^2}{5T_1} + \frac{4\pi M_2R_2^2}{5T_2} + M_1M_2\sqrt{\frac{Ga}{M_1 + M_2}}.$$

Pre výpočet zmeny samotnej periódy bude vhodné vyčíslit samostatne hodnotu rotačných momentov zotrvačnosti

$$\Delta L = L_1 + L_2 = 2,206 \cdot 10^{33} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1},$$

³⁶Vo všeobecnosti ale neleží vektor momentu hybnosti v smere rotačnej osi, platí to len pre viac symetrické telesá.

ktorá je oproti obežnému momentu skoro o dva rády menšia. V stave viazanej rotácie sa rotačné periódy vyrovnávajú s periódou obežnou, preto môžeme rotačnú časť momentu hybnosti vo výslednom stave oproti pôvodnému stavu zanedbať. Moment hybnosti ΔL teda celý prejde do obežného momentu. Pre jeho zmenu máme

$$L_o = Ka^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L_o + \Delta L_o = K(a + \Delta a)^{\frac{1}{2}} \approx Ka^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}Ka^{-\frac{1}{2}}\Delta a = L_o \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}\right),$$

z čoho vyplýva

$$\frac{\Delta L_o}{L_o} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{a}.$$

Podobne diferencovaním tretieho Keplerovho zákona

$$2\frac{\Delta P}{P} \approx 3\frac{\Delta a}{a},$$

z čoho dosadením predchádzajúceho vzťahu máme

$$\Delta P \approx 3P\frac{\Delta L_o}{L_o}.$$

Dosadením číselných hodnôt máme zmenu dĺžky obežnej periódy $\Delta P \doteq 1,104 \cdot 10^5 \text{ s} \doteq 1,28 \text{ d}$. Úloha sa namiesto diferencovania a teda rozvoju do lineárneho člena dala riešiť aj postupným dosadením nového momentu hybnosti do vzťahu zväzujúceho moment hybnosti a veľkú polos a následne novej veľkej polosi do tretieho Keplerovho zákona pre získanie novej obežnej periódy. Pri tomto postupe dostávame presný výsledok

$$\Delta P = \frac{2\pi(M_1 + M_2)L^3}{G^2M_1^3M_2^3} - P \doteq 1,124 \cdot 10^5 \text{ s} \doteq 1,30 \text{ d}.$$

Úloha IV.P ... pták Fykosák na dovolené

Jak by fungovalo letectví na jiných planetách (s atmosférou)? Zajímejte se hlavně o proudová letadla. Které parametry by působily pozitivněji a které negativněji než na Zemi?

Úvod

Úloha je značne otvorená a je možné ji uchopit různými způsoby. Pokusíme se pokrýt ty nejdůležitější parametry a popsat jejich vliv na létání. Letmo se zmíníme i o vybraných pravidlech létání ve spojitosti s měněnými fyzikálními parametry. Speciálně se budeme, dle zadání, věnovat proudovým letadlům. Ty mají motory, které vpředu natahují okolní vzduch. Ten se uvnitř stlačuje kompresory a následně se využívá pro spalování paliva (letecký petrolej či letecký benzín). Spaliny pak pokračují motorem dále k turbíně, kterou roztáčí, tudíž rotuje i osa motoru, na které jsou lopatky kompresoru. Současně s tím je letadlo poháněno díky principu akce a reakce.

„Prolétli“ jsme pouze základní princip motorů, který může být v jednotlivých aplikacích vylepšen dalšími technickými prvky. Výhodou proudových motorů je, že umožňují rychlejší let než vrtulové. Nevýhodou naopak, že základní typ tohoto motoru potřebuje pro vzlet dosáhnout netriviální minimální rychlosti, aby motor fungoval.

Pro jednoduchost budeme v následujícím textu často plyn v atmosféře planety nazývat vzduchem, i když může mít zcela odlišné složení. Nadpisy jsou zvoleny tak, aby se následující část textu věnovala více právě zmíněné fyzikální veličině, nicméně tyto parametry jsou často provázané a působí na letadlo a vlastnosti letu v kombinacích. Tím, že jsme zvolili proudové motory, automaticky jsme zvolili i letadla s přetlakovými kabinami. Létají totiž tak vysoko, že by lidem nebylo moc dobře.³⁷

Hustota atmosféry u povrchu planety

Na planetě bez atmosféry bychom nemohli letadla vůbec využívat. Ze vzduchu je využíván kyslík na spalování paliva. Neméně důležité je látkové prostředí, které vytváří vztlak. Nedá se ovšem přímočaře říct, že čím větší hustota vzduchu, tím lépe ze všech hledisek. Jednoznačně ale platí, že čím hustější je atmosféra, tím nižší rychlost nám stačí pro vzletnutí.

Podívejme se nejprve, k čemu jsou letadlu motory. Tah motoru se využívá jak na vyrovnání tíhové síly, tak na vyrovnání odporu při letu (případně i zrychlování). Tíhová síla se vyrovnává tím, že křídla letadla svírají vůči letové hladině určitý úhel (úhel náběhu). Dalo by se říct, že to je pro nás užitečná část odporové síly, tedy vztlak. Část spotřebovaná na odpor působící proti pohybu pro nás ovšem již tolik užitečná není a byli bychom raději, kdyby byl tento odpor minimální, případně by nám umožnil co nejvyšší rychlost letadla. Ilustrativně se podívejme, jak závisí odporová síla na rychlosti tělesa. Při turbulentním proudění můžeme obvykle použít Newtonův odporový vztah

$$F_{\text{odp}} = \frac{1}{2}CS\rho v^2,$$

kde C je bezrozměrný koeficient určený tvarem tělesa, S průřez tělesa kolmý na směr pohybu, ρ hustota vzduchu a v je rychlost tělesa. Tento vzorec neplatí přesně pro libovolné rychlosti. U letadel pozorujeme, že odpor při letu prudce roste s tím, jak se rychlost letadla blíží rychlosti zvuku ve vzduchu (rychlosti Mach 1). Když ji nadzvukové letadlo překročí,³⁸ pak se zpravidla odpor prostředí sníží a opět začne růst až pro výrazně vyšší rychlosti.³⁹ Pro jednoduchost se nadále budeme tvářit, že Newtonův vztah funguje bez omezení. V praxi inženýři používají komplexní simulace a následně modely ve větrných tunelech, aby si ověřili správnost svých výpočtů.

³⁷Co si budeme povídat – většina lidí by po tak rychlém nastoupení do 11 km nad zemí zemřela na hypoxii. Jedině možná trénovaní horolezci či potápěči by měli trochu šanci. Také je potřeba v letadle udržovat rozumně vysokou teplotu, protože turisté v žabkách by při teplotách kolem -55°C měli tendenci umrznout.

³⁸Což nedokáže každé letadlo, jak diskutujeme dále.

³⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Drag-divergence_Mach_number

Uvědomme si, že sílu můžeme rozložit do dvou směrů a vzorec platí jak pro směr pohybu letadla (osa x), tak pro směr proti tíhovému zrychlení (osa y), tedy

$$F_{\text{odp},x} = \frac{1}{2}C_x S_x \rho v_x^2, \quad F_{\text{odp},y} = \frac{1}{2}C_y S_y \rho v_y^2.$$

Vidíme, že jediná proměnná, která je pro obě osy přímočaře shodná, je hustota okolní atmosféry. Mohlo by se zdát, že letadlu letícímu v konstantní letové hladině odpovídá nulová vertikální rychlost. Musíme si ale uvědomit, že jde o relativní rychlost vzduchu vůči letadlu. Můžeme i vyjádřit, jak velká by měla být, aby vyrovnala tíhovou sílu $F_g = mg$, kde m je hmotnost letadla, takže

$$mg = \frac{1}{2}C_y S_y \rho v_y^2 \quad \Rightarrow \quad v_y = \sqrt{\frac{2mg}{C_y S_y \rho}}.$$

Jinak řečeno, kdybychom touto rychlostí foukali zesponu na letadlo, pak by se udrželo v konstantní výšce. Letadlo by však muselo být správně naklopené a neotáčet se. Nebo by musel náš fukar fungovat adaptivně podle toho, jak se vůči němu natáčí.

Měli bychom zmínit i aerostatickou vztlakovou sílu $F_{vz} = \rho V g$, kde V je objem letadla. U letadel na Zemi je docela dobře zanedbatelná kvůli nízké hustotě vzduchu. Pokud bychom byli na planetě s vysokou hustotou atmosféry, pak by nám mohla pomoci letadlo snadněji udržet ve vzduchu. Tím by se ovšem opět zvýšila odporová síla pro dopředný pohyb a letadlo by pravděpodobně dosahovalo výrazně nižších rychlostí.

Složení atmosféry

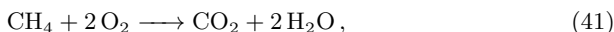
Aby mohlo v motoru probíhat spalování, potřebujeme atmosféru ze směsi plynů, která podporuje hoření palivové směsi. Pro stávající motory je ideální způsob natahování vzduchu z okolní atmosféry a následně spálení kyslíku. Mohli bychom motory upravit, aby spalovaly jiné látky či by si letadlo vezlo s sebou všechny složky nutné pro hoření paliva. Druhá možnost ovšem neodpovídá zájmu o proudová letadla, ale šlo by o raketový motor. U proudových motorů je důležitý proud vzduchu procházející skrz celý motor. Jsme tedy limitováni tím, že nějakou část palivové směsi chceme získávat z atmosféry.⁴⁰ I pokud se omezíme na běžné hoření, tak můžeme získávat buď kyslík, nebo naopak palivo (např. plynné uhlovodíky). Důvodem, proč bychom nemohli sbírat jak palivo, tak kyslík, je, že by taková atmosféra měla nejspíše tendenci sama vzplanout, což pro létání není vhodné prostředí. Pokud by nevzplála sama, pak bychom ji pravděpodobně našim letadlem zapálili. Obdobně bychom asi nechtěli atmosféru s blížícím se podílem k 100 % kyslíku. Přestože kyslík není sám o sobě hořlavý, atmosféra s vysokým podílem kyslíku by

⁴⁰Přípustné by mohlo být létat s oběma přísadami pro hoření, současně do motoru vpouštět tyto složky, a ještě plyn z atmosféry, který by se také po spálení paliva ohříval, čímž by působil další tah. To by bylo možné i v inertní atmosféře. Nicméně je otázkou, jestli by se to konstrukčně vyplácelo a nebylo by lepší používat pouze plyny unikající po spalování. S nejvyšší pravděpodobností by přidávaný plyn zhoršoval účinnost spalování a bylo by těžší zajistit dokonalé spalování paliva.

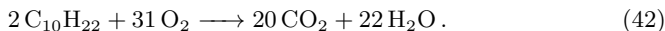
podporovala hoření ještě výrazněji než naše. To by způsobovalo snadné vzplanutí téměř čehokoliv hořlavého umístěného do takového plynu. Současně by to vedlo k rychlé korozi konstrukčních materiálů letadla.

Skladování kyslíku je sice rizikové, ale mohli bychom to vyřešit tlakovými lahve-
mi na palubě. Atmosféra by pak musela obsahovat vhodný hořlavý plyn. Mohlo by se jednat například o směs podobnou zemnímu plynu, který se převážně skládá z methanu. Relevantní otázkou může být, jestli by bylo reálné takovým palivem něco pohánět a s jakou účinností. Opačně, tedy zemní plyn jako stlačené palivo z nádrže a kyslík z atmosféry, se používá běžně jako alternativní palivo pro auta. Samotná reakce je tedy vhodná pro pohon motorů obecně. Proudové motory letadel by se sice musely upravit, ale není to nemožné. Pokud se podíváme na výhřevnost zemního plynu, pak je dokonce o něco málo vyšší,⁴¹ a to $49 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ oproti $43 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ u kerosenu.⁴² Řádově jsou tyto hodnoty ale blízké. Navíc záleží na složení konkrétního zemního plynu a leteckého paliva, které se liší podle místa těžby. Možná by bylo vhodnější porovnávat spalná tepla, protože ta zahrnují, na rozdíl od výhřevnosti, i energii, kterou přijme voda uvolňující se při spalování. Poměr tepel by byl ale obdobný.

Jaké množství kyslíku bychom měli s sebou mít v letadle oproti konvenčnímu palivu pro letadlo na Zemi, kdybychom chtěli získat srovnatelnou energii? Pro to potřebujeme znát rovnici spalování. Vyjdeme z dokonalého spalování, protože se budeme snažit motor upravit tak, aby i v nové atmosféře byl co neúčinnější. Dokonalé spalování je pro nás tak výhodnější než nedokonalé probíhající za nedostatku kyslíku. Pro methan (hlavní složku zemního plynu) vypadá rovnice takto



a spalování dekanu (letecký petrolej se skládá z uhlíkových řetězců dlouhých od 9 do 16 uhlíků) je



Spotřeba paliva na Zemi je např. pro letadlo Boeing 747 něco pod 2,4 l na 100 km a jednoho pasažéra.⁴³ To je mimochodem méně než spotřeba většiny aut, pokud v autě jede jeden až dva cestující. Z rovnice (42), molární hmotnosti dekanu⁴⁴ $M_{\text{dek}} = 142,3 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ a kyslíku $M_{\text{O}_2} = 32,00 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ dostáváme poměr

$$k_{\text{dek}} = \frac{31}{2} \frac{M_{\text{O}_2}}{M_{\text{dek}}} \doteq 3,49,$$

který nám říká, že na jeden kilogram dekanu potřebujeme spálit tři a půl kilogramu kyslíku. U dekanu je pro nás jednoznačně výhodou, že samotné palivo je lehčí než kyslík, když musíme nést palivo s sebou. Čím těžší letadlo musíme udržet ve

⁴¹ Přepočteno na hmotnost z <http://www.cng4you.cz/cng-info/co-je-zemni-plyn.html>.

⁴² https://en.wikipedia.org/wiki/Aviation_fuel

⁴³ Při obsazenosti 500 cestujících dle <https://www.flyradar.cz/letadla/spotreba-paliva-dopravniho-letadla/>.

⁴⁴ [https://cs.wikipedia.org/wiki/Dekan_\(uhlovodík\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Dekan_(uhlovodík))

vzduchu, tím více spotřebujeme paliva. Podívejme se na tento poměr pro methan⁴⁵ s $M_{\text{met}} = 16,04 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Ten je

$$k_{\text{met}} = \frac{2}{1} \frac{M_{\text{O}_2}}{M_{\text{met}}} \doteq 3,99,$$

což je pro nás velice nevýhodný poměr. Abychom mohli používat methan či další uhlovodíky z atmosféry jako palivo a nést si s sebou kyslík jako okysličovadlo, pak bychom pro možnost spalení srovnatelného hmotnosti paliva museli nést zhruba čtyřnásobnou hmotnost kyslíku. Výhřevnost, resp. spalné teplo, sice byly o něco málo vyšší, ale museli bychom nést i tlakové nádoby na kyslík, které by byly těžší než standardní nádrže na letecký benzín. Spotřeba letadla by tak opět vzrostla. Neříkáme, že by bylo nemožné létat s tímto obráceným režimem, ale jistě by to bylo náročnější a záleželo by na dalších parametrech atmosféry.⁴⁶

Atmosféra by musela být složená buď z málo korozivních plynů,⁴⁷ nebo bychom museli letadlo upravit tak, aby v dané atmosféře rychle nekorodovalo. Zrovna v motorech, v nichž je vysoká teplota, by to mohla být konstrukční výzva. Museli bychom pokrývat všechny exponované povrchy dostatečně silnou protikorozní vrstvou, která by je izolovala od atmosféry. Na Zemi používáme za tímto účelem různé laky a mazání. Ostatně sám kyslík je korozivní plyn. Nebo bychom museli nějaké součástky zcela nahradit jinými, například z keramiky, která je ovšem křehčí.

Tíhové zrychlení

Uvažujeme planety, kde je odstředivá složka síly prakticky zanedbatelná vůči gravitační. U přirozeně vzniklé planety odstředivá síla nesmí převýšit gravitační, protože by odletoval materiál z jejího povrchu a planeta by byla jako celek nestabilní. Velká odstředivá síla by byla známkou rychlé rotace planety, která by způsobovala silné větry na jejím povrchu. Znamenalo by to nepraktičnosti i v tom, že by mohlo být někde výrazně snazší odstartovat než jinde a záleželo by na tom, kterým směrem letadlo vzlétá.

Tíhové zrychlení primárně určuje potřebný vztlak pro letadlo. Čím vyšší je tíhová síla, tím větší část tahu motoru musíme investovat do vztlaku. Motor musí být schopný mít tah vyšší než

$$F_{\text{min}} = F_g - F_{\text{vz}} = (m - \rho V) g,$$

aby se letadlo udrželo ve vzduchu. Jak vidíme, při vysoké hustotě atmosféry je vliv tíhové síly slabší, protože na letadlo působí současně vztlaková síla, která také závisí na tíhovém zrychlení.

Srovnajme víc planet, které by měly stejné chemické složení atmosféry, stejný poloměr a u povrchu stejnou hustotu vzduchu. Planeta s vyšší střední hustotou, a tedy vyšším povrchovým tíhovým zrychlením, bude mít větší gradient tlaku.

⁴⁵<https://cs.wikipedia.org/wiki/Methan>

⁴⁶ Pokud bychom měli nést jak kyslík, tak palivo, pak by byly nároky na skladování ještě vyšší. Zejména kdybychom si nejspíše snížili jeho účinnost přidáním místní atmosféry do směsi.

⁴⁷ Atmosféra Venuše by pro naše letadlo rozhodně nebyla žádná „hitovka“. Kyselina sírová či kyselina fosforečná nejsou zrovna inertní plyny.

Jinak řečeno, tlak vzduchu bude rychleji klesat s výškou. To se nám může hodit, pokud naše motory mají vyšší účinnost v řidším vzduchu, ale je krátkozraké považovat to pouze za výhodu. Současně se nám může stát, že nebudeme moci přestoupat nejvyšší hory na planetě, protože letadlo nebude mít potřebný dostup.⁴⁸ Tím se vracíme k prvnímu podnadpisu, kde jsme u hustoty vzduchu zmínili odporovou sílu, jejíž diskuzi jsme ještě nevyčerpali. Pro každou výšku totiž existuje minimální a maximální rychlost, kterou musí letadlo letět, aby nespadlo. Minimální rychlost letadla je dána nutností generovat dostatečný vztlak. Protože s výškou klesá hustota vzduchu (a odporová síla, případně vztlaková síla), ale neklesá hmotnost letadla, tak se minimální nutná rychlost zvyšuje. Maximální rychlost je dána zpravidla tím, že letadla nejsou konstruována na to, aby překonala Mach 1. Když se jí letadlo blíží, tak odpor prudce vrste. Na některých částech trupu či křídel pak dochází k překročení rychlosti zvuku dříve než na jiných a běžné subsonické letadlo se stává nestabilní.⁴⁹ S rostoucí výškou nad povrchem v naší atmosféře, kde se létá, teplota zpravidla klesá. Tím pádem se snižuje i rychlost zvuku ve vzduchu a klesá i maximální bezpečná rychlost letadla. Minimální a maximální rychlost se k sobě blíží, až se pro nějakou výšku protnou.⁵⁰ Ve výšce, kde to nastane, je jediná přípustná rychlost letadla a při pouhé malé odchylce od ní dojde prakticky jistě k ztrátě vztlaku a pádu.⁵¹ Ale nemusí to mít fatální následky. Sem tam se to může stát i u dopravních letadel. V zemské atmosféře je výhodou, že jakmile letadlo začne padat, tak se dostává do výšek, kde je širší rozpětí možných rychlostí, takže je možné jej stabilizovat. Piloti jsou trénováni na to, aby tento manévr zvládli a letadlo vyrovnali v nižší letové hladině.

Další nevýhodou rychlého klesání tlaku s výškou je, že by bylo možné používat pouze menší počet letových hladin pro zachování bezpečných rozestupů mezi letadly. To by byl logistický problém, který by vyvstnul v čase, kdy by letadla na planetě používala mnoho jejích obyvatel. Na Zemi jsme na to už narazili, ale vesmírné kolonizátory by to pravděpodobně nemuselo několik prvních let tolik trápit.

Teplota

Důležitá je jak teplota u povrchu planety, tak teplota atmosférického profilu. Pokud by se jednalo o atmosféru podobnou Zemi, tak bychom čekali pokles teploty s výškou nad povrchem planety v rámci většiny relevantních výšek pro létání. Ale i na Zemi je od 11 km do 20 km teplota obvykle konstantní,⁵² přičemž civilní proudová letadla stoupají až nad 11 km. Samozřejmě že různé vrstvy atmosféry mohou

⁴⁸Dostup je maximální výška, do které může letadlo vystoupat. Může jít o konstrukční hodnotu udávanou výrobcem. Reálný maximální dostup letadla pak závisí na jeho aktuální hmotnosti.

⁴⁹Limity mají i nadzvuková letadla, ale zde se věnujeme hlavně „mainstreamu“.

⁵⁰Výstižný anglický název pro tento jev je coffin corner, viz [https://en.wikipedia.org/wiki/Coffin_corner_\(aerodynamics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coffin_corner_(aerodynamics)).

⁵¹Pokud by parametry atmosféry všude závisely pouze na výšce, tak bychom se ani nemohli s letadlem dostat na či dokonce nad tuto výšku. Nicméně atmosféra není všude stejná, takže tato výška se místo od místa liší.

⁵²Pro výpočty v letectví se používají parametry Standardní atmosféry, viz např. https://cs.wikipedia.org/wiki/Standardní_atmosféra.

s přichozím slunečním zářením reagovat různě, podobně jako to dělá ozonová vrstva či ionosféra.

Vyšší teplota znamená nižší hustotu vzduchu za stejného tlaku. To znamená nižší vztlak, resp. vyšší potřebný tah motoru pro start a let.⁵³

Teplota T společně s velikostí a hustotou planety nám dává omezení na to, jaké plyny vůbec může planeta udržet ve své atmosféře. Platí, že úniková rychlost částice z povrchu⁵⁴ je

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}.$$

Střední rychlost molekuly plynu je

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}},$$

kde k je Boltzmannova konstanta, m hmotnost molekuly plynu, R molární plynová konstanta a M_m molární hmotnost molekuly. Vidíme, že čím hmotnější molekula, tím se při stejné teplotě pohybuje pomaleji a tím spíše nepřekoná únikovou rychlost. To je jeden z důvodů, proč na terestrických planetách není v atmosféře mnoho vodíku či helia.

Všechny částice v plynu však nemají pouze jedinou rychlost. Jejich rychlosti se řídí Maxwellovým-Boltzmannovým rozdělením.⁵⁵ Distribuční funkce je

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{M_m}{RT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{M_m v^2}{2RT}}.$$

Ta nám říká, že pravděpodobnost, že rychlost částice spadá do intervalu $\langle v, v + dv \rangle$, je rovna $f(v) dv$. Alespoň 0,1 % částic z celkového počtu bude mít rychlost trojnásobnou či vyšší vzhledem ke střední rychlosti. Nestačí, aby pro daný plyn byla úniková rychlost vyšší než jeho střední rychlost. Je potřeba, aby byla aspoň tak několikrát vyšší,⁵⁶ aby nedocházelo k úniku tohoto plynu z atmosféry.

Další faktor, který limituje možné částice v atmosféře, je sluneční vítr. Ten plyny kvůli srážkám odvádá pryč, zejména pokud není atmosféra chráněna magnetickým polem.⁵⁷ Toto má největší vliv na částice, které mají podobnou hmotnost jako částice slunečního větru, tedy jádra vodíku a helia.

⁵³Například proto dříve některá letadla mohla z oblastí s vysokou teplotou startovat naplněná jenom na polovinu kapacity cestujících a nákladu.

⁵⁴Mohli bychom ji vypočítat z toho, jakou kinetickou energii musí částice mít, aby unikla až do nekonečna.

⁵⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution#Typical_speeds

⁵⁶Přesněji řečeno, čím vyšší bude tento poměr, tím lépe a atmosféra nám vydrží na planetě déle.

⁵⁷Sice to není úplně k letadlům, ale z tohoto důvodu nevznikli velcí plynoví obři v blízkosti Slunce. To totiž začalo s termojadernými reakcemi ve svém jádru ještě před zformováním planet. Sluneční vítr tedy ještě snadněji odváá plyn předtím, než se ochladil natolik, aby se mohl udržet na nějaké planetě.

Pokud porovnáme víc podobných planet,⁵⁸ které jsou v různé vzdálenosti od svého slunce, pak vyšší teplota na povrchu by měla znamenat vyšší teplotu celého vzduchového sloupce. Pokud bychom zajišťovali rozestupy letovými hladinami, tedy letadla by létala ve stejné tlakové výšce, tak by byly vzdálenosti mezi letovými hladinami vyšší než na chladnější planetě. Pokud bychom chtěli nastoupat do stejné tlakové hladiny, pak bychom museli stoupat déle. Na druhou stranu by se mohly na této planetě nastavit bezpečné rozestupy na menší rozdíly tlaků a byl by možný provoz ve více letových hladinách.

Počasí

Rozhodně nejde létat v nestabilní atmosféře, kde by probíhaly neustálé bouřky nad celým povrchem planety. Minimálně ne se současnými letadly, pro které jsou tyto podmínky velmi nevhodné. Pokud je nad letištěm bouřka, tak letadlo obvykle divertuje⁵⁹ na jiné bezpečné letiště. Problematické jsou jak blesky, tak vítr, zejména jeho poryvy a rychlé změny.

Proberme trochu více vliv větru. Při startu i přistání letadla je potřeba, aby byl vítr buď co nejmenší, nebo aby vál směrem proti letadlu. Protivítr totiž zvětšuje vztlak letadla, což se hodí jak při startu, kdy se letadlo dostane do letuschopného režimu při nižší rychlosti vůči zemi, tak i při přistání. Rozumně silný protivítr tedy letadlu pomáhá. Nebezpečnou situací může být ztráta vztlaku způsobená větrem do zad letadla. Proto se na letišti střídá směr dráhy v užívání podle aktuální rychlosti a směru větru. Při bočním větru musí letadlo tento vítr kompenzovat natočením, což jde pouze pro nízké rychlosti. Velké rychlosti nelze bezpečně vyrovnat. Pokud má letiště pouze jednu dráhu či pouze paralelní dráhy a je silný boční vítr, pak letadlo nesmí vzlétnout ani přistát. Například na pražském letišti v Ruzyni⁶⁰ se dráha změní, pokud je zadní složka větru vyšší než $9 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ nebo boční větší než $28 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Obě hodnoty jsou včetně nárazů,⁶¹ které jsou pro pilota ještě nepřijemnější než samotný stálý vítr.

Srážky či mraky a mlha ovlivňují účinnost proudových motorů. Jsou totiž natahovány do motorů, kde se odpařují. Tím také zabírají určité místo ve spalovací části motoru a mohou vést k nedokonalému spalování směsi. Zpravidla bychom tedy čekali, že dojde ke snížení účinnosti motoru. Hypoteticky by mohlo odpaření menšího množství kapaliny vést k zvýšení tlaku, a tak i zvýšení tahu motoru. Pravděpodobnější ale je pokles výkonu. Některé proudové motory umí vzduch vstupující do motoru filtrovat tak, že do spalovací komory pouští jenom plynné částice a kapalné či pevné projdou jinou cestou. Tím se minimalizuje jejich vliv na výkon motoru. Jednoznačně problematické je, pokud je natahovaného materiálu velké množství. V tom případě může nastat tzv. „flameout“, tedy vyhasnutí motoru, čímž přijde-

⁵⁸Podobný poloměr, hmotnost, složení atmosféry a její hmotnost.

⁵⁹Změni cílové letiště.

⁶⁰Dle článku 2.21.2.4 v AIP Czech Republic na stranách AD 2-LKPR-24 až AD 2-LKPR-25, které naleznete v dokumentu https://aim.rlp.cz/ais_data/aip/data/valid/a2-pr-txt2.pdf.

⁶¹Nahodilé změny rychlosti větru. Obvykle mají nějakou maximální hodnotu, o kterou se mění, o čemž jsou informována přilétající letadla. Varování je to pouze přibližné a náraz může nastat kdykoliv. Pokud to přijde přímo v okamžiku přistání, tak si toho všimnete.

me o veškerý vztlak. Na Zemi se to stane zřídka, protože se letadla oblačnostem vyhýbají a malé množství jim neuškodí.

Další detaily

Povrch planety musí být dostatečně rovný, aby se na něm dalo vzlétnout a přistát s proudovým letadlem. Sice je možné povrch upravit, ale pokud by byla celá planeta hornatá, pak by stavba letišť mohla být značně komplikovaným problémem. Zejména, když by parametry atmosféry prodlužovaly startovací a přistávací dráhy a bylo by nutné vytvořit konstrukci skrz/přes několik hor.

Závěr

Určitě jsme nezmínili všechny možné vlivy, které může mít jiná situace na cizí planetě na letectví. Spíše než optimistickou předpověď, jak vytvořit lepší planetu, šlo o výčet toho, co se může pokazit. To je ale takový základ. Jistě byste nechtěli letět v letadle, které se v průběhu letu rozpustí. Letadla by se ovšem mohla přizpůsobit a upravit svůj tvar, materiály nebo i technologii motorů podle místních podmínek.

Úloha V.1 ... náboj Země

Jaký celkový náboj by musela mít Země, aby elektrony blízko jejího povrchu odletávaly pryč? Jak by se tento náboj lišil pro protony?

Elektron blízko povrchu Země je přitahován gravitační silou

$$F_g = G \frac{m_e M_\oplus}{R_\oplus^2},$$

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ hmotnost elektronu, $M_\oplus = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ hmotnost Země a $R_\oplus = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ poloměr Země. Odstředivou sílu nemusíme uvažovat, i když Země rotuje, protože její vliv je menší než 1 % gravitační síly.

Abyste částice začala stoupat, pak je potřeba, aby elektrická síla (Coulombova) byla vyšší než gravitační, tedy

$$\begin{aligned} F_e &\geq F_g, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_e Q_\oplus}{R_\oplus^2} &\geq G \frac{m_e M_\oplus}{R_\oplus^2}, \\ Q_\oplus &\leq 4\pi\epsilon G \frac{m_e M_\oplus}{-e} \doteq -2,5 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \end{aligned}$$

kde $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ je permitivita prostředí, která je ve vzduchu velice blízka permitivitě vakua, $q_e = -e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ náboj elektronu (jeden záporný elementární náboj) a Q_\oplus je hledaný náboj Země. Protože jsme dělili záporným q_e , znamená to v nerovnici se otočilo. Pro elektron nám vyšlo, že pokud by Země měla náboj $-2,5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, pak by se na ní elektrony neudržely a „utíkal“ by nám do vesmíru. Jde o minimální náboj, co se absolutní hodnoty týče. Pokud bude

ještě větší (absolutně) záporný náboj, tak budou elektrony ulétávat ještě snadněji (rychleji).

Podívejme se na variantu úlohy pro protony. Ve výsledku stačí nahradit hmotnost elektronu hmotností protonu $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, náboj elektronu za náboj protonu $q_p = -q_e = +e$ a opět otočit nerovnost. Dostáváme výsledek

$$Q_{\oplus} \geq 4\pi\epsilon_0 G \frac{m_p M_{\oplus}}{e} \doteq 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$$

Náboj Země by musel být zhruba 1 800krát větší a opačného znaménka, aby od ní odlétávaly protony, pokud situaci srovnáme s elektrony. Další zajímavé porovnání by mohlo být s autobaterií. Typická autobaterie má kapacitu řádově 70 Ah, což při plném nabití odpovídá 250 000 C. Nejde sice o dokonalou analogii a není to „odhalený náboj“, jako by to bylo u Země, ale jde spíše o potenciál toho, kolik náboje nám umožní baterie díky chemickým reakcím přenést elektrickým obvodem.

Vidíme, že Země musí být jako celek relativně dobře neutrální. I když k tomu bychom mohli dojít logickou úvahou. Pokud by totiž celkový náboj Země stačil na to, aby nějaký typ částic odlétával, tak by přicházela o náboj tohoto znaménka odlétáním těchto částí, až by se její celkový náboj opět vrátil přibližně do neutrální stavu.

Úloha V.2 . . . retardovaný Jupiter

Siderická perioda Jupiteru činí přibližně 11,9 roku, rychlost světla je $3 \cdot 10^8$ m·s⁻¹, vzájemnou vzdálenost Země a Slunce předpokládejte rovnu $150 \cdot 10^9$ m. Pomocí těchto veličin odhadněte, jak dlouho poletí světlo z Jupiteru na Zem, jestliže se Jupiter nachází na místě, na které se z opozice dostane za jednu čtvrtinu synodické periody.

Při opozici se nacházejí Slunce, Země a Jupiter na jedné přímkě a po čtvrtině synodické periody budou tvořit vrcholy pravoúhlého trojúhelníku s přeponou Země–Jupiter. Vzdálenost Jupiteru od Slunce je podle třetího Keplerova zákona

$$a_J = a_Z \left(\frac{T_J}{T_Z} \right)^{\frac{2}{3}},$$

kde T jsou periody oběhu planet. Vzdálenost Jupiteru a Země pak spočítáme podle Pythagorovy věty jako

$$l = \sqrt{a_J^2 + a_Z^2}.$$

Světlo tuto vzdálenost urazí za čas

$$t = \frac{l}{c}$$

a po dosazení dostáváme

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{a_Z^2 \left(\frac{T_J}{T_Z} \right)^{\frac{4}{3}} + a_Z^2} = \frac{a_Z}{c} \sqrt{\left(\frac{T_J}{T_Z} \right)^{\frac{4}{3}} + 1}.$$

Při počítání s hodnotami ze zadání vychází číselně $t \doteq 44$ min.

Úloha V.3 . . . nedobrovolné breathariánství

Lukáš si chtěl uvařit večeři. Postavil hrnec na plotnu, ale zapomněl do něj dát vodu (nebo cokoli jiného). Teplota hrnce a vzduchu uvnitř něj se ustálila na 100°C (neptejte se, jak se to bez vody podařilo). Lukáš si záhy svoji chybu uvědomil a hrnec z plotny sundal, po vychladnutí na pokojovou teplotu z něj ale nedokázal sejmut poklici o ploše S a hmotnosti m . Spočítejte, jakou silou poklice na hrnci držela, pokud ji tam Lukáš dal

1. těsně před sundáním z plotny,
2. před začátkem přípravy večeře.

Předpokládejte, že vzduch se chová jako ideální plyn.

Poklice položená před koncem varu

Poklice drží díky rozdílu tlaků vně a uvnitř hrnce. Těsně před položením poklice má vzduch v hrnci atmosférický tlak $p_1 = p_a$ a teplotu $T_1 = 100^\circ\text{C}$. Objem ani počet částic se při chladnutí nemění, jde o izochorický děj. Po vychladnutí na pokojovou teplotu T_2 má tlak

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Poklice tedy drží silou

$$F = S(p_a - p_2) = Sp_a \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Poklice položená před začátkem varu

V tomto případě bude tlak před začátkem chladnutí jiný, neboť poklice svojí vahou v hrnci udrží přetlak pouze

$$p_1 = p_a + \frac{mg}{S}.$$

Vzduch pak opět chladne izochorickým dějem do výsledného tlaku

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = \left(p_a + \frac{mg}{S}\right) \frac{T_2}{T_1}.$$

Poklice nyní bude držet silou

$$F = S(p_a - p_2) = Sp_a \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) - mg \frac{T_2}{T_1}.$$

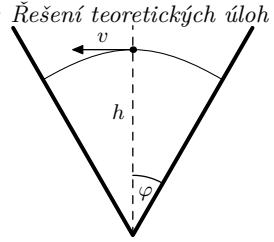
Tento vztah ale platí pouze za předpokladu, že přetlak, který ohřátím vzduchu uvnitř hrnce vznikne, bude větší než hodnota, kterou udrží poklice. Potom část vzduchu unikne a tlak se ustálí na hodnotě, kterou jsme odvodili výše. Tím dostáváme podmínku

$$m \leq \frac{Sp_a}{g} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right).$$

Pokud nebude splněna, poklice se vůbec nepřilepí.

Úloha V.4 . . . perioda velkých kmitů

Uvažujme dvě poloroviny, které svírají úhel $2\varphi < \pi$. Umístíme je tak, aby jejich společná přímka byla vodorovná a jejich rovina symetrie byla svislá, takže vytvoří jakési údolí. Následně vezmeme hmotný bod a z výšky h nad společnou přímkou jej hodíme rychlostí v ve vodorovném směru tak, aby začal konat periodický pohyb jako na obrázku. Jak velkou rychlostí ho musíme hodit? Předpokládejte dokonale pružné odrazy od polovin.



Budeme hledat symetrické řešení – čiže hmotný bod bude behat po jedné parabole. Jej vrchol je zřejmě na ose, čiže rychlost, kterou ho máme hodit bude mít nulovou složku v směru y . Zároveň bude třeba, aby $v \equiv v_x = \text{konst}$, čiže náš hmotný bod musí na polovinu dopadnout vždy kolmo. Splňme teda tieto podmienky.

Súradnice hmotného bodu v čase t od hodenia budú

$$\begin{aligned}x &= vt, \\y &= h - \frac{1}{2}gt^2,\end{aligned}$$

kde sme počiatok umiestnili do spoločnej priamky rovín. V tejto sústave budú súradnice poloviny ležiacej v prvom kvadrante spĺňať

$$y \operatorname{tg} \varphi = x.$$

Dosadíme a dostávame kvadratickú rovnicu pre čas dopadu

$$0 = \frac{1}{2}gt_d^2 \operatorname{tg} \varphi + vt_d - h \operatorname{tg} \varphi,$$

ktorej kladný koreň je

$$t_d = \frac{v}{g \operatorname{tg} \varphi} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2 \varphi}{v^2}} - 1 \right).$$

No a ako sme už spomínali, tak v tomto čase musí byť vektor rýchlosti kolmý na polovinu. Symbolicky

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|v_y(t_d)|}{v}.$$

Rýchlosť v smere y bude $v_y(t) = -gt$. Podosádzame

$$v \operatorname{tg} \varphi = gt_d = \frac{v}{\operatorname{tg} \varphi} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2 \varphi}{v^2}} - 1 \right)$$

a vyjadríme

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Čo je zjavne rýchlosť, ktorou musíme náš hmotný bod hodit (a teda odpoveď na otázku zo zadania).

Ak chceme spočítať periódu, tak to stačí dosadiť späť do vzťahu pre t_d a využiť fakt, že je to presne štvrtina periódy

$$T = 4t_d = \frac{4v}{g \operatorname{tg} \varphi} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2 \varphi}{v^2}} - 1 \right) = 4\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Vidíme, že pre $\varphi \rightarrow 0$ ide $T \rightarrow 0$, čo celkom dáva zmysel. Zároveň pre $\varphi \rightarrow \pi/2$ by sme čakali, že aj $v \rightarrow 0$ a pohyb bude čím ďalej, tým viac pripomínať voľný pád, odraz späť, voľný pád na opačnú polovinu a odraz späť, čiže limita $T \rightarrow 4\sqrt{2h/g}$ presne sedí.

Úloha V.5 . . . rheonomní katapult

Mějme tenkou obdélíkovou desku, která se otáčí kolem své horizontálně orientované hrany konstantní úhlovou rychlostí. V okamžiku, kdy se deska nachází ve vodorovné poloze a otáčí se směrem nahoru, na ni umístíme malý kvádřík tak, aby se vzhledem k ní zpočátku nepohyboval. Jak se bude kvádřík po desce pohybovat, jestliže je tření mezi oběma tělesy nulové? Kam musíme kvádřík na začátku umístit, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky desky? Diskutujte dále všechny potřebné předpoklady, které pro to musí být splněny.

Bonus Jaký výkon dodává deska kvádříku a jakou celkovou práci na něm vykoná?

Odvození pohybových rovnic

Jedná se o mechanickou úlohu s vazbou, neboť malý kvádřík můžeme aproximovat hmotným bodem vázaného na desku do okamžiku, kdy z ní vyletí. Deska působí na kvádřík jako vazba závislá na čase, tj. rheonomní vazba (odtud název úlohy). Vazba nezávislá na čase se nazývá skleronomní. Pohyb kvádříku nalezneme vyřešením pohybových rovnic. Nejdříve však potřebujeme zvolit souřadnice. Problém je efektivně dvourozměrný, protože se kvádřík bude pohybovat po desce ve směru kolmém k ose otáčení a také se bude otáčet společně s deskou. Stačí nám proto zvolit dvě kartézské souřadnice x, y s počátkem na ose otáčení. Dále si zavedeme druhou sadu souřadnic, a to polární souřadnice r, φ . Souřadnice r měří vzdálenost od osy otáčení a úhel φ měří orientovaný úhel sevřený spojnicí počátku a daného bodu s kladnou poloosou x , jak je vidět na obrázku 12. Transformační vztahy z polárních do kartézských souřadnic jsou

$$x = r \cos \varphi, \quad (43)$$

$$y = r \sin \varphi. \quad (44)$$

Pohyb kvádříku v závislosti na čase t je pak dán funkcemi $x = x(t)$ a $y = y(t)$, resp. funkcemi $r = r(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$. Nachází-li se kvádřík na desce, je souřadnice φ kvádříku totožná s úhlem natočení desky, pro který ze zadání platí $\varphi(t) = \omega t$, kde $\omega > 0$ je konstantní velikost úhlové rychlosti. Kartézské souřadnice x a y

generují vektorová pole \mathbf{e}_x a \mathbf{e}_y . To jsou tečné vektory k souřadnicovým čarám $y = \text{konst}$ a $x = \text{konst}$ mající jednotkovou velikost. Vektor rychlosti \mathbf{v} kvádříku pak je

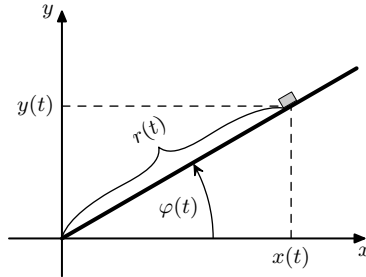
$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{e}_x + \dot{y}(t) \mathbf{e}_y,$$

kde tečka značí (totální) časovou derivaci. Časovou závislost zdůrazněnou v kulatých závorkách budeme často pro přehlednost vynechávat. Časovou derivací vektoru rychlosti \mathbf{v} dostaneme zrychlení kvádříku

$$\mathbf{a} = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y. \quad (45)$$

Poznamenejme, že jsme využili faktu, že se vektor \mathbf{e}_x (jeho velikost i směr) podél trajektorie kvádříku nemění (podobně i vektor \mathbf{e}_y), neboli

$$\dot{\mathbf{e}}_x \equiv \frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = 0.$$



Obr. 12: Kartézské a polární souřadnice.

Nyní využijeme transformační vztahy (43) a (44), do kterých dosadíme konkrétní souřadnice kvádříku a rovnice (totálně) zderivujeme podle času t , čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Další časovou derivací získáme

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Tyto rovnice dosadíme do vztahu (45), čímž dostaneme zrychlení ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \mathbf{e}_x + \\ &+ (\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (46)$$

Celková síla \mathbf{F} působící na kvádřík je dána součtem reakce \mathbf{N} desky na kvádřík a tíhové síly $m\mathbf{g}$, neboli

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g} = -(N \sin \varphi) \mathbf{e}_x + (N \cos \varphi - mg) \mathbf{e}_y, \quad (47)$$

kde N je (orientovaná) velikost reakce \mathbf{N} , m je hmotnost a g je velikost tíhového zrychlení. Druhý Newtonův pohybový zákon lze matematicky vyjádřit ve tvaru $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Z rovnic (46) a (47) potom dostáváme pohybové rovnice

$$-N \sin \varphi = m (\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \quad (48)$$

$$N \cos \varphi - mg = m (\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi). \quad (49)$$

Jedná se o soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic se třemi neznámými funkcemi $r(t)$, $\varphi(t)$ a $N(t)$. Nezapomeňme však, že ještě máme zadán pohyb desky (a tedy i jednu souřadnici kvádříku) $\varphi(t) = \omega t$. Ještě před tím, než dosadíme $\varphi(t) = \omega t$, upravíme soustavu rovnic (48) a (49) do jednodušší podoby. Rovnici (48) vynásobíme $(\sin \varphi) / m$ a rovnici (49) vynásobíme $(\cos \varphi) / m$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} -\frac{N}{m} \sin^2 \varphi &= \ddot{r} \sin \varphi \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \varphi - r\ddot{\varphi} \sin^2 \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ \frac{N}{m} \cos^2 \varphi - g \cos \varphi &= \ddot{r} \sin \varphi \cos \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos^2 \varphi + r\ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Nyní odečteme první rovnici od druhé

$$\frac{N}{m} - g \cos \varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \quad (50)$$

Tuto rovnici vynásobíme $\sin \varphi$ a sečteme ji s rovnicí (48) vydělenou m . Výsledek této operace ještě vydělíme $\cos \varphi$ a dostaneme

$$-g \sin \varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2. \quad (51)$$

Soustavu rovnic (48) a (49) jsme tak zjednodušili na soustavu rovnic (50) a (51). K nalezení pohybových rovnic v takto jednoduchém tvaru bylo potřeba s rovnicemi manipulovat způsobem, který nemusí být na první pohled zřejmý. Ukážeme si proto alternativní postup jejich odvození. Na místo vektorové báze $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ budeme pracovat s bází $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$. Bude to sice vyžadovat jisté matematické operace navíc, za to však dostaneme pohybové rovnice přímo v jednoduchém tvaru.

Alternativní odvození pohybových rovnic

Poloha kvádříku je tedy dána funkcemi $r = r(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$. Vektor rychlosti je proto roven

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv \dot{r} \partial_r + \dot{\varphi} \partial_\varphi, \quad (52)$$

kde $\frac{\partial}{\partial r} \equiv \partial_r$, resp. $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv \partial_\varphi$ jsou vektory tečné k souřadnicovým čarám $\varphi = \text{konst}$, resp. $r = \text{konst}$. Vektory ∂_r jsou normalizované na jednotku ($\partial_r^2 \equiv \partial_r \cdot \partial_r = 1$)

a proto jsou v každém bodě shodné s jednotkovým vektorem \mathbf{e}_r mířícím v radiálním směru, tj.

$$\partial_r = \mathbf{e}_r .$$

Vektory ∂_φ mířící v tangenciálním směru však už nejsou normalizované na jednotku, neboť $\partial_\varphi^2 \equiv \partial_\varphi \cdot \partial_\varphi = r^2$. Místo nich proto budeme používat normalizované vektory \mathbf{e}_φ , pro které v každém bodě platí

$$\partial_\varphi = r\mathbf{e}_\varphi .$$

Rychlost \mathbf{v} z rovnice (52) přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi , \quad (53)$$

ve kterém rozeznáváme člen odpovídající radiální rychlosti a člen odpovídající tangenciální rychlosti. Zrychlení kvádříku \mathbf{a} získáme totální časovou derivací vektoru rychlosti \mathbf{v} . Teď ovšem musíme být obezřetní. Bázové vektory na pravé straně rovnice (53) jsou závislé na čase t , protože se vyčísľují v bodech, které odpovídají poloze kvádříku v daném čase. Totální časovou derivací rovnice (53) dostaneme

$$\mathbf{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} . \quad (54)$$

Časovou změnu bázových vektorů podél trajektorie vyjádříme pomocí změny bázových vektorů v souřadnicových směrech a pomocí časové změny souřadnic polohy kvádříku, neboli aplikujeme pravidlo o derivaci složené funkce na vektory

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial t} + \frac{dr}{dt}\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\varphi} , \quad (55)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial t} + \frac{dr}{dt}\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi} . \quad (56)$$

Parciální derivace obou bázových vektorů podle času jsou nulové, neboť v pevné poloze nezávisí bázové vektory na čase. Začneme se členem $\partial\mathbf{e}_r/\partial\varphi$, neboli se změnou vektoru \mathbf{e}_r podél souřadnice φ . K nalezení výsledku nám pomůže obrázek 13. V bodě o souřadnicích (r, φ) máme vektor $\mathbf{e}_r(r, \varphi)$ a v bodě pootočeném o malý úhel $\delta\varphi$ máme vektor $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)$. Vzhledem k tomu, že směřujeme k derivaci, chceme od sebe tyto vektory odečíst. Umíme však odečítat pouze vektory v jednom bodě, a proto vektor $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)$ paralelně přeneseme z bodu $(r, \varphi + \delta\varphi)$ do bodu (r, φ) a získáme tak nový vektor $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)'$. V bodě (r, φ) už je dobře definovaný rozdíl $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)' - \mathbf{e}_r(r, \varphi)$. Jeho výsledkem je vektor, jehož velikost je $2\sin(\delta\varphi/2)$. Budeme-li úhel $\delta\varphi$ limitně zmenšovat k nule, dostaneme vektor mířící ve směru $\mathbf{e}_\varphi(r, \varphi)$. Zároveň pro malé úhly $\delta\varphi$ platí přiblížení $2\sin(\delta\varphi/2) \approx \delta\varphi$, proto celkově dostáváme

$$\frac{\partial\mathbf{e}_r(r, \varphi)}{\partial\varphi} \equiv \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)' - \mathbf{e}_r(r, \varphi)}{\delta\varphi} = \mathbf{e}_\varphi(r, \varphi) .$$

Zjednodušeně zapsáno jsme získali

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi.$$

Se členem $\partial \mathbf{e}_\varphi / \partial \varphi$ budeme postupovat opět s pomocí obrázku 13. Postup je analogický, a proto ho ponecháme bez slovního komentáře. Výsledkem je vztah

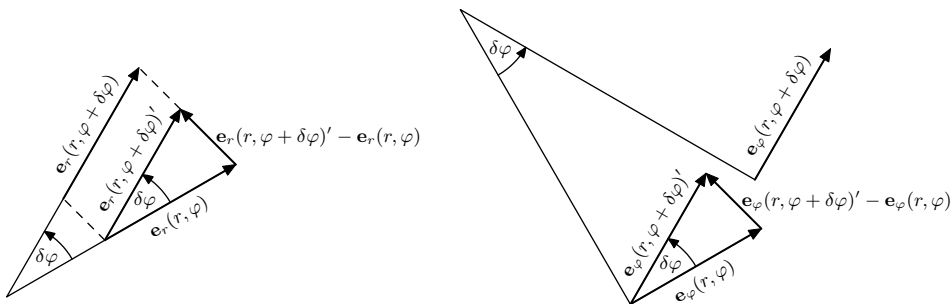
$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r.$$

Vybaveni zkušenostmi z příkladů výše již snadno nahlédneme, že následující partiální derivace jsou nulové

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r}.$$

Pro totální časové derivace bázevých vektorů (rovnice (55) a (56)) tak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi, \\ \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} &= -\frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$



Obr. 13: Odvození partiálních derivací bázevých vektorů v polárních souřadnicích.

Na základě předchozích výpočtů se nám rovnice (54) pro zrychlení \mathbf{a} zjednoduší na

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi.$$

Jedná se o obecný tvar zrychlení při pohybu v rovině vyjádřený v polárních souřadnicích. Jako cvičení se můžete sami pokusit interpretovat každý jednotlivý člen na pravé straně. Výslednou sílu \mathbf{F} působící na kvádrík lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F} = -(mg \sin \varphi) \mathbf{e}_r + (N - mg \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi.$$

Z druhého Newtonova pohybového zákona pak dostáváme soustavu pohybových rovnic přímo v jednoduché formě – rovnice (50) a (51).

Řešení pohybových rovnic

Pokračujeme v hledání pohybu kvádříku. Ze zadání známe pohyb desky a tedy souřadnici kvádříku $\varphi = \omega t$. Dosazením do pohybových rovnic (50) a (51) dostaneme

$$\frac{N}{m} - g \cos \omega t = 2\omega \dot{r}, \quad (57)$$

$$-g \sin \omega t = \ddot{r} - \omega^2 r. \quad (58)$$

Rovnice (58) je sama o sobě nehomogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu pro funkci $r(t)$. Její řešení se skládá z homogenního a partikulárního řešení. Homogenní řešení hledáme ve tvaru

$$r_{\text{H}}(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t},$$

kde A, B jsou konstanty. Pomocí převodních vztahů mezi exponenciálou a hyperbolickými funkcemi jej můžeme přepsat do (pro následující výpočty) výhodnější podoby

$$r_{\text{H}}(t) = a \sinh \omega t + b \cosh \omega t,$$

kde a, b jsou konstanty. Partikulárním řešením je například

$$r_{\text{P}}(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

Tím jsme našli obecné řešení

$$r(t) = r_{\text{H}}(t) + r_{\text{P}}(t) = a \sinh \omega t + b \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t, \quad (59)$$

odkud pro první časovou derivaci získáme

$$\frac{\dot{r}(t)}{\omega} = a \cosh \omega t + b \sinh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \cos \omega t. \quad (60)$$

Označme počáteční vzdálenost od osy otáčení $r_0 = r(0)$. Ze zadání vyplývá, že kvádřík se po desce ze začátku nepohybuje, neboli $\dot{r}(0) = 0$. Dosazením počátečních podmínek do rovnic (59) a (60) dostaneme

$$r_0 = b, \quad 0 = a + \frac{g}{2\omega^2}. \quad (61)$$

Pohyb po desce je tedy dán rovnicí

$$r(t) = r_0 \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} (\sin \omega t - \sinh \omega t). \quad (62)$$

Podmínka pádu kvádříku z desky

Teď nás bude zajímat kam kvádřík umístít, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky, kdy $\varphi = \pi/2$. To může nastat dvěma způsoby. Na kvádřík působí deska pouze tlakovou silou ($N > 0$), a proto kvádřík může odletět od desky v okamžiku, kdy tato síla v čase spojitě vymizí ($N = 0$). Jednoduše deska nebude dost rychlá na to, aby dohonila kvádřík. Druhou možností je, že kvádřík právě po čtvrtině otáčky dojde na konec desky.

Předpokládáme-li, že je deska dostatečně dlouhá, vyletí kvádřík z desky v okamžiku, kdy na něj přestane silově působit, tj. když bude platit $N = 0$. Navíc, aby kvádřík skutečně odletěl, požadujeme, aby čistě matematicky v tomto bodě přecházelo N do záporných hodnot. Fyzikálně korektněji požadujeme, aby mělo N v daném okamžiku zápornou časovou derivaci zleva. Dosazením nalezeného řešení (62) do první pohybové rovnice (57) dostaneme

$$\frac{N(t)}{m} = 2r_0\omega^2 \sinh \omega t - g \cosh \omega t + 2g \cos \omega t. \quad (63)$$

Z požadavku, aby kvádřík vyletěl po čtvrtině otáčky, máme podmínku

$$0 = 2r_0\omega^2 \sinh \frac{\pi}{2} - g \cosh \frac{\pi}{2} \Rightarrow r_0 = \frac{g}{2\omega^2} \coth \frac{\pi}{2}. \quad (64)$$

Dostáváme tak výslednou závislost vzdálenosti kvádříku od osy otáčení

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{g}{2\omega^2} \left(\coth \frac{\pi}{2} \cosh \omega t - \sinh \omega t + \sin \omega t \right), \\ \dot{r}(t) &= \frac{g}{2\omega} \left(\coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + \cos \omega t \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Všimněme si, že $\dot{r}(\varphi = \pi/2) = 0$, což znamená, že kvádřík bude vystřelen ve vodorovném směru. Stále však nemáme zaručeno, že nám v průběhu čtvrtotáčky nepřekmitne N do záporných hodnot. Pro velikost reakce \mathbf{N} desky na kvádřík podle rovnice (63) platí

$$\frac{N(t)}{mg} = \coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + 2 \cos \omega t. \quad (66)$$

Ověříme si, že na začátku ($t = 0$) je $N(0) = mg > 0$. Pro $\omega t \in (0, \pi/2)$ se o tom přesvědčíme s pomocí grafu 14. Vidíme, že funkce je pro $\omega t \in (0, \pi/2)$ kladná a že v bodě $\omega t = \pi/2$ má zápornou derivaci, což lze ukázat i výpočtem. Platí

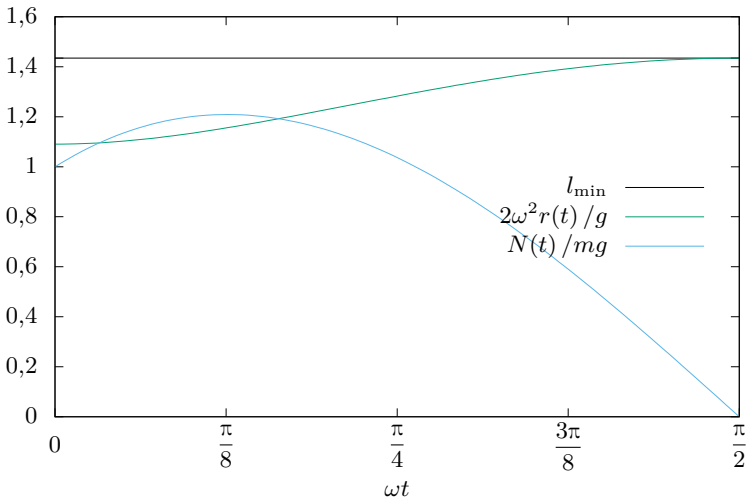
$$\begin{aligned} \frac{1}{mg} \frac{dN}{d(\omega t)} \left(\frac{\pi}{2} \right) &= \coth \frac{\pi}{2} \cosh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} \left(\cosh^2 \frac{\pi}{2} - \sinh^2 \frac{\pi}{2} \right) - 2 = \\ &= \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} - 2 < 0, \end{aligned}$$

takže kvádřík od desky skutečně odletí.

Další nutná podmínka proto, aby kvádřík nevyletěl dříve, je dostatečná délka desky v radiálním směru. Její minimální délka l_{\min} musí být rovna vzdálenosti, do jaké se kvádřík po čtvrtině otáčky dostane. Dosadíme do vztahu (65) a vyjde nám

$$l_{\min} = r\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{g}{2\omega^2} \left(\coth \frac{\pi}{2} \cosh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{g}{2\omega^2} \left(\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} + 1 \right). \quad (67)$$

Délka desky l_{\min} je skutečně postačující, neboť, jak je patrné z grafu 14, v průběhu celé čtvrtotáčky je $0 < r(t) \leq l_{\min}$. Poznamenejme ještě, že kdyby byla deska příliš dlouhá, mohla by do kvádříku po vystřelení znovu narazit. Zařízení by pak úkol katapultu příliš nespĺňovalo.



Obr. 14: Funkce $N(t)$ a $r(t)$ během první čtvrtotáčky desky.

Podmínka druhého způsobu pádu kvádříku z desky

Podívejme se na situaci, kdy kvádřík dojede po čtvrtině otáčky na konec desky, jejíž délku v radiálním směru označíme l . Dostáváme podmínku

$$r\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = l = r_0 \cosh \frac{\pi}{2} + \frac{g}{2\omega^2} \left(1 - \sinh \frac{\pi}{2} \right).$$

Odtud máme pro počáteční vzdálenost vztah

$$r_0 = \frac{l + \frac{g}{2\omega^2} \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\cosh \frac{\pi}{2}} > 0. \quad (68)$$

Pro úplnost uvedeme plnou závislost radiální vzdálenosti na čase

$$r(t) = \frac{l + \frac{g}{2\omega^2} \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\cosh \frac{\pi}{2}} \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} (\sin \omega t - \sinh \omega t). \quad (69)$$

Ovšem řešení (69) není vždy smysluplné. Vzhledem ke konečné délce desky musí po celou čtvrtotáčku platit $r(t) \leq l$. Pro $\varphi = \omega t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ přepíšeme tuto nerovnost do tvaru

$$\left(1 - \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}} \right) \tilde{l} \geq \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}} + (\sin \varphi - \sinh \varphi), \quad (70)$$

kde jsme zavedli bezrozměrný parametr $\tilde{l} = 2l\omega^2/g$. Hledáme tedy nejmenší hodnotu parametru \tilde{l} , pro který je nerovnost splněna pro všechna $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, což není zrovna jednoduché. Začneme proto nutnou, avšak ne nutně postačující, podmínkou $\dot{r}(\varphi = \pi/2) \geq 0$. Zderivováním (69) a dosazením $\varphi = \pi/2$ dostaneme

$$\left(l + \frac{g}{2\omega^2} \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right) \frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\cosh \frac{\pi}{2}} - \frac{g}{2\omega^2} \cosh \frac{\pi}{2} \geq 0.$$

Tuto nerovnost převedeme ekvivalentními úpravami na podmínku

$$\tilde{l} \geq 1 + \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}}. \quad (71)$$

Zkusme nyní zjistit, zda je nutná podmínka (71) zároveň postačující, tj. zda \tilde{l} splňující (71) splňuje také $r(t) \leq l$. Ptáme se tedy, zda je splněna nerovnost

$$\left(1 - \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} \right) \geq \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}} - (\sinh \varphi - \sin \varphi).$$

Roznásobením a dalšími úpravami dostaneme

$$1 + \sinh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} \sin \varphi \geq \cosh \frac{\pi}{2} \cosh \varphi - \sinh \frac{\pi}{2} \sinh \varphi.$$

Použitím součtového vzorce $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ a přičtením $\sinh \frac{\pi}{2} \sin \varphi$ převedeme nerovnost na tvar

$$1 + \sinh \frac{\pi}{2} \geq \cosh \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \sinh \frac{\pi}{2} \sin \varphi. \quad (72)$$

Definujme funkci $P(\varphi)$ jako levou stranu této nerovnosti. Její maximum na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ se nachází buď na krajích tohoto intervalu, nebo ve stacionárních bodech $P' = 0$. Derivací dostáváme podmínku pro stacionární body

$$P' \equiv \frac{dP}{d\varphi} = -\sinh \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \sinh \frac{\pi}{2} \cos \varphi = 0.$$

Tato rovnice má na hledaném intervalu dvě řešení a sice 0 a $\pi/2$. Dosazením těchto hodnot do $P(\varphi)$ se přesvědčíme, že maximum P je rovno $P(\pi/2) = 1 + \sinh \pi/2$. Vidíme, že nerovnost (72) je tak splněna. Zjistili jsme, že pro

$$\tilde{l} \geq 1 + \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} \quad (73)$$

je řešení pohybu s počáteční vzdáleností r_0 danou rovnicí (68) smysluplné, neboli (73) je postačující podmínkou pro $r(t) \leq l$. Vypadá to tedy tak, že i v případě druhé možnosti vystřelení kvádříku existuje pro pevné ω minimální potřebná délka desky, která je shodná s délkou potřebnou pro první možnost, viz vztah (67). Zbývá však ještě ověřit, že kvádřík neodletí od desky dříve, neboli že platí $N(\varphi) \geq 0$. Dosazení za r_0 z rovnice (68) do (63) vede na

$$\frac{N(t)}{mg} = \frac{\tilde{l} + \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi. \quad (74)$$

A protože platí (73), musí také platit

$$\frac{N(t)}{mg} \geq \frac{1 + \sinh^{-1} \frac{\pi}{2} + \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi.$$

Společně s požadavkem $N(\varphi) > 0$ to vede na podmínku

$$\coth \frac{\pi}{2} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi \geq 0.$$

Pro tuto nerovnost jsme již ověřili, že je pro všechna $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ splněna, viz (66).

Bonus

Dalším úkolem je zjistit mechanický výkon P dodávaný kvádříku deskou. Deska působí na kvádřík silou \mathbf{N} , a proto

$$P = \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = N \mathbf{e}_\varphi \cdot (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) = Nr \dot{\varphi},$$

kde jsme využili rovnice (53) a ortonormality bázevých vektorů. Ke stejnému vztahu můžeme také dojít z jiného úhlu pohledu. Deska působí na kvádřík momentem síly

$$\mathbf{M} = r \mathbf{e}_r \times N \mathbf{e}_\varphi = Nr (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)$$

a kvádřík se otáčí s vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)$. Výkon P je pak roven

$$P = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = Nr \dot{\varphi}. \quad (75)$$

V případě první možnosti vystřelení kvádříku dosadíme $\dot{\varphi} = \omega$, N z rovnice (66) a r z rovnice (65), čímž dostaneme výkon

$$P = \frac{mg^2}{2\omega} \left(\coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + 2 \cos \omega t \right) \left(\coth \frac{\pi}{2} \cosh \omega t - \sinh \omega t + \sin \omega t \right).$$

Celková práce W vykonaná na kvádříku je rovna přírůstku mechanické energie kvádříku, tj. součtu přírůstku kinetické energie E_k a přírůstku tíhové potenciální energie E_p , neboli

$$\begin{aligned} W &= E_k\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) - E_k(\varphi = 0) + E_p\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) - E_p(\varphi = 0) = \\ &= \frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}^2(\varphi = \pi/2) - \mathbf{v}^2(\varphi = 0)\right) + mgl_{\min}. \end{aligned}$$

Za rychlost \mathbf{v} dosadíme z rovnice (53) a dostaneme

$$W = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) + (l_{\min}\omega)^2 - (r_0\omega)^2\right) + mgl_{\min}.$$

Nyní za r_0 a l_{\min} dosadíme z rovnic (64) a (67) a využijeme toho, že $\dot{r}(\varphi = \pi/2) = 0$, čímž získáme hledaný vztah pro vykonanou práci

$$\begin{aligned} W &= \frac{mg^2}{8\omega^2}\left(\left(\frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2}} + 1\right)^2 - \coth^2\frac{\pi}{2}\right) + \frac{mg^2}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2}} + 1\right) = \\ &= \frac{mg^2}{2\omega^2}\left(\frac{3}{2\sinh\frac{\pi}{2}} + 1\right). \end{aligned}$$

Ke stejnému výsledku lze dojít i přímou integrací výkonu P . Jedná se však o delší výpočet.

V případě druhé možnosti vystřelení kvádříku dosadíme do rovnice (75) opět $\dot{\varphi} = \omega$, N z rovnice (74) a r z rovnice (69), čímž dostaneme výkon

$$\begin{aligned} P &= \frac{mg^2}{2\omega} \cdot \left(\frac{\tilde{l} + \sinh\frac{\pi}{2} - 1}{\cosh\frac{\pi}{2}} \sinh\varphi - \cosh\varphi + 2\cos\varphi\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\tilde{l} + \sinh\frac{\pi}{2} - 1}{\cosh\frac{\pi}{2}} \cosh\varphi + \sin\varphi - \sinh\varphi\right). \end{aligned}$$

Celková práce W vykonaná na kvádříku bude rovna

$$W = \frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}^2(\varphi = \pi/2) - \mathbf{v}^2(\varphi = 0)\right) + mgl.$$

Dosazením za rychlost \mathbf{v} z rovnice (53) dostaneme

$$W = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) + (l\omega)^2 - (r_0\omega)^2\right) + mgl.$$

Zbývá už jen dosadit s užitím rovnice (69) pro r a rovnice (68) pro r_0 .

Úloha V.P ... to nechceš

Jistě jste již někdy slyšeli, že skořápka běžného slepičího vejce dokáže vydržet i poměrně velký tlak. Vysvětlete, jak je to možné, když je přeci velmi snadné vejce rozbít. V jakém směru snese skořápka největší zatížení? Proč a jak se rozbije, když ji zatížíme příliš? Popište různé mechanismy a určete, který je nejpravděpodobnější. Nezapomeňte, že se zabýváme skutečnými, nikoli ideálními vejci. Kde to bude možné, zkuste svá tvrzení podpořit výpočty.

Úvod

Napriek tomu, že táto úloha vyzerá jednoducho, tak plné riešenie problému tenkej vrstvy pod vonkajším tlakom je veľmi komplikované a aj výrazne zjednodušené modely sú za rozsahom typickej úlohy. Preto sa tu najskôr pokúsime použiť relatívne jednoduchý 2D model guľovej škrupiny a pozrieme sa na obmedzenia takéhoto modelu. Najmä sa však pokúsime použiť elementárne fyzikálne argumenty, keďže takýto postup je omnoho inštruktívnejší ako riešenie veľkej sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc.

Predtým ako začneme, predstavme si pár základných konceptov aby sme všetci boli na rovnakej vlně.

Napätie

Napätie alebo stres je veličina popisujúca vnútorné sily medzi časticami v materiáli. Určite poznáte napätie v jednoduchých prípadoch, ako napríklad pri závaží visiacom na špagáte, čo spôsobí normálové napätie v špagáte $\sigma = F/A$, kde A je obsah prierezu špagátu (teda plochy kolmej na smer pôsobenia sily). Ako môžeme vidieť na tomto jednoduchom prípade, tak napätie a tlak majú rovnaké jednotky. Keďže sa snažíme špagát natiahnuť, budeme takémuto napätiu hovoriť napätie v ťahu [tension]. Ak si naopak predstavíme tyč, ktorá má na vrchu závažie, takáto tyč bude v tlaku (kompresii, [compression]). To, že sme museli vymeniť špagát za tyč ilustruje extrémny prípad dôležitého faktu: niektoré materiály zvládajú ťah inak ako tlak. Ďalšia forma napätia je napätie v strihu, ktoré nastáva ak materiál (alebo jeho časť) je „fahaný“ v dvoch smeroch paralelne k jej povrchu (napríklad pri ťahaní zlepených papierov od seba alebo pri strihaní, kedy nožnice od seba tlačia 2 časti materiálu). Rovnako ako predtým definujeme napätie $\theta = F/A$, tu ale A značí plochu prierezu *paralelnú* so smerom sily (teda v prípade nožníc by táto plocha záležala na hrúbke papiera).

Zatiaľ čo pre väčšinu tejto diskusie je porozumenie normálového a strihového napätia postačujúce, pre 2D model budeme neskôr potrebovať kompletnejší popis pomocou tenzoru napätia.

Vajcia

Pozrime sa teraz na vlastnosti vajec. Je pomerne rozumné predpokladať, že vajcia majú valcovú symetriu. Škrupina slepačích vajec má typicky hrúbku (0,3 – 0,4) mm,⁶² výšku približne 50 mm a šírku o niečo menej. Pomer priemeru k hrúbke je teda blízko 100.

Škrupina je typ bio-keramického materiálu, ktorý je v kuracích vajciach zložený z 96 % uhličitanu vápenatého, 2 % organickej matrice a malého množstva horčíka, fosforu a ďalších stopových prvkov. Vnútoraná mikroštruktúra je netriviálna a môžeme ju rozdeliť radiálne na 5 vrstiev, v angličtine nazývaných mammillary knob, cone, palisade, vertical crystal layer a cuticle. Viac detailov a obrázky mikroštruktúry môžete nájsť v literatúre,⁶³ to čo je dôležité pre náš problém je, že keramický materiál je hlavne z kalcitu, ale so zložitou vnútornou štruktúrou.

Konkrétne vlastnosti škrupiny je ťažké nájsť, ale všeobecne vieme, že keramické materiály majú typicky vysoký Youngov modulus (sú nepoddajné [stiff]) ale sú krehké (brittle) a typicky slabšie v tahu oproti tlaku (často 10× slabšie) kvôli vnútornej štruktúre, kde sa defekty ako trhliny, ktoré koncentrujú pnutie, môžu ľahko šíriť v tahu.

Experimentálne výsledky ukazujú, že obsah škrupiny nemá výrazný vplyv na pevnosť vajec,⁶⁴ preto budeme vajce považovať za prázdnu škrupinu.

Vajcia predsa nie sú pevné!

Ako všetci vieme, je jednoduché vajcia rozbiť, ale ako hovorí zadanie, dokážu naozaj vydržať veľký tlak, ak je aplikovaný správne. Aby sme zistili prečo, pozrime sa najskôr na rozdiel medzi situáciami, keď aplikujeme tlak na vajce tým, že ho napríklad stláčame v jednej ruke a tým, že ho bucháme o hranu panvice alebo hodíme na zem. Medzi týmito dvomi situáciami sú dva kľúčové rozdiely, pričom oba prispievajú k rozdielu v odolnosti vajca.

Prvým rozdielom je jednoducho plocha, na ktorú je tlak aplikovaný: ak vajce stlačíme, sila sa rozloží na pomerne veľkú plochu a výsledný tlak nie je taký veľký. V prípade vajca, no aj akéhokoľvek objektu podobného tvaru, je sila rozložená a to nám pomôže aj iným spôsobom. Keď aplikujeme silu, musíme uvažovať nad smerom, v ktorom táto sila pôsobí. Ak je ten smer kolmý na tvar, tak povrch spôsobuje napätie v strihu (shear) a keďže je škrupina veľmi tenká, tak toto napätie bude veľmi vysoké, zatiaľ čo ak je sila rozložená, materiál má viac priestoru previesť toto napätie dovnútra škrupiny, kde dokáže zniesť omnoho vyššie napätie.

Keď vajce stláčame, tlak sa aplikuje pomaly a môžeme ignorovať dynamické sily a tento proces môžeme považovať za izostatický, t.j. že stav materiálu môžeme riešiť v každom momente samostatne, zatiaľ čo keď vajce narazíme o hranu, tak aplikujeme silu veľmi rýchlo a materiál nemá čas aby tieto sily vyrovnal, čím sa maximálne napätie v materiáli zvýši.

⁶²<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/1828051X.2017.1344935>

⁶³https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4615-3060-2_1,
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4118947/>,

<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22201802/>

⁶⁴<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/> (section 3.3)

Tak ako silné sú vajcia?

Zistili sme, že toto je veľmi zložitý problém, ale pozrime sa teda na nejaké experimentálne výsledky. Tiež je možné použiť simuláciu pomocou finite element analysis na odhad sily, ale takáto simulácia nezachytí detaily nedokonalého biologického materiálu. Môžeme nájsť niekoľko článkov popisujúcich silu škrupiny online, napríklad⁶⁵ hovorí, že slepačie vajcia dokážu pri vhodnom loadingu pozdĺž ich osi odolať veľkej sile, ale tiež našli veľkú variabilitu medzi jednotlivými vajcami. Všeobecne to vyzerá tak, že slepačie vajcia dokážu typicky odolať sile až 700 N.

Módy zlyhania

Ako sa vajcia rozbijú ak túto silu prekročíme? Existuje viacero možných mechanizmov rozbitia vajca. To, ktorý nastane závisí od vlastností vajca a spôsobu ako naň pôsobí sila.

Strihové zlyhanie

Ako sme už spomenuli pri prípade rozbitia úderom do malého miesta, keď strihové napätie prekročí medzu pevnosti materiálu, vajce sa v tomto bode rozbije. Pevnosť je tiež znížená tým, že takýto úder aplikuje silu veľmi rýchlo, čo vyžaduje veľký strain rate aby túto silu vykompenzoval.

V prípade, že je sila rozložená a pôsobí v smere osi vajca, je situácia zložitejšia a možných módov zlyhania je viac.

Buckling

Možno poznáte situáciu bucklingu („vypúlenia“) Eulerovej tyče, čo je prípad keď stláčame tyč pozdĺžne až sa stane mechanicky nestabilnou a „vypúli“ sa do jedného smeru. Asi si viete predstaviť, alebo ste možno aj videli hračky z tenkého plastu, kde táto situácia nastáva na tenkom zakrivenom materiáli. Keďže ale keramický materiál vajca nie je veľmi flexibilný, tento mód je nepravdepodobný.

Ťah na vnútornom povrchu

Keď ohýbame štruktúru konečnej hrúbky, napätie pôsobí na opačných stranách v opačnom smere (predstavte si ohnutú tyč), materiál je v ťahu na vonkajšom povrchu a v kompresii na vnútornom povrchu (vnútorný a vonkajší v smere ohybu). Na to aby materiál kompenzoval stres, aj keď má veľký Youngov modul, tak sa vždy musí mierne zdeformovať (Hookov zákon), čo v prípade vajca znamená, že sa povrch mierne prehne smerom dnu voči pôvodnému tvaru, čo vedie k ťahu na vnútornom povrchu vajca a ku kompresii na jeho vonkajšom povrchu. Keďže keramický materiál vajca je výrazne slabší v ťahu, tak na vnútornom povrchu môže dôjsť k praskline, ktorá sa bude šíriť. Toto sa zdá byť častý mód zlyhania,⁶⁶ ale v závislosti na spôsobe aplikovania, tlak nemusí vždy viesť k úplnému zlyhaniu. Vrch vajca praskne, zdeformuje sa, čím sa bude sila efektívne prenášať na zvyšok škrupiny, ktorá potom prežije vyšší tlak (ak sa trhlinka nedostane aj na túto časť škrupiny).

⁶⁵<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/>

⁶⁶<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00071666708415678>

Hoop tension

Keď aplikujeme kompresiu pozdĺž osi, indukujeme ťah pozdĺž rovnobežiek na povrchu. Toto je pomerne intuitívny výsledok: predstavte si ako sily pôsobia pozdĺž poludníkov, keďže sa poludníky na guľi aj na vajci rozchádzajú kvôli zakriveniu povrchu, vznikne sila pôsobiaca pozdĺž rovnobežiek, ťahové napätie je preto potrebné pozdĺž rovnobežiek aby sa vajce neroztrhlo. Ak toto napätie prekročí pevnosť vajca, vajce sa roztrhne. Toto napätie pôsobí na veľkom povrchu, čo ako uvidíme neskôr hrá značnú rolu. Toto je typický mód zlyhania v niektorých experimentoch.⁶⁷

2D model

Skúsme teraz vytvoriť zjednodušený 2D model škrupiny. Budeme hovoriť o guľovej škrupine (aj keď ako uvidíte riešenie pre ľubovlnú rotáciu škrupiny je prakticky rovnaké).

Nasledujúca sekcia je pomerne zložitá a rozhodne nebola potrebná na získanie plného počtu bodov, je tu len pre čitateľa so záujmom.

Cauchyho tenzor napätia

Všeobecne môže stres v materiáli byť v ľubovlnom smere, a teda jednoduchý popis aký sme používali vyššie nám tu nebude stačiť. Keďže sila pôsobiaca na rovinu v materiáli bude závisieť na orientácii tejto roviny, potrebujeme popis, ktorý nám dá silu pôsobiacu na ľubovlnú rovinu definovanú jej normálovým vektorom, a teda potrebujeme mapu z vektoru na vektor, čo je tenzor. Zatiaľ čo tenzory sa zo začiatku môžu zdať desivé, tu nepotrebujeme nič zložité, jednoducho ho použijeme ako maticu.

Tenzor plne popisujúci napätie v materiáli sa nazýva Cauchy stress tensor. Jeho komponenty v Kartézskych súradniciach môžeme jednoducho vyčítať z predošlej diskusie. Chceme maticu σ takú, aby keď ju aplikujeme na normálový vektor k rovine \mathbf{n} , dostaneme silu, ktorá pôsobí na túto rovinu ($\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \sigma$). Vieme, že normálové napätia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ pôsobia na roviny kolmé na x, y, z osi v smere pozdĺž týchto osí (napr. σ_x pôsobí pozdĺž x na yz rovinu). Akýkoľvek strih pôsobí v kolmých rovinách, a teda tu neprispieva. Takže hneď vidíme, že diagonálne komponenty matice budú ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$). Strihové komponenty sú trochu menej intuitívne, ale vieme, že sú to nediagonálne komponenty, ktoré pôsobia pozdĺž rovín, a teda

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Tento tenzor bude závislý na polohe, teda napätie tvorí tenzorové pole.

Pozorný čitateľ si všimol že tu hovoríme o rovnováhe, teda tento tenzor musí spĺňať nejaké podmienky aby sa časti materiálu voči sebe nepohybovali.

Uvažujme ľubovlný objem V v materiáli uzavretý povrchom S . Na každý bod na povrchu pôsobí sila $\mathbf{T}(x, y, z)$ kvôli napätiu v materiáli a na každý objemový element pôsobia telesové sily (body forces) \mathbf{F} (napríklad tiažová sila) nezávislé od

⁶⁷<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/>

napätia (tieto neskôr zanedbáme). Vieme, že celková sila na každý takýto objem musí byť nulová, teda ak sčítame všetky sily na povrchu a všetky telesové sily

$$\int_V F_i dV + \int_S \sigma_{ji} n_j dS = 0,$$

kde sme použili indexovú notáciu a Einsteinovu sumačnú konvenciu (opakované indexy sa sčítajú, teda rovnosť $\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ vieme napísať ako $T_i = \sigma_{ji} n_j$ týmto spôsobom), toto budeme používať v celej nasledujúcej sekcii, keďže to veľmi zjednoduší vyjadrenia. Teraz môžeme použiť Gaussovu vetu a nahradiť integrál cez povrch objemovým integrálom a dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V F_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV = \int_V F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV, \\ 0 &= F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (76)$$

kde sme posledný riadok dostali tým, že hovoríme o ľubovolnom objeme a jediný spôsob ako bude tento integrál 0 pre ľubovoľný objem je, ak je integrand nula. Toto nám dá 3 rovnice (všimnite si že index i sa nevysčítal), ktoré musí tenzor stresu spĺňať.

Toto ale nie je jediná podmienka. Tiež musíme dodržať zachovanie momentu hybnosti, a teda súčet všetkých momentov síl voči ľubovolnej osi musí byť nula. Podobným spôsobom ako vyššie dostaneme, označujúc sily pôsobiace na povrch \mathbf{T} a telesové sily \mathbf{F}

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{T})_i dS + \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_i dV = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{mk} n_m dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV = \\ &= \int_V \frac{\partial \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{mk}}{\partial x_m} dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV, \\ 0 &= \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{mk} \frac{\partial x_j}{\partial x_m} + x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + x_j F_k \right), \end{aligned}$$

kde sme prepísali vektorový súčin pomocou Levi-Civitovho symbolu ε ,⁶⁸ Gaussovu vetu a rozšírili deriváciu. Všimnime si, že člen

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_m}$$

je rovný 1 ak $i = m$ (keďže vtedy je v tvare $\partial x/\partial x$) a 0 inak. Tenzor, ktorý sa takto správa je známy ako Kroneckerovo delta δ_{ij} a jeho efekt v sumácii je, že efektívne „premenuje“ index $j \rightarrow i$ (alebo naopak). S touto vedomosťou dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{jk} + x_j \left(\frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + F_k \right) \right) dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV, \\ 0 &= \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}, \end{aligned}$$

⁶⁸Toto je totálne antisymetrický tenzor, dávajúci 1 keď ijk je párna (sudá) permutácia 123 (napr. 123), -1 keď je to nepárna (lichá) permutácia 123 (napr. 132) a 0 inak.

kde sme dostali druhý riadok tým, že sme si všimli, že výraz násobený x_j je rovnaký ako podmienka, ktorú sme videli vyššie (76). Rozšírením posledného výrazu a použitím vlastností ε dostaneme $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{23} = \sigma_{32}, \sigma_{13} = \sigma_{31}$, teda $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ a tenzor stresu je symetrický.

Spherical coordinates

Doteraz sme sa zapodievali Kartézskymi súradnicami, ale tie pre náš problém nie sú veľmi užitočné. Mohli by sme vajíce aproximovať ako niečo s valcovou symetriou, ale pre ešte jednoduchší model sa pozrieme na prípad sférickej symetrie. Na to budeme potrebovať iba transformáciu rovnice (76) do sférických súradníc. Toto urobíme tak, že transformujeme tenzor stresu a aplikujeme derivácie⁶⁹ a dostaneme tri rovnice (zanedbávajúc telesové sily (teda hmotnosť škrupiny))

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \frac{\tau_{r\theta}}{\operatorname{tg} \theta} \right), \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\operatorname{tg} \theta} + 3\tau_{r\theta} \right), \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(3\tau_{r\varphi} + \frac{2\tau_{\theta\varphi}}{\operatorname{tg} \theta} \right). \end{aligned}$$

Ah, super. Teraz máme 3 parciálne diferenciálne rovnice so 6 neznámymi funkciami. Spravme krok späť a pozrieme sa na situáciu, ktorú riešime. Najskôr problém zjednoduším použitím valcovej symetrie, teda že všetky funkcie sú nezávislé na φ . Môžeme teda hneď odstrániť všetky členy s $\partial/\partial\varphi$, to ale nie je všetko. Táto symetria tiež znamená $\tau_{\varphi\theta} = \tau_{r\varphi} = 0$ (keďže tieto by museli byť nezávislé na φ , integrovanie pozdĺž celého rozsahu φ (teda po obručiac) nemôže viesť k nenulovej sile, inak by sa obruče hýbali). Toto veľmi zjednoduší rovnice ale bohužiaľ to tiež úplne odstráni poslednú z rovníc a zostane nám

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \frac{\tau_{r\theta}}{\operatorname{tg} \theta} \right), \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\operatorname{tg} \theta} + 3\tau_{r\theta} \right). \end{aligned}$$

To už vyzerá o dosť lepšie. Ak sa pozrieme na okrajové podmienky, tak vidíme, že chceme problém rozdeliť na dve časti: jedna bude popisovať dva guľové vrchlíky, na ktoré pôsobí sila zvonku a druhá bude popisovať zvyšok škrupiny, kde je povrch voľný (keď zanedbáme tlak vzduchu, ktorý pôsobí z oboch strán).

⁶⁹ Alebo nájdeme vyjadrenie pre tenzorovú divergenciu v sférických súradniciach online.

Tento 2D model nedokáže dobře popísať guľové vrchlíky, keďže tu hrá výraznú rolu strihové napätie, takže sa pozrieme len na riešenie druhej časti. Pre túto časť máme z voľného povrchu okrajové podmienky

$$\sigma_r(R, \theta) = \tau_{r\theta}(R, \theta) = \sigma_r(R + t, \theta) = \tau_{r\theta}(R + t, \theta) = 0,$$

kde t je hrúbka škrupiny a R je jej vnútorný priemer.

Aby sme sa dostali k prvému skutočnému výsledku, uvažujme limitu $t \rightarrow 0$, teda skutočne 2D škrupinu. Toto prakticky odstráni závislosť na r , keďže $r = R$ sa stane konštantou vnútri škrupiny, ale tiež to znamená, že škrupina nedokáže udržať strihové $\tau_{r\theta}$ ani normálové napätie σ_r , keďže okrajové podmienky znamenajú $\tau_{r\theta}(R, \theta) = \sigma_r(R, \theta) = 0$ a jediné r je $r = R$. Ak toto vložíme do našich rovníc, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= -\sigma_\theta - \sigma_\varphi, \\ 0 &= \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\operatorname{tg} \theta}. \end{aligned}$$

Kombináciou týchto dvoch obyčajných diferenciálnych rovníc dostaneme σ_θ

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} + 2 \frac{\sigma_\theta}{\operatorname{tg} \theta}, \\ \int \frac{d\sigma_\theta}{\sigma_\theta} &= -2 \int \frac{d\theta}{\operatorname{tg} \theta}. \end{aligned}$$

Riešenie je

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{C}{\sin^2 \theta}, \\ \sigma_\varphi &= -\frac{C}{\sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

kde C je konštanta závislá na vonkajšej sile. Pre jednoduchosť predpokladajme, že sila je aplikovaná na kruhovú oblasť okolo osi, koľko na povrch vajca (teda prispievajúc do $\sigma_r = p$ pre $\theta < \theta_0$ alebo $\theta > \pi - \theta_0$, kde θ_0 určuje veľkosť oblasti, kde sila pôsobí). Z našich riešení vidíme, že ak aplikujeme silu na veľmi malú oblasť, tak dostaneme veľké napätia kvôli $1/\sin^2 \theta$ členu.

Ako vidíme, kompresia pozdĺž poludníkov vedie k ľahu na rovnobežkách. Tiež vidíme, že toto 2D riešenie je nekompletné: v 3D realite je strih $\tau_{r\theta}$ nenulový. Mohli by sme uvažovať zložitejšiu verziu tejto teórie, kde by sme považovali napätie za konštantné vo vnútri tenkej škrupiny s napätím daným iba ako funkciou θ a integrovaním rovníc cez tenkú škrupinu. Toto ale vedie iba na 2 rovnice pre 3 neznáme funkcie, čo je zjavne nedostatočné. Chýbajúci kúsok puzzle sú rovnice pre mechanickú deformáciu a tie by ale model extrémne skomplikovali.

Aby sme určili konštantu C , stačí nám určiť celkovú silu, ktorá sa z guľového vrchlíka pod vonkajším tlakom musí preniesť na zvyšok škrupiny. Ako sme spomenuli, naše riešenie v guľovom vrchlíku nefunguje, ale stále platí, že tento vrchlík

musí preniesť všetku vonkajšiu silu na zvyšok škrupiny, keďže reakcia na túto silu je to, čo kompenzuje vonkajšiu silu a drží túto časť škrupiny na mieste. Táto sila sa môže preniesť iba cez kruhové rozhranie na θ_0 . Porovnaním celkovej sily pôsobiacej na vrchlík s projekciou sily z napätia na tomto rozhraní (reakcia na silu, ktorá drží vrchlík na mieste) do vertikálneho smeru dostaneme,

$$2\pi \sin^2 \theta_0 R \sigma_\theta(\theta_0) t = -F,$$

$$C = -\frac{F}{2\pi R t},$$

$$\sigma_\theta(\theta) = -\frac{F}{2\pi R t \sin^2 \theta}, \quad \theta \in (\theta_0, \pi - \theta_0),$$

kde F je celková sila pôsobiaca na vajce, t je hrúbka škrupiny.

Ako sme spomenuli vyššie, keramické materiály majú nižšiu pevnosť v ťahu ako v kompresii, a preto sa vajce v tomto modeli rozbije kvôli ťahu pozdĺž rovnobežiek.

Fakt, že kompresia na poludníkoch vedie na ťah na rovnobežkách je zjavný len z geometrie, nečakali by sme ale, že bude napätie maximálne v θ_0 . Toto je dôsledok 2D modelu, ktorý nedokáže udržať nevyhnutné strihové napätie v θ_0 . Závislosť F/R je zaujímavá, ak uvažujeme nad tlakom namiesto síl $F \propto pR^2$, dostaneme napätie $\sigma_\theta \propto pR$, teda malé gule (alebo tvary s malým lokálnym polomerom krivosti) odolávajú tlaku lepšie.

Ďalšia možnosť zlyhania gule, ktorú sme spomenuli vyššie je, že sa stane mechanicky nestabilnou a vypúli sa dnu (buckle). Toto sa stane v oblasti, kde pôsobí vonkajšia sila a naše riešenie tu neplatí, ale fakt, že dostaneme ťah po rovnobežkách stále platí a tu pomôže spevniť povrch voči takémuto prevaleniu. Pokračujúc v tejto myšlienke ako sme zistili vyššie, tak útvary s menším polomerom krivosti dokážu rýchlejšie previesť tlak na rovnobežkový ťah, a teda sú odolnejšie voči takémuto prevaleniu. Ak dáme všetko toto dokopy, tak vidíme, že vajce je naozaj najsilnejšie pozdĺž jeho osi.

Membránová teória

Čo sme získali vyššie je známy model z membránovej teórie škrupín a ak sa vrátim o kúsok späť, videli sme, že strihové a normálové napätie je nevyhnutne nulové. Toto dáva zmysel, keďže škrupina má nulovú hrúbku, ale tiež to znamená, že všetky sily musia pôsobiť tangenciálne voči povrchu, čo je výrazné obmedzenie, keďže v tomto prípade sily zjavne nie sú tangenciálne.

Toto tiež vysvetľuje prečo sme dostali maximálne napätie v ťahu v θ_0 : ak je tu sila aplikovaná tangenciálne, potrebujeme veľké napätie pozdĺž θ_0 rovnobežky, aby sme škrupinu udržali pokope (predstavte si sily pôsobiace na valec so stlačeným plynom).

Úplné sférické riešenie

Keďže náš 2D model nám nedal uspokojivé riešenie, mohli by sa pokúsiť nájsť úplné riešenie pomocou rovníc pre elastickú deformáciu a použiť elastické vlastnosti škrupiny dostupné online. Myšlienka je použiť 3 rovnice continuity, ktoré sme použili vyššie, napísať 6 stress-strain rovníc (v podstate Hookov zákon vo všetkých

smeroch) a 3 rovnice pre deformácie v zvolených súradniciach, z čoho dostaneme sústavu 15 parciálnych diferenciálnych rovníc. Valcová symetria znamená $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0$ a rovnice sa o niečo zjednodušia. Plné analytické riešenie tohto prípadu existuje a dá sa vyjadriť pomocou nekonečných rád Legendreových polynómov.⁷⁰

Zakrivenie povrchu a sila

Ako vieme intuitívne a ako sme videli v 2D modeli, vajcia sú najsilnejšie pozdĺž ich osí. Toto je dané tým ako sa napätie rozkladá v materiáli. Čím vyššie zakrivenie, tým rýchlejšie sa strihové napätie dokáže previesť do tangenciálneho ťahu a kompresie, kde je škrupina omnoho silnejšia. To znamená, že ostrejšie vajcia budú silnejšie v tomto smere. Väčšie existujúce zakrivenie tiež pomôže s ťahom na vnútornom povrchu indukovanom zakrivením.

Skutočné vajcia

Ako každý biologický materiál, ani škrupina nie je všade rovnaká. Jej hrúbka a zloženie má nejakú premenlivosť a škrupina obsahuje mnoho mikroprasklín a ďalších materiálových defektov, ktoré prerušujú *tok* napätia v materiáli (sila sa nedokáže preniesť cez prasklinu), čo vytvorí lokálne koncentrácie napätia vedúce k zlyhaniu. Ako dôsledok tohto je, že nedokážeme presne predpovedať medzi pevnosti ani mód zlyhania, keďže skutočné vajce pravdepodobne praskne v mieste, kde existujúci defekt vytvoril vysokú koncentráciu napätia alebo už prítomná mikro-trhlinka narastie tak, že vajce sa rozbije.

Zatiaľ čo tieto materiálové nedokonalosti vyzerajú ako jednoduchá vec, ich dôsledok je veľmi hlboký. Ich náhodná prítomnosť znamená, že prasknutie vajca je efektívne stochastický proces, s pravdepodobnosťou prasknutia v nejakom danom bode (teda v nejakom objemovom elemente) závislom na napätí v tomto bode, tým ako dlho je tento bod pod týmto napätím a aj ako rýchlo sa pod toto napätie dostal. To znamená, že pravdepodobnosť, že vajce praskne kdekoľvek závisí na tom ako veľký objem je vystavený takmer-kritickému napätiu. Ak predpokladáme, že škrupina má približne konštantnú hrúbku a ďalšie parametre, tak tento objem bude úmerný povrchu a teda tvar, ktorý dokáže rýchlo rozložiť napätie bude mať menší povrch pod takmer-kritickým napätím a nižšiu pravdepodobnosť zlyhania. Toto prispieva k tomu, prečo rovnobežkový ťah môže mať väčší vplyv ako vyššie napätie na vrchu vajca, keďže tento ťah pôsobí na veľmi veľkom povrchu.

Záver

Uvažujúc všetko, čo sme tu spomínali aj citované experimentálne výsledky, môžeme teraz odpovedať na otázky v zadaní

- Vajcia sa ľahko rozbijú ak je rýchlo aplikovaná veľká sila na malý povrch, ale ich tvar dokáže rozložiť strihovú a normálovú silu do tangenciálnych napätí, kde je škrupina omnoho silnejšia.
- Vajcia sú najsilnejšie pozdĺž ich osí a väčšie zakrivenie efektívnejšie rozloží aplikované napätie.

⁷⁰<https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00419-015-0993-8>

- *Většina* vajec pravděpodobně zlyhá kvůli indukovanému rovnoběžkovému tahu, protože keramický materiál je omnoho slabší v tahu jako v kompresi, ale předpovědat mód zlyhání pro konkrétní vejce je takmer nemožné kvůli variabilitě vajec a materiálovým defektom.

Úloha VI.1 . . . krasobruslařka

Uvažujme krasobruslařku s rozpaženýma rukama, točíci se úhlovou rychlostí ω kolem své osy. Jakou úhlovou rychlostí ω' se bude točit, pokud připaží? Jakou práci musí vykonat, aby připažila? Tvar krasobruslařky aproximujte dle svého uvážení.

Nejprve si zavedeme aproximaci těla krasobruslařky. Měla by přibližně odpovídat realitě a přitom zbytečně nekomplikovat výpočty.

Krasobruslařku si tedy pro potřeby výpočtu rozdělíme na hlavu, trup, ruce a nohy. Hlavu budeme aproximovat koulí s poloměrem $r_1 = 0,1$ m a hmotností $m_1 = 6$ kg. Tělo válcem s poloměrem $r_2 = 0,12$ m a hmotností $m_2 = 28$ kg. Nohy budou také válce, s poloměrem $r_3 = 0,06$ m a hmotností $m_3 = 10$ kg. A konečně ruce budou další dva válce, s poloměrem $r_4 = 0,03$ m, délkou $d = 0,7$ m a hmotností $m_4 = 3$ kg.

Pro úplnost je ještě potřeba dodat, že nohy jsou rovnoběžné s osou válce reprezentujícího trup a navzájem se dotýkají. Ruce jsou na tuto osu v rozpaženém stavu kolmé a v připaženém stavu jsou s ní rovnoběžné. Krasobruslařka je v obou případech rovinně symetrická podle dvou kolmých rovin procházejících opět osou válce trupu.

Nyní už se můžeme posunout k samotnému výpočtu změny úhlové rychlosti krasobruslařky. Pokud si označíme J_1 moment setrvačnosti hlavy, J_2 moment setrvačnosti trupu, J_3 moment setrvačnosti nohy, J_{41} moment setrvačnosti rozpažené ruky a J_{42} moment setrvačnosti připažené ruky, potom ze zákona zachování momentu hybnosti platí následující rovnost

$$J_1\omega + J_2\omega + 2J_3\omega + 2J_{41}\omega = J_1\omega' + J_2\omega' + 2J_3\omega' + 2J_{42}\omega',$$

kde ω je úhlová rychlost před připažením a ω' po připažení. Z této rovnice si úpravou můžeme vyjádřit hledanou úhlovou rychlost ω' jako

$$\omega' = \omega \frac{J_1 + J_2 + 2J_3 + 2J_{41}}{J_1 + J_2 + 2J_3 + 2J_{42}}.$$

Zbývá nám spočítat momenty setrvačnosti jednotlivých částí těla krasobruslařky. Hodnoty pro hlavu (koule) a trup (válec) najdeme v tabulkách, u nohy (válec) si pomůžeme Steinerovou větou a u ruky zanedbáme tloušťku (tyč) a opět použijeme hodnotu z tabulek a Steinerovou větu.

- **Hlava:** $J_1 = \frac{2}{5}m_1r_1^2 = 0,024 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- **Trup:** $J_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2 = 0,202 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- **Noha:** $J_3 = \frac{1}{2}m_3r_3^2 + m_3r_3^2 = 0,054 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

- **Rozpažená ruka:** $J_{41} = \frac{1}{12}m_4d^2 + m_4 \left(r_2 + \frac{d}{2}\right)^2 = 0,785 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- **Připažená ruka:** $J_{42} = \frac{1}{2}m_4r_4^2 + m_4 (r_2 + r_4)^2 = 0,069 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

Vidíme, že největší část celkového momentu setrvačnosti tvoří rozpažené ruce, zvýšení úhlové rychlosti připažením tak bude výrazné. Po dosazení do rovnosti momentů hybnosti dostaneme

$$\omega' = \omega \frac{\frac{2}{5}m_1r_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2 + 2\left(\frac{1}{2}m_3r_3^2 + m_3r_3^2\right) + 2\left(\frac{1}{12}m_4d^2 + m_4\left(r_2 + \frac{d}{2}\right)^2\right)}{\frac{2}{5}m_1r_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2 + 2\left(\frac{1}{2}m_3r_3^2 + m_3r_3^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}m_4r_4^2 + m_4(r_2 + r_4)^2\right)}$$

a konečně po dosazení konkrétních hodnot dospějeme k výsledku

$$\omega' = \omega \frac{0,024 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0,2016 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 2(0,054 \text{ kg}\cdot\text{m}^2) + 2(0,7852 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)}{0,024 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0,2016 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 2(0,054 \text{ kg}\cdot\text{m}^2) + 2(0,06885 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)} \doteq 4,0\omega.$$

Zbývá spočítat práci W , kterou musí krasobruslařka vykonat. Ta odpovídá změně její celkové kinetické energie. Ta je větší po připažení, protože moment setrvačnosti se sice k -krát snížil, ale úhlová rychlost se zvýšila k^2 -krát. Vykonaná práce tak je

$$W = \frac{1}{2}J'\omega'^2 - \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}J_0\omega(\omega' - \omega) = \frac{1}{2}J_0\omega^2\left(\frac{\omega'}{\omega} - 1\right) = \frac{3}{2}J_0\omega^2,$$

kde $J_0 = 1,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ je původní moment setrvačnosti.

Úloha VI.2 . . . rotující kyvadélko

Mějme matematické kyvadlo délky l se závažím o hmotnosti m v tíhovém poli se zrychlením g . Kyvadélko uvedeme do rotačního pohybu okolo svislé osy s konstantní úhlovou rychlostí ω . Určete stabilní polohy kyvadla. Výsledek vyjádřete pomocí úhlu od svislice.

Budeme počítat v neinerciální soustavě spojené s rotujícím kyvadélkem. Na hmotný bod působí ve svislém směru tíhová síla mg , ve vodorovném směru odstředivá síla $m\omega^2r$ a ve směru podél tyče tahová síla. Poloměr otáčení je $r = l \sin \varphi$, kde φ je úhel od svislice. Poloha bude stabilní, pokud výslednice tíhové a odstředivé síly bude působit rovnoběžně s tyčí, takže se vyruší s tahovou silou lanka

$$\begin{aligned} \frac{m\omega^2l \sin \varphi}{mg} &= \text{tg } \varphi, \\ \cos \varphi &= \frac{g}{\omega^2l}. \end{aligned} \tag{77}$$

Úhel φ pak definuje rovnovážnou polohu kyvadla. Jak ale určit, zda je labilní, anebo stabilní? K tomu se přidává i druhý problém – kosinus úhlu musí být vždy menší

nebo roven jedné. Výše odvozený vztah má tedy smysl, pouze pokud $g/\omega^2 l \leq 1$. V řešení tudíž musíme rozlišit dva případy, a sice

$$\omega \geq \omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\omega < \omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Když se zamyslíme, přijdeme na to, že existují ještě dvě další rovnovážné polohy, a to $\varphi_1 = 0$ a $\varphi_2 = 180^\circ = \pi$. V obou případech nepůsobí na závaží žádná odstředivá síla a tahová síla (či tlaková síla v případě φ_2) od tyče vyrovnává účinky tíhové síly. Výslednice všech sil působících na závaží je nulová.

Horní poloha charakterizovaná úhlem φ_2 je nepochybně labilní. Pokud vychýlíme závažíčko z rovnovážné polohy, odstředivá síla jej začne odtlačovat pryč a tíhová síla jej potáhne dolů. Závaží už se do rovnovážné polohy nevrátí.

Závaží se pohybuje v jakési krajně potenciální energii, jež závisí na úhlu odklonu od svislice φ . Právě jsme si dokázali, že rovnovážná poloha $\varphi_2 = \pi$ je labilní; leží totiž na kopečku potenciální energie. V každé krajně (i v krajně potenciální energii) však musí být vedle kopečku údolí. Nemohou spolu přímo sousedit dva kopečky, proto následující rovnovážná poloha bude stabilní. V případě $\omega < \omega_c$ je další rovnovážnou polohou úhel $\varphi_1 = 0$. Jde o minimum potenciální energie, dno údolí.

V případě $\omega \geq \omega_c$ je však další rovnovážnou polohou úhel odvozený v rovnici (77), tj. úhel $\varphi_3 = \arccos(g/(\omega^2 l))$. To bude stabilní poloha v minimu potenciální energie. Další rovnovážná poloha je $\varphi_1 = 0$, ale ta musí být tentokrát na kopečku, neboť spolu nemohou přímo sousedit ani dvě údolí!

Došli jsme k nesmírně zajímavému výsledku. Pokud začneme otáčet kyvadlem okolo svislé osy, při malých úhlových rychlostech se nic nestane, kyvadlo zůstane viset v poloze $\varphi_1 = 0$. Teprve když úhlová rychlost překročí kritickou hranici $\omega_c = \sqrt{g/l}$, poloha $\varphi_1 = 0$ se najednou stane lokálním maximem potenciální energie a kyvadlo se odkloní od svislé osy. Stabilní poloha kyvadla bude dána úhlem odklonu

$$\varphi_3 = \arccos \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Samozřejmě se můžete ptát, jak víme, že jde skutečně o dno údolíčka; co když jde jenom o inflexní bod na svahu kopce? To jsou otázky, na které může dát odpověď jen matematická analýza situace. To jsme ale u vašeho řešení nutně nevyžadovali. Důležité bylo použít fyzikální intuici a najít, že existuje rozdíl mezi rovnovážnými polohami pro $\omega < \omega_c$ a $\omega \geq \omega_c$, tj. že pro malé úhlové rychlosti zůstane kyvadlo v poloze $\varphi_1 = 0$, zatímco při velkých úhlových rychlostech se odkloní. Pokud se chcete přesvědčit, že jsme nalezené rovnovážné polohy označili správně jako minima a maxima potenciální energie, na dalších dvou stranách uvádíme exaktní řešení pomocí minimalizace potenciální energie.

Exaktní řešení pomocí hledání minima potenciální energie

Gravitační potenciální energie závaží je $mgl(1 - \cos \varphi)$. Taktéž odstředivé síle můžeme přiřadit potenciální energii. Odstředivá síla se snaží „odtlačit“ závaží co nej-

dále od osy otáčení. Závislost potenciální energie na vzdálenosti od osy zjistíme integrováním (je to záporná práce vykonaná odstředivou silou)

$$U_o(r) = - \int_0^r m\omega^2 \rho \, d\rho = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2 \varphi .$$

Tahová síla lana nepřidá žádnou potenciální energii, neboť působí vždy kolmo na pohyb závaží.

Pokud soustava rotuje úhlovou rychlostí ω , závisí potenciální energie závaží na úhlu od svislice φ jako

$$U = mgl (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2 \varphi . \quad (78)$$

Rovnovážná poloha bude v minimu potenciální energie. Nejprve najdeme lokální extrémy tak, že první derivaci položíme rovnou nule

$$\frac{dU}{d\varphi} = mgl \sin \varphi - m\omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi = mgl \sin \varphi \left(1 - \frac{\omega^2 l}{g} \cos \varphi \right) = 0 .$$

Úhel odklonu φ musí ležet v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Naše rovnice pro polohy lokálních extrémů má tudíž dvě až tři řešení. Dvě z řešení jsou okraje intervalu $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, kdy platí $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = 0$, a třetí řešení je

$$\varphi_3 = \arccos \frac{g}{\omega^2 l} ,$$

ovšem to dává smysl jen tehdy, když je poměr $\omega^2 l/g$ větší nebo roven 1.

V dalším kroku musíme určit, které z lokálních extrémů φ_1, φ_2 a φ_3 jsou minima. To zjistíme prostřednictvím druhé derivace potenciální energie

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\varphi} &= mgl \sin \varphi - m\omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi = mgl \sin \varphi - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin(2\varphi) , \\ \frac{d^2U}{d\varphi^2} &= mgl \cos \varphi - m\omega^2 l^2 \cos(2\varphi) = mgl \cos \varphi - m\omega^2 l^2 (2 \cos^2 \varphi - 1) , \end{aligned}$$

kam dosadíme polohy lokálních extrémů

$$\begin{aligned} mgl \cos \varphi_1 - m\omega^2 l^2 (2 \cos^2 \varphi_1 - 1) &= mgl \left(1 - \frac{\omega^2 l}{g} \right) , \\ mgl \cos \varphi_2 - m\omega^2 l^2 (2 \cos^2 \varphi_2 - 1) &= mgl \left(-1 - \frac{\omega^2 l}{g} \right) , \\ mgl \cos \varphi_3 - m\omega^2 l^2 (2 \cos^2 \varphi_3 - 1) &= mgl \left(\frac{g}{\omega^2 l} - \frac{\omega^2 l}{g} \left(2 \left(\frac{g}{\omega^2 l} \right)^2 - 1 \right) \right) = \\ &= mgl \left(-\frac{g}{\omega^2 l} + \frac{\omega^2 l}{g} \right) . \end{aligned}$$

Vidíme, že v poloze $\varphi_2 = \pi$ je vždy lokální maximum potenciální energie, protože druhá derivace je záporná. Na poloze $\varphi_1 = 0$ může být buď lokální minimum (jestliže $\omega^2 l/g < 1$), anebo lokální maximum (pokud $\omega^2 l/g > 1$). Řekli jsme, že třetí řešení dává smysl jen v případě $\omega^2 l/g \geq 1$. Možnost $\omega^2 l/g = 1$ prozkoumáme později, avšak v případě $\omega^2 l/g > 1$ se na poloze φ_3 jistě nachází lokální minimum.

Došli jsme ke stejnému výsledku. Pokud začneme otáčet kyvadlem okolo svislé osy, při malých úhlových rychlostech se nic nestane, kyvadlo zůstane viset v poloze $\varphi = 0$, kde je minimum potenciální energie. Teprve ve chvíli, kdy úhlová rychlost překročí jistou kritickou hodnotu $\omega_c = \sqrt{g/l}$, se kyvadlo odkloní od svislé osy a rovnovážná poloha bude

$$\varphi = \arccos \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Dojde tedy k jakémusi fázovému přechodu mezi řešeními.

Ještě zbývá odpovědět na otázku, co se děje, když nastává rovnost $\omega^2 l/g = 1$. V takovém případě splývají řešení $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$. Fyzikální intuice nám napovídá, že jde o lokální minimum, jenže druhá derivace potenciální energie je v této poloze nulová. Jak máme dokázat, že jde skutečně o minimum?

Nejpřímější cesta je dosadit $\omega^2 = g/l$ do vztahu (78)

$$U = mgl(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}mgl \sin^2 \varphi = mgl \left(1 - \cos \varphi - \frac{1}{4}(\cos(2\varphi) - 1) \right), \quad (79)$$

kam budeme dále dosazovat po řadě $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$, z čehož dostaneme $U(0) = 0$ a $U(\pi) = 2mgl$. Mezi úhly 0 a π se nenachází žádné lokální minimum ani maximum, tudíž hodnoty $U(\varphi)$ pro $\varphi \in (0, \pi)$ musí být $0 < U(\varphi) < 2mgl$. Na úhlu $\varphi = 0$ je proto minimum potenciální energie.

Hlubší vhled do této situace získáme tak, že provedeme Taylorův rozvoj rovnice (79) v okolí $\varphi = 0$

$$U(\varphi) = mgl \left(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{4} \frac{1}{2} (2\varphi)^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{24} (2\varphi)^4 + O(\varphi^6) \right) = mgl \frac{1}{8}\varphi^4 + O(\varphi^6).$$

Vidíme, že při kritické úhlové rychlosti $\omega_c = \sqrt{g/l}$ má potenciál v okolí rovnovážné polohy $\varphi = 0$ kvartický průběh, nikoliv kvadratický. Proto je druhá derivace nulová, avšak poloha $\varphi = 0$ je stále minimem.

Na otázku v zadání úlohy odpovídáme tak, že pro úhlové rychlosti otáčení kyvadla $\omega \leq \sqrt{g/l}$ je stabilní rovnovážná poloha $\varphi = 0$, zatímco pro úhlové rychlosti $\omega > \sqrt{g/l}$ se stabilní rovnovážnou polohou stává

$$\varphi = \arccos \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Úloha VI.3 ... třikrát a dost

Úsek silnice o délce $a = 2,8$ km začíná semaforem s periodou T , na kterém signál zeleného světla trvá po dobu $t_1 = 79$ s. Na konci tohoto úseku je druhý semafor

se stejnou periodou, ale délka trvání téhož signálu je pro něj $t_2 = 53$ s. Na obou semaforech se zelené světlo rozsvítí vždy ve stejný okamžik. Spočítejte, za jak dlouho průměrně přejedete celý úsek silnice (včetně čekání na semaforech), pokud se při jízdě pohybujete rychlostí $v = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Čas potřebný na rozjezdy a brzdění zanedbejte.

Obtížnost této úlohy se skrývá v množství případů, které mohou nastat. Potom je prakticky nemožné najít obecné řešení, které by vyhovovalo všem počátečním podmínkám. Úlohu proto budeme řešit konkrétně pro hodnoty ze zadání. V první části se pokusíme co nejjednodušeji odvodit všechny možné scénáře. Ve druhé části spočítáme průměrnou dobu pro každý z nich.

Abychom vůbec věděli, jaké scénáře se snažíme najít, ukážeme si nejdříve konkrétní výpočet pro $T = 120$ s.

Označme $t'_1 = T - t_1$, $t'_2 = T - t_2$ a $\tau_0 = a/v = 168$ s. První semafor si můžeme představit jako filtr, který nejdříve po dobu t_1 auta propouští a následně po dobu t'_1 nepropouští. Poté, co auto projede prvním filtrem, cestuje čas τ_0 k druhému.

Tady se bude hodit veličina τ , kterou definujeme jako

$$\tau = \tau_0 - nT, \quad (80)$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, aby hodnota τ byla vždy mezi 0 a T . Takto definované τ má význam fázového posunu mezi prvním a druhým semaforem. Ten si můžeme představit jako druhý filtr s parametry t_2 a t'_2 .

Jak vidíme na obrázku 15, oba semaforey lze spojit do jednoho s tím, že ten druhý bude vůči prvnímu posunutý právě o τ . Nyní už jen musíme vyřešit všechny možné situace.

Veličiny τ , t_1 a t_2 dokážeme vyjádřit z číselných hodnot v zadání, čemuž odpovídají i rozměry na obrázku. Jediný neznámý parametr je T . Pokud by hodnota T byla menší, než jaká je na obrázku, úseky t_a až t_d by sice byly jinak dlouhé, ale pořadí by pro ně platily stejné rovnice.

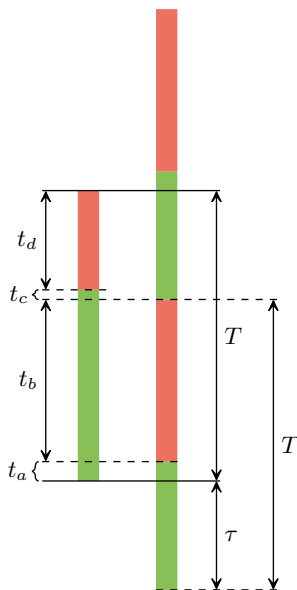
Naopak, pokud by byla T výrazně větší, úsek t_c by zcela zanikl. To je druhá možná situace, která může nastat. Vyřešme nejdříve tu první, tj. tu z obrázku 15.

Auto přes semaforey v každém případě pojede alespoň čas τ_0 . Proto jej v dalších úvahách nebudeme uvažovat a spočítáme pouze čas strávený na semaforech φ . Hledaný celkový čas projetí soustavou potom bude $t = \tau_0 + \varphi$.

V úsecích t_a a t_c auto jednoduše hned projede oběma semaforey. Proto budou odpovídající časy strávené na semaforech $\varphi_a = \varphi_c = 0$.

V dalším úseku už bude situace zajímavější. Pokud auto přijede během času t_b , prvním semaforem projede, ale na druhém bude čekat až do konce t_b . Proto průměrné zpoždění na tomto úseku bude $\varphi_b = t_b/2$.

Obdobně, v poslední části bude auto nejdříve čekat na prvním semaforu, a potom ihned projede druhým semaforem. Dostáváme $\varphi_d = t_d/2$.



Obr. 15: Rozdělení periody $T = 120$ s na časové úseky t_a až t_d . První semafor je vlevo. Z druhého jsou zobrazeny dvě po sobě následující periody, protože je vůči prvnímu posunutý o dobu τ . Platí $t_1 = t_a + t_b + t_c$ a $t_2 = \tau + t_a$.

Celkové průměrné zpoždění spočítáme jednoduše jako součet zpoždění pro možnosti t_a až t_d vážených pravděpodobnostmi toho, že auto dorazí k semaforu právě v dané části periody, tedy

$$\varphi = \frac{t_a}{T}\varphi_a + \frac{t_b}{T}\varphi_b + \frac{t_c}{T}\varphi_c + \frac{t_d}{T}\varphi_d = \frac{t_b^2 + t_d^2}{2T}.$$

Nyní už si jen stačí uvědomit, že číselně platí $t_b = t'_2$ a $t_d = t'_1$ čili (pro $T = 120$ s) máme výsledek

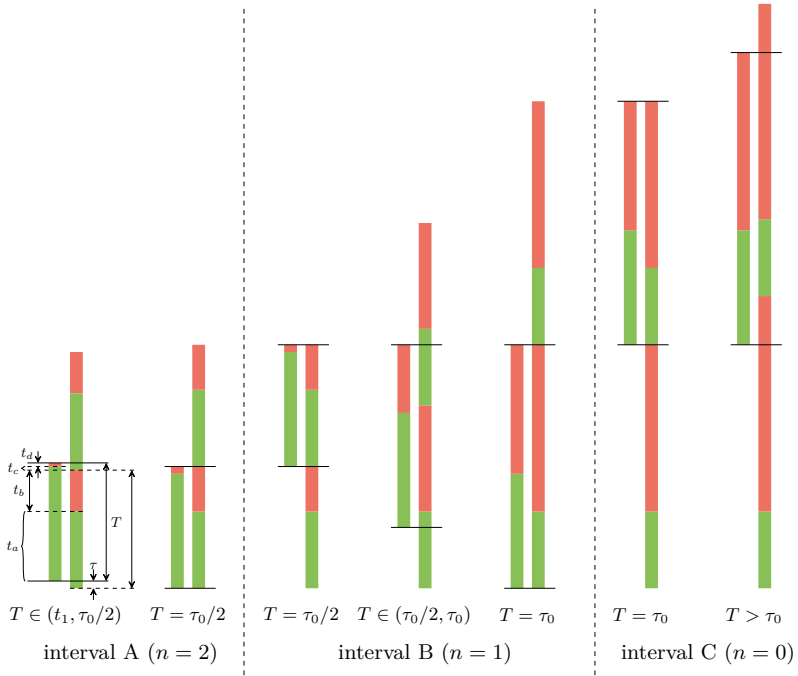
$$t = \tau_0 + \varphi = \frac{a}{v} + \frac{(T - t_1)^2 + (T - t_2)^2}{2T} = 194 \text{ s}.$$

Toto je ale výsledek jen pro jeden konkrétní případ. Pokud by byly zadané parametry jiné, jednotlivé časové úseky by mohly vypadat úplně jinak. Například by se mohla překrývat místa, ve kterých je na obou semaforech červená, a podobně. Pojdme tedy postupně projít všechny možné scénáře.

Reálné hodnoty T se zřejmě pohybují v intervalu $\langle t_1, \infty \rangle$. Ten si rozdělíme na úseky

$$A = \left\langle t_1, \frac{\tau_0}{2} \right\rangle, \quad B = \left\langle \frac{\tau_0}{2}, \tau_0 \right\rangle, \quad C = \langle \tau_0, \infty \rangle.$$

Tyto úseky jsme zvolili proto, že se v nich mění hodnota n z rovnice (80). V A , B a C je n rovno postupně 2, 1 a 0.



Obr. 16: Znázornění situace pro postupně rostoucí hodnotu T .

Interval A

Začneme s $T = t_1$ (v tom případě by na prvním semaforu nikdy nebyla červená) a představme si, co se bude dít, když budeme zvětšovat periodu T až do $T = \tau_0/2 = 84$ s. První semafor bude stále tvořen ze zelené a červené části o délkách

$$\begin{aligned}
 x_z &= t_1, \\
 x_\varepsilon &= T - t_1.
 \end{aligned}$$

Červená se (překvapivě) s rostoucí T prodlužuje. Naopak druhý se bude skládat ze zeleného, červeného a opět zeleného úseku s délkami

$$\begin{aligned}
 y_z &= t_2 - \tau, \\
 y_\varepsilon &= T - t_2, \\
 y'_z &= \tau.
 \end{aligned}$$

Situace se z našeho pohledu změní tehdy, kdy ji bude nutné popsat jinými rovnicemi. K tomu může dojít jen v bodech, ve kterých hranice úseků z druhého semaforu přejde přes hranici úseků v prvním semaforu. Hraniční body prvního semaforu jsou zřejmě v časech

$$\begin{aligned} X_1 = x_z &= t_1, \\ X_2 = x_z + x_{\bar{c}} &= T. \end{aligned}$$

Naopak u druhého semaforu to jsou

$$\begin{aligned} Y_1 = y_z &= t_2 - \tau, \\ Y_2 = y_z + y_{\bar{c}} &= T - \tau, \\ Y_3 = y_z + y_{\bar{c}} + y'_z &= T. \end{aligned}$$

Poslední body u každého semaforu, tj. X_2 a Y_3 , jsou ale zřejmě rovny T . Nemusíme je uvažovat proto, že k jejich překročení dojde právě mezi časovými obdobími A , B a C (stejně jako jsme neuvažovali bod $X_0 = 0$, který je díky periodicitě vždy shodný s X_2). Zatím se však stále pohybujeme v A , kde mohou nastat celkem dva přechody, konkrétně $X_1 = Y_1$ a $X_1 = Y_2$.

Pro první platí

$$X_1 = Y_1 \Rightarrow x_z = y_z \Rightarrow t_1 = t_2 - \tau.$$

Jelikož jsme v A , víme, že $n = 2$, takže dokážeme přímo dosadit za τ do vztahu (80). Dostáváme

$$t_1 = t_2 - (\tau_0 - 2\alpha_{11}) \Rightarrow \alpha_{11} = \frac{1}{2}(t_1 - t_2 + \tau_0) = 97 \text{ s},$$

kde α_{11} má význam toho, jaká by musela perioda T , aby při ní došlo k přechodu prvních hraničních bodů. Jelikož $\alpha_{11} > \tau_0/2$, tato situace nenastane v intervalu A , takže se jí také nebudeme zabývat. Naopak pro α_{12} vychází

$$\begin{aligned} X_1 = Y_2 &\Rightarrow x_z = y_z + y_{\bar{c}} \Rightarrow t_1 = \alpha_{12} - \tau = \alpha_{12} - (\tau_0 - 2\alpha_{12}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_{12} = \frac{1}{3}(t_1 + \tau_0) \doteq 82,3 \text{ s}. \end{aligned}$$

Zřejmě $\alpha_{12} < \tau_0/2$, takže k přechodu dojde v intervalu A .

Zrekapitulujme si, co jsme zatím zjistili. Cílem bylo co nejobecněji popsat všechny možné situace, ke kterým může pro různé hodnoty T dojít. Problém jsme rozdělili na tři intervaly podle toho, jaká je v nich hodnota n . Dále jsme si vyjádřili délky úseků červené a zelené barvy na semaforech. Následně jsme zjistili časy od začátku periody, při kterých dojde na daném semaforu ke změně barvy. Pokud se dva tyto časy z rozdílných semaforů pro nějakou periodu rovnají, dochází v ní ke změně struktury barevných úseků a tedy i ke změně rovnic, které popisují celkovou dobu strávenou na semaforech. Tím se nám intervaly (zatím jen A , další jsme ještě neřešili) rozdělí na podinterval, které musíme vyřešit zvlášť.

Výše uvedený postup se může zdát zbytečně zdlouhavý, ale snažili jsme se o co největší systematicčnost. Jeho výhodou je to, že jej můžeme automaticky, tj. bez dalšího přemýšlení, rovnou aplikovat na další intervaly.

Vraťme se do intervalu A , který se skládá z

$$A_1 = \langle t_1, \alpha_{12} \rangle, \quad A_2 = \langle \alpha_{12}, \tau_0/2 \rangle.$$

Řešme nejdříve A_1 . Periodu opět rozdělíme na čtyři úseky t_a až t_d , které mají ale samozřejmě jiný význam, než na obrázku 15. V prvním a třetím je zelená na obou stranách, takže $\varphi_a = \varphi_c = 0$. Druhý a čtvrtý mají zelenou i červenou. Důležité ale je, že na druhém semaforu po nich následuje zelená. Zpoždění spočítáme obdobně jako v příkladu dříve, takže dostaneme $\varphi_b = t_b/2$ a $\varphi_d = t_d/2$.

Pro úplnost ještě ukážeme, jak lze přímočaře spočítat délky časových úseků. Jednoduše seřadíme hraniční body od prvního k poslednímu a píšeme

$$\begin{aligned} t_a = Y_1 &= t_2 - \tau_0 + 2T, \\ t_b = Y_2 - Y_1 &= T - t_2, \\ t_c = X_1 - Y_2 &= t_1 - 3T + \tau_0, \\ t_d = T - X_1 &= T - t_1. \end{aligned}$$

Výsledné zpoždění v intervalu A_1 bude

$$\varphi_{A_1} = \frac{t_b^2 + t_d^2}{2T} = \frac{(T - t_2)^2 + (T - t_1)^2}{2T}.$$

To je shodou okolností stejně jako v ilustračním příkladu výše.

Situace pro A_2 bude ale jiná, jelikož tam platí $Y_2 > X_1$. Znovu dostaneme čtyři úseky, t_a až t_d . První z nich bude zelený na obou stranách, čili $\varphi_a = 0$. Ve druhém však bude na prvním semaforu zelená a na druhém červená s tím, že červená bude trvat ještě po dobu třetího úseku t_c . To znamená, že všechna auta, která přijedou v úseku t_b , budou muset čekat jak průměrně $t_b/2$, tak ještě celé t_c navíc, neboli $\varphi_b = t_b/2 + t_c$.

V posledních dvou úsecích bude na prvním semaforu vždy červená. Přijede-li auto na první semafor během úseku t_c , bude muset opět čekat nejen svůj průměrný čas $t_c/2$, ale i t_d . Proto platí $\varphi_c = t_c/2 + t_d$. Čekání v posledním úseku bude jednoduše $\varphi_d = t_d/2$.

Časy spočítáme jako

$$\begin{aligned} t_a = Y_1 &= t_2 - \tau_0 + 2T, \\ t_b = X_1 - Y_1 &= t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T, \\ t_c = Y_2 - X_1 &= 3T - t_1 - \tau_0, \\ t_d = T - Y_2 &= \tau_0 - 2T. \end{aligned}$$

Pro výsledné zpoždění v intervalu A_2 dostáváme

$$\begin{aligned}\varphi_{A_2} &= \frac{t_b(t_b + 2t_c) + t_c(t_c + 2t_d) + t_d^2}{2T} = \frac{(t_b + t_c + t_d)^2 - 2t_b t_d}{2T} = \\ &= \frac{(\tau_0 - t_2 - T)^2 - 2(t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T)(\tau_0 - 2T)}{2T}.\end{aligned}$$

Ostatní intervaly

Interval B si rozdělíme na části B' a B'' . V B' jsou na druhém semaforu postupně červený, zelený a červený úsek. V případě B'' je to naopak, tedy zelený, červený a zelený. Při řešení postupujeme analogicky jako v intervalu A s tím rozdílem, že tentokrát platí $n = 1$ čili z (80) plyne $\tau = \tau_0 - T$.

Interval B' přejde v B'' pro hodnotu periody β . Každý z těchto intervalů se dále rozdělí na dva, které označíme po řadě B'_1, B'_2, B''_1 a B''_2 . Hraniční časy budou β'_{12} a β''_{12} . Poslední interval C se rozdělí na C_1, C_2 a C_3 podle časů γ_{12} a γ_{11} . V nich bude τ rovno τ_0 .

Nyní uvedeme podrobné výpočty, vedoucí k těmto závěrům. Veličiny $x_z, x_{\check{c}}$ a X_1 jsou všude stejné. Naopak u druhého filtru se liší jak délky úseků, tak barvy. Příslušné rovnice jsou v tabulce 1. Z nich jsme spočítali Y_1 a Y_2 , viz tabulku 2. Hraniční časy vyšly

$$\begin{aligned}\beta &= \tau_0 - t_2 &= 115 \text{ s}, \\ \beta'_{11} &= \frac{1}{2}(t_1 + \tau_0) &= 123,5 \text{ s}, \\ \beta'_{12} &= \frac{1}{2}(t_1 - t_2 + \tau_0) &= 97 \text{ s}, \\ \beta''_{11} &= t_1 - t_2 + \tau_0 &= 194 \text{ s}, \\ \beta''_{12} &= \frac{1}{2}(t_1 + \tau_0) &= 123,5 \text{ s}, \\ \gamma_{11} &= t_1 + \tau_0 &= 247 \text{ s}, \\ \gamma_{12} &= t_1 - t_2 + \tau_0 &= 194 \text{ s}.\end{aligned}$$

Jak si můžeme všimnout, β'_{11} a β''_{11} nejsou v odpovídajících intervalech, proto je dále neuvažujeme. Přehled hranic všech intervalů je v tabulce 3. Pro každý podinterval jsme dále spočítali délky časových úseků t_a až t_d , výsledky jsou v tabulce 4. Příslušná zpoždění jsou potom v tabulce 5.

Pro přehlednost zopakujeme výsledky z první části

$$\begin{aligned}\varphi_{A_1} &= \frac{t_b^2 + t_d^2}{2T} = \frac{(T - t_2)^2 + (T - t_1)^2}{2T}, \\ \varphi_{A_2} &= \frac{(t_b + t_c + t_d)^2 - 2t_b t_d}{2T} = \frac{(\tau_0 - t_2 - T)^2 - 2(t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T)(\tau_0 - 2T)}{2T}.\end{aligned}$$

Tab. 1: Délky zelených a červených úseků na druhém semaforu. V první části jsou hodnoty vyjádřené pomocí veličiny τ . Všimněme si, že výsledky pro dvojice intervalů A a B'' resp. B' a C jsou shodné. Ve druhé části je za τ dosazeno z rovnice (80).

A	B'	B''	C
$y_z = t_2 - \tau$	$y_{\dot{c}} = T - \tau$	$y_z = t_2 - \tau$	$y_{\dot{c}} = T - \tau$
$y_{\dot{c}} = T - t_2$	$y_z = t_2$	$y_{\dot{c}} = T - t_2$	$y_z = t_2$
$y'_z = \tau$	$y'_{\dot{c}} = \tau - t_2$	$y'_z = \tau$	$y'_{\dot{c}} = \tau - t_2$
$y_z = 2T + t_2 - \tau_0$	$y_{\dot{c}} = 2T - \tau_0$	$y_z = T + t_2 - \tau_0$	$y_{\dot{c}} = T - \tau_0$
$y_{\dot{c}} = T - t_2$	$y_z = t_2$	$y_{\dot{c}} = T - t_2$	$y_z = t_2$
$y'_z = \tau_0 - 2T$	$y'_{\dot{c}} = \tau_0 - t_2 - T$	$y'_z = \tau_0 - T$	$y'_{\dot{c}} = \tau_0 - t_2$

Tab. 2: Časy konců prvního a druhého barevného úseku na druhém semaforu.

	Y_1	Y_2
A	$2T - \tau_0 + t_2$	$3T - \tau_0$
B'	$2T - \tau_0$	$2T - \tau_0 + t_2$
B''	$T - \tau_0 + t_2$	$2T - \tau_0$
C	$T - \tau_0$	$T - \tau_0 + t_2$

Celkové zpoždění v intervalech B'_1 a B'_2 vyšlo

$$\varphi_{B'_1} = \frac{(t_a + t_c + t_d)^2}{2T} = \frac{(T - t_2)^2}{2T},$$

$$\varphi_{B'_2} = \frac{(t_a + t_c + t_d)^2}{2T} = \frac{(3T - t_1 - \tau_0)^2}{2T}.$$

Pro druhou část intervalu B máme

$$\varphi_{B''_1} = \frac{t_b^2 + t_d^2}{2T} = \frac{(T - t_2)^2 + (T - t_1)^2}{2T},$$

$$\varphi_{B''_2} = \frac{(t_b + t_c + t_d)^2 - 2t_b t_d}{2T} = \frac{(\tau_0 - t_2)^2 - 2(t_1 - t_2 + \tau_0 - T)(\tau_0 - T)}{2T}.$$

Nakonec, v posledním intervalu, který teoreticky pokračuje až do nekonečna, platí

$$\varphi_{C_1} = \frac{(t_a + t_c + t_d)^2}{2T} = \frac{(T - t_2)^2}{2T},$$

$$\varphi_{C_2} = \frac{(t_a + t_c + t_d)^2}{2T} = \frac{(2T - t_1 - \tau_0)^2}{2T},$$

$$\varphi_{C_3} = \frac{(t_a + t_b + t_d)^2 + 2t_b T + 2t_c T - t_c^2}{2T} = \frac{3T - 2t_1 - 2\tau_0}{2}.$$

Tab. 3: Přehled všech intervalů výsledného řešení spolu s časy jejich začátků.

Okamžik, ve kterém každý interval končí, je vždy shodný s časem začátku následujícího intervalu. Výjimkou je poslední případ, kde to je ∞s (ano, i takové semaforey existují). Číselné hodnoty jsou zaokrouhleny na sekundy.

interval	začátek intervalu		
A_1	t_1		79 s
A_2	α_{12}	$(t_1 + \tau_0) / 3$	82 s
B'_1	$\tau_0 / 2$		84 s
B'_2	β'_{12}	$(t_1 - t_2 + \tau_0) / 2$	97 s
B''_1	β	$-t_2 + \tau_0$	115 s
B''_2	β'_{12}	$(t_1 + t_2) / 2$	124 s
C_1	τ_0		168 s
C_2	γ_{12}	$t_1 - t_2 + \tau_0$	194 s
C_3	γ_{11}	$t_1 + \tau_0$	247 s

Tab. 4: Délky časových úseků, pro které dokážeme přímočaře spočítat zpoždění.

	t_a	t_b	t_c	t_d
A_1	$2T + t_2 - \tau_0$	$T - t_2$	$t_1 - 3T + \tau_0$	$T - t_1$
A_2	$2T + t_2 - \tau_0$	$t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T$	$3T - t_1 - \tau_0$	$\tau_0 - 2T$
B'_1	$2T - \tau_0$	t_2	$t_1 - t_2 + \tau_0 - 2T$	$T - t_1$
B'_2	$2T - \tau_0$	$t_1 + \tau_0 - 2T$	$2T - \tau_0 - t_1 + t_2$	$\tau_0 - t_2 - T$
B''_1	$T + t_2 - \tau_0$	$T - t_2$	$t_1 + \tau_0 - 2T$	$T - t_1$
B''_2	$T + t_2 - \tau_0$	$t_1 - t_2 + \tau_0 - T$	$2T - \tau_0 - t_1$	$\tau_0 - T$
C_1	$T - \tau_0$	t_2	$t_1 - t_2 + \tau_0 - T$	$T - t_1$
C_2	$T - \tau_0$	$t_1 + \tau_0 - T$	$T - \tau_0 - t_1 + t_2$	$\tau_0 - t_2$
C_3	t_1	$T - t_1 - \tau_0$	t_2	$\tau_0 - t_2$

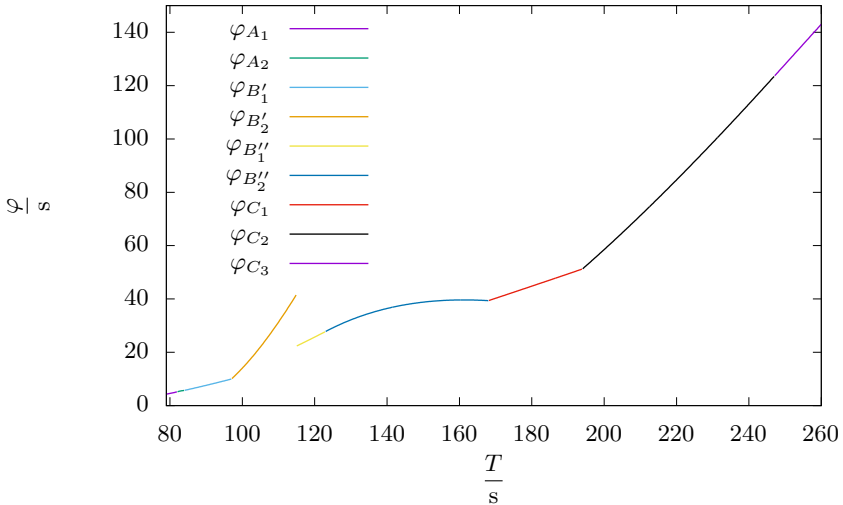
Hledanou dobu průjezdu semaforey získáme snadno tak, že ke zpoždění přičteme hodnotu τ_0 .

Všimněme si, že poslední funkce je přímka v proměnné T . Všechny ostatní jsou nějakou kombinací přímky a hyperboly. Dále, čas φ_b z posledního úseku je zajímavý tím, že je jako jediný větší než T . V tu chvíli tak máme jedinečnou příležitost čekat na semaforech déle než celou jednu periodu.

Poslední zajímavost je vidět z grafu na obrázku 17, kam jsme vynesli všechna předchozí zpoždění. Mezi intervaly B'_2 a B''_1 je zřetelný skok. To znamená, že průměrná doba průjezdu přes oba semaforey může být kratší při celkově delší době trvání červené.

Tab. 5: Průměrné zpoždění na časových úsecích z tabulky 4.

	φ_a	φ_b	φ_c	φ_d
A_1	0	$t_b/2$	0	$t_d/2$
A_2	0	$t_b/2 + t_c$	$t_c/2 + t_d$	$t_d/2$
B'_1	$t_a/2$	0	$t_c/2 + t_d + t_a$	$t_d/2 + t_a$
B'_2	$t_a/2$	0	$t_c/2 + t_d + t_a$	$t_d/2 + t_a$
B''_1	0	$t_b/2$	0	$t_d/2$
B''_2	0	$t_b/2 + t_c$	$t_c/2 + t_d$	$t_d/2$
C_1	$t_a/2$	0	$t_c/2 + t_d + t_a$	$t_d/2 + t_a$
C_2	$t_a/2$	0	$t_c/2 + t_d + t_a$	$t_d/2 + t_a$
C_3	$t_a/2 + t_b$	$T + t_b/2$	$T - t_c/2$	$t_d/2 + t_a + t_b$



Obr. 17: Výsledné zpoždění při průjezdu semaforem pro všechny možné hodnoty periody T .

Úloha VI.4 . . . spatřil jsem kometu

Dlouhoperiodické a neperiodické komety začnou vyvrhovat plyn zpravidla při překročení dráhy Saturnu. Do té doby se pro pozorovatele na Zemi jeví jen jako malé kusy skal, a jsou tedy téměř nepozorovatelné. Uvažujte kometu se vzdáleností v přísluní rovnou $q = 0,5$ au a odhadněte, za jak dlouho od okamžiku, kdy překoná dráhu Saturnu, poprvé překročí dráhu Země. Trajektorie komety má excentricitu velmi blízko jedné.

Skúsme najprv preložiť riešenie do jazyka výpočtov. Dlhoperiodické a neperiodické kométy sa pohybujú po dráhach blízkyh parabole s excentricitou $e = 1$. Ohnisko paraboly podľa prvého Keplerovho zákona leží v Slnku. Tieto dráhy sú ďalej význačné nulovosťou celkovej mechanickej energie. Zaujímá nás čas, ktorý trvá kométe priblíženie sa k Slnku zo vzdialenosti asi $r_1 = 9,6$ au, čo odpovedá veľkej polose Saturnovej dráhy, do vzdialenosti $r_2 = 1,0$ au. Ďalej zo zadania máme vzdialenosť kométy v príslní $q = 0,5$ au.

Prvou úlohou je určiť polohu kométy na dráhe v týchto dvoch okamihoch. Toto môžeme vykonať dvomi rôznymi spôsobmi. Ak poznáme rovnicu kužeľosečky, resp. paraboly v polárnych súradniciach, tak máme

$$r(\theta) = \frac{2q}{1 + \cos \theta},$$

kde θ je pravá anomália - uhol, ktorý zvierá sprievodič v príslní so sprievodičom kométy vo vzdialenosti r od Slnka. Jednoduchou úpravou a dosadením máme

$$\theta = \arccos \frac{2q - a}{a}, \quad \theta_1 = 153,6^\circ, \quad \theta_2 = 90,0^\circ{}^{71}$$

Druhou možnosťou je narysovať si situáciu, či už na milimetrový papier,⁷² alebo napr. v Geogebre. Ak umiestnime Slnko do bodu $(0,0)$ a orientujeme parabolu nahor, dostávame okrem uhlov aj súradnice bodov pre prienik $X_1 = (4,27, 8,60)$ s dráhou Saturnu a $X_2 = (1,00, 0,00)$ s dráhou Zeme. Rovno si môžeme uviesť aj rovnicu našej paraboly

$$y = \frac{1}{2} (x^2 - 1),$$

kde ako jednotku dĺžky prirodzene používame astronomickú jednotku.

Ťažším krokom je ale určiť čas, za ktorý sa medzi týmito bodmi kométa premiestni. Opäť, ak sa v problematike dobre orientujeme, môžeme naraziť na Barkerovu rovnicu pre pohyb po parabolickej dráhe⁷³

$$t = \sqrt{\frac{2q^3}{GM}} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right),$$

⁷¹Správne by mali byť obe hodnoty s mínusom, kométa totiž do príslnia ešte len smeruje a anomálie sa merajú v smere pohybu.

⁷²Postup ako pomocou pravouhlého pravítka, nitky a špendlíka zostrojil parabolu je napr. tu https://en.wikipedia.org/wiki/Parabola#Pin_and_string_construction

⁷³Jedná sa o verziu známejšej Keplerovej rovnice a vzťahu medzi pravou a excentrickou anomáliou v limite $e \rightarrow 1$ a $q = a(1 - e)$ je konštantné.

kde t je čas, za ktorý trvá kométe cesta z príslnia ($\theta = 0^\circ$) do anomálie θ , G je gravitačná konštanta a M je hmotnosť Slnka. V ďalších výpočtoch s výhodou využijeme hodnotu tejto konštanty $GM \doteq 4\pi^2 \text{ au}^3 \cdot \text{y}^{-2}$ použijúc astronomickú jednotku na meranie dĺžky a rok (y) na meranie času. Jednoduchým dosadením dostávame hodnoty časov $t_1 = 2,399$ y a $t_2 = 0,106$ y. Odpoveďou na zadanú otázku je ich rozdiel $T \doteq 2,29$ y.

Čo však v prípade, ak Barkerovu rovnicu nepoznáme a nepodarilo sa nám ju nájsť? Môžeme postupovať priamo podľa druhého Keplerovho zákona! Ten hovorí, že plocha opísaná sprievodičom telesa je priamo úmerná časovému intervalu. Ak určíme hodnotu tejto plošnej rýchlosti a veľkosť plochy výseku paraboly, predelením dostaneme aj čas. Dá sa nahliadnuť, že plošná rýchlosť nadobúda hodnotu $w = \frac{1}{2}r_p v_p$, v príslní je vektor rýchlosti \mathbf{v}_p kolmý na sprievodič dĺžky $r_p = q$, plocha opísaná za krátky čas je plôška trojuholníka $\Delta S = \frac{1}{2}r_p v_p \Delta t$. Rýchlosť v príslní určíme zo zachovania energie, pre parabolickú orbitu

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = 0, \quad v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}},$$

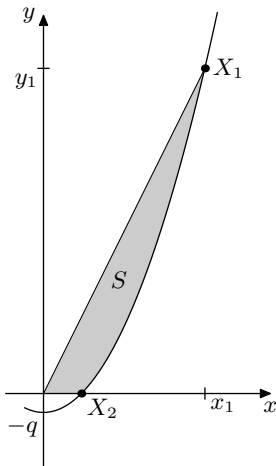
čo je mimochodom známy vzťah pre únikovú rýchlosť. Po číselnom dosadení dostávame $v_p = 12,56 \text{ au} \cdot \text{y}^{-1}$ a $w = 3,1415 \text{ au}^2 \cdot \text{y}^{-1}$.

Plochu výseče môžeme určiť pomocou vhodného softvéru (napríklad Blender), odčítať ako počet štvorcíkov z milimetrového papiera, alebo pomocou integrácie funkčnej závislosti trajektórie¹⁶. Plochu dostaneme ako rozdiel plochy trojuholníka s plochou pod grafom paraboly na obrázku 18, kde y_1, x_1, x_2 sú súradnice bodov X_1 a X_2 určené vyššie.

$$\begin{aligned} S &= \frac{x_1 y_1}{2} - \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{2}(x^2 - 1) dx, \\ S &= \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{x_1^3}{6} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2^3}{6} - \frac{x_2}{2}, \\ S &= 7,204 \text{ au}^2. \end{aligned}$$

Čas medzi prechodmi kométy týmito bodmi dostaneme ako $T = S/w = 2,29$ y rovnako ako v prvom postupe. Celá úloha sa dá taktiež po určení rýchlosti v perihéliu riešiť aj numerickou simuláciou z pohybových rovníc vo vašom oblúbenom programovacom jazyku, alebo tabuľkovom kalkulátore.

Od objavenia takejto kométy máme teda niečo vyše dvoch rokov do potenciálnej zrážky so Zemou. Ďalej vidíme, že vo vnútri obežnej dráhy Zeme strávi kométa veľmi málo času, iba približne dva mesiace. Vzhľadom na prudkú závislosť jasnosti kométy na vzdialenosti od Slnka tiež vidíme, že na pozorovanie jasnej kométy ako C/2020 F3 (NEOWISE) na oblohe je pomerne málo času, v ráde týždňov až mesiacov. Kométy sú na pozemskej oblohe len krátkodobé javy, čo však nebráni tomu, aby mohli ohromiť jej dnešnú populáciu, či desiat ľudstvo v minulosti.



Obr. 18: Výpočet plochy opisanej sprievodičom kométy.

Úloha VI.5 ... těžká pružina

Mějme homogenní pružinu s tuhostí k a hmotností m , jejíž šířka je zanedbatelná vůči její délce. Pružinu uchytneme na jednom konci tak, aby kolem něj mohla rotovat, a následně ji roztočíme úhlovou rychlostí ω . Kolikrát se tato pružina při rotaci prodlouží? Vliv tíhového pole neuvažujte.

Definujeme proměnnou x jakožto vzdálenost od osy otáčení na původní pružině a vzdálenost na prodloužené pružině jako $r(x)$. Počáteční délku pružiny označme x_0 . Vezměme si malý úsek pružiny dr , kterému odpovídá úsek na původní pružině dx s hmotností $dm = \lambda dx$, kde $\lambda = m/x_0$ je délková hmotnost. Aby se rotující úsek stále pohyboval po kružnici, výslednice na něj působících sil musí odpovídat dostředivé síle

$$dF_d = \omega^2 r dm = \lambda \omega^2 r dx.$$

Dále můžeme říct, že tuhost daného úseku lze vyjádřit jako

$$k_{dx} = k \frac{x_0}{dx}.$$

Úsek se prodloužil o $(dr - dx)$, což způsobí sílu pružnosti

$$F = k_{dx} (dr - dx) = kx_0 \frac{dr - dx}{dx} = kx_0 (r' - 1),$$

kde r' značí derivaci r podle x . Změna této síly podle x je

$$\frac{dF}{dx} = kx_0 r''.$$

Na zvolený úsek působí síly pružnosti od obou sousedních částí pružiny. Jejich rozdíl je tak hledanou výslednicí působící na daný úsek, proto se podle úvahy výše rovná dostředivé síle. Uvážíme-li ještě směr působících sil (popřípadě si rozmyslíme fakt, že síla pružnosti s rostoucí vzdáleností klesá čili její změna je záporná, ale velikost dostředivé síly musí být kladná), dostaneme $dF = -dF_d$. Dosadíme ze vztahů výše a máme

$$kx_0 r'' = -\lambda \omega^2 r,$$

což není nic jiného než obyčejná lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$r'' = -\kappa^2 r,$$

kde

$$\kappa = \sqrt{\frac{\lambda \omega^2}{kx_0}} = \frac{\omega}{x_0} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ta má obecné řešení ve tvaru

$$r(x) = Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x}.$$

K určení konstant A a B potřebujeme dvě podmínky. Na upevněném konci pružiny platí $r(0) = 0$, zatímco na tom volném lze psát $F(x_0) = 0$. Z první podmínky dostáváme $A + B = 0$, díky čemuž můžeme celou rovnici upravit na

$$r(x) = 2iA \sin \kappa x.$$

Druhá je potom splněna pro $r'(x_0) = 1$, z čehož vyplývá

$$2iA\kappa \cos \kappa x_0 = 1,$$

což vede na finální řešení ve tvaru

$$r(x) = \frac{1}{\kappa} \frac{\sin \kappa x}{\cos \kappa x_0}.$$

Nás přitom zajímá relativní prodloužení

$$\frac{r(x_0)}{x_0} = \frac{1}{\kappa x_0} \frac{\sin \kappa x_0}{\cos \kappa x_0} = \frac{\operatorname{tg}\left(\omega \sqrt{\frac{m}{k}}\right)}{\omega \sqrt{\frac{m}{k}}}.$$

Všimněme si, že v limitě nulové rychlosti otáčení $\omega \rightarrow 0$ vychází $r(x) = x$, což je přesně to, co bychom čekali. Naopak případ

$$\omega \rightarrow \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

vede na nekonečně velké prodloužení. To se sice na první pohled může zdát pochybné, ale dává to smysl. Představíme-li si například nehmotnou pružinku s tuhostí k

a závažím o hmotnosti m na konci, odstředivá síla poroste s poloměrem jako $F_o = m\omega^2 r$, zatímco síla pružnosti bude $F = kr$. Je zřejmé, že pro

$$\omega > \sqrt{\frac{k}{m}}$$

se bude pružina nekonečně natahovat, naopak pro menší hodnoty úhlové rychlosti zůstane její délka nulová. Tento model je sice jen velmi zjednodušenou verzí hmotné pružiny, ale vidíme na něm, že k nekonečnému prodloužení může dojít pro konečně velké hodnoty ω . Samozřejmě, v reálném světě se nic takového nestane, protože Hookův zákon ve tvaru $F \propto r$ platí pouze pro malé hodnoty prodloužení pružiny.

Úloha VI.P . . . nebezpečnější korona

Dojde-li k výronu koronální hmoty ze Slunce, začne se tato hmota velkou rychlostí šířit prostorem. Někdy může zasáhnout Zemi a ovlivnit její magnetické pole. Odhadněte, jak velké elektrické proudy by mohl takový výron generovat na Zemi v síti elektrického vedení. Na jakých parametrech to závisí? Okomentujte, jaké by měla taková událost dopady na lidskou civilizaci.

Sluneční korona je velmi horké a zářivé okolí Slunce tvořené žhavými plyny unikajícími ze sluneční atmosféry. Teploty zde dosahují až jednoho milionu kelvinů, což je mnohem více než na povrchu Slunce, který má teplotu „pouze“ 6 000 K. Vyšší teplota je způsobena zahříváním magneto-zvukovými vlnami, které se nazývají Alfvénovy vlny. Oblast sluneční korony je magneticky velmi aktivní, tvoří se zde sluneční skvrny, dochází zde k častým erupcím a aktivita také není rovnoměrná, například v blízkosti slunečních skvrn je vyšší. Magnetické siločáry u slunečního povrchu jsou neustále v pohybu a při jejich křížení tak může dojít k jejich přepojení, jak je naznačeno na obrázku 19. Z rozžhavaného povrchu se potom oddělí část plazmatu nazývaná *koronální výron* (*coronal mass ejection*) tvořená především elektrony, protony a heliem, která se pohybuje od Slunce velmi vysokou rychlostí, a to až $3\,000\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Když takový koronální výron dorazí k Zemi, interaguje s magnetosférou a může tak způsobit geomagnetickou bouři. Dochází totiž k interakci magnetického pole Země s magnetickým polem neseným koronálním výbojem. Nabitě částice pak obvykle putují podél magnetických siločar směrem k pólům, kde interagují tentokrát s atmosférou, čímž se podílejí na vytváření polární záře. V důsledku změny rovnováhy tlaku mezi zemskou magnetosférou a slunečním větrem dochází ke změnám geomagnetického pole. Právě na rychlosti této změny jsou závislé naindukované proudy ve vedení vysokého napětí. Velikost těchto proudů odhadneme z druhé Maxwellovy rovnice

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

kde \mathbf{E} je vektor elektrické intenzity a \mathbf{B} je vektor magnetické indukce. Tento vztah lze alternativně vyjádřit pomocí Farradayova zákona

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

kde ε je indukované elektromotorické napětí a Φ je magnetický tok smyčkou.

V této úloze budeme vedení vysokého napětí modelovat jako dva paralelní dráty s odporem R mezi cívkami s indukčností L . Když zanedbáme původní napětí a započítáme jenom to indukované, dostaneme

$$\varepsilon = Ri - L \frac{di}{dt},$$

kde i je aktuální velikost proudu. Řešením diferenciální rovnice získáme proud v čase t

$$i = \frac{\varepsilon}{R} + \frac{K}{R} e^{\frac{R}{L}t}, \quad (81)$$

kde K je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek. Kdy si řekneme, že v čase 0 je proud také nulový, vyjde nám $K = -\varepsilon$. Nyní ještě vyjádříme změnu magnetického toku jako součin plochy a změny magnetické indukce. Plochu smyčky tvořené dvěma dráty o délce l ve vzdálenosti d určíme jako $S = ld$ a odpor drátu jako $R = \rho l$, kde ρ je odpor na jednotku délky. Vzdálenost mezi dráty odhadneme jako $d = 1$ m a délkový odpor jako⁷⁴ $\rho = 10^{-4} \Omega \cdot \text{m}^{-1}$. Indukčnosti cívek transformátoru mohou být řádově desítky henry až desítky milihenry (podle toho, jestli cívka transformuje nahoru nebo dolů).⁷⁵

Změny magnetické indukce jsou běžně zaznamenávány magnetometry v rámci sledování kosmického počasí a jejich velikost kromě intenzity slunečního větru záleží i na denní době (ve dne má větší vliv než v noci) a na vzdálenosti od magnetického pólu. Z magnetických měření bouře⁷⁶ z roku 2003 můžeme odhadnout změnu magnetické indukce na $\Delta B = 4000$ nT, kdy tento pokles trval s výkyvy přibližně dvě hodiny. Protože na takovýchto časových škálách je impedance cívek zanedbatelná (v řádu jednotek ohmů pro 50 Hz), můžeme ji zanedbat a počítat pouze s odporem vedení. Dostaneme tak

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\frac{\Delta B}{\Delta t} ld}{\rho l} = \frac{d}{\rho} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Po dosazení dostáváme velikost proudu

$$I \approx \frac{1 \text{ m}}{10^{-4} \Omega \cdot \text{m}^{-1}} \frac{4000 \text{ nT}}{7200 \text{ s}} \doteq 6 \cdot 10^{-6} \text{ A}.$$

Toto je hodnota proudu naindukovaná ve smyčce tvořené vedením dvou souběžných drátů. Nicméně vedení tvoří i větší smyčky díky zasítování velkých ploch států nebo dokonce kontinentů. S rostoucím charakteristickým rozměrem roste plocha smyčky kvadraticky, zatímco její obvod lineárně. V případě elektrické sítě se však nejedná o jednoduchou smyčku, ale o složitější síť, takže délka kabelů je úměrná vyšší mocnině rozměru než první, ale menší než druhé. Výsledný proud je

⁷⁴Odpor klasického drátu na 230 V je dle https://cs.wikipedia.org/wiki/Elektrický_odpor řádově $10^{-2} \Omega \cdot \text{m}^{-1}$, pro vysoké napětí odhadneme setinový odpor, protože dráty mohou mít přibližně desetinásobný průřez.

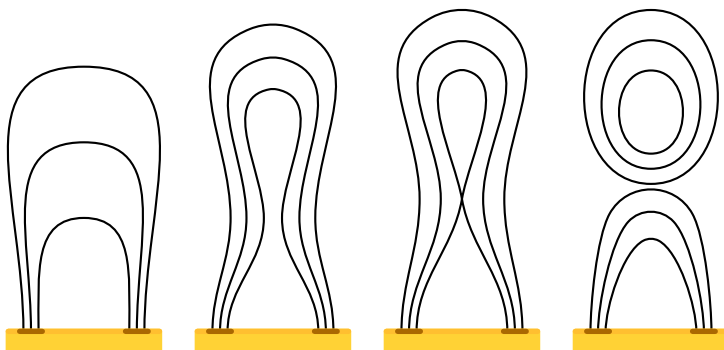
⁷⁵https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=87213

⁷⁶<https://www.spaceweatherlive.com/sv/hjalp/kiruna-magnetometer.html>

těžší odhadnout, ale jistě bude větší než výše uvedená hodnota. Pro větší smyčky a sítě však už není velikost změny magnetické indukce po celé ploše stejná, naindukované proudy se proto liší i dle polohy.

Smyčky mohou být dále tvořeny i proudem tekoucím zemí resp. dráty a zemí, což je v reálném výzkumu těchto proudů hlavním zdrojem. Tento proud potom kromě výše uvedených parametrů závisí i na hloubce průniku do země, která zase závisí na vodivosti podloží a do drátů vysokého napětí se dostává skrze transformátory, které jsou uzemněné. Kvůli komplexnosti sítě a rozložení vodivosti se pak vše řeší numericky.

Vedením vysokého napětí obvykle teče proud o velikosti řádu stovek ampér, což je sice mnohem více než námi spočtená hodnota, ta je však jen velmi nepřesným dolním odhadem. Dalším problémem jsou především rychlé změny velikosti tekoucího proudu, na které nedovedou síťové prvky (například pojistky) dostatečně rychle reagovat. Velikost odhadu navíc závisí především na rychlosti změny magnetické indukce, která je nejdříve nepřesnou částí výpočtu.



Obr. 19: Znárodnění magnetických siločar při koronálním výboji.

V diskusi vlivu na lidskou civilizaci můžeme porovnávat pouze s jedinou obdobnou událostí, která se stala roku 1859 a je známá jako Carringtonova událost. Několik dnů před ní bylo pozorováno mnoho slunečních skvrn, polární záře a poté i silná geomagnetická bouře, při které došlo k velkému výronu koronální hmoty směrem přímo k Zemi, kam doputoval za přibližně 17,5 hodin. Díky velké intenzitě výronu bylo možné pozorovat polární záři i v mírných zeměpisných šířkách. Co se týká vlivu na tehdejší infrastrukturu, událost vyřadila z provozu telegrafy a někteří jejich operátoři byli dokonce zasaženi elektrickým proudem. V té době však elektřina nebyla zdaleka využívána tak hojně jako dnes, tedy ani následky nebyly tak rozsáhlé. Pokud by podobná bouře zasáhla Zemi dnes, došlo by vlivem naindukovaného proudu ve vedení vysokého napětí k poruchám transformátorů a nejspíš i k rozsáhlým blackoutům. Kvůli poničené infrastruktuře by také mohlo trvat velmi dlouho obnovení dodávek elektřiny. Změny v magnetickém poli Země by mohly nepřímo ovlivnit lidmi vysílané elektromagnetické vlnění jako rádio, telefonní sig-

nál či 4G a wifi-sítě⁷⁷ Kromě toho i slabší bouře by vystavila silnému ionizačnímu záření satelity na oběžné dráze,⁷⁸ jejichž poškození by mohlo vést k výpadkům GPS sítě a navigačních systémů.

Jelikož ke slunečním bouřím různé síly dochází neustále, je téměř jisté, že jednou se objeví silná bouře, která Zemi zasáhne. Vliv na infrastrukturu pak nebude všude stejný, ale bude se lokálně lišit podle vzdáleností od magnetických pólů, vzdáleností od pobřeží i vodivosti podloží. Například oblast USA je těmito událostmi ohrožena o něco více než Evropa kvůli rozdílné poloze zeměpisného a magnetického pólu, kdy magnetický pól je posunut směrem k Americe. Díky pozorování Slunce můžeme tyto bouře předvídat a mít tak několik hodin na přípravu. Nezanedbatelný vliv mohou mít i na plánované kosmické lety na Mars, kde by kosmonauty ve vesmíru již nechránilo magnetické pole Země, takže by pro ně byly mnohem nebezpečnější.

⁷⁷Ne však fatálně, protože na rovinnou vlnu v komunikačním frekvenčním pásmu šířící se atmosférou nemají změny geomagnetického pole vliv.

⁷⁸Které jsou sice chráněny magnetosférou, ale mohou je poškodit urychlené populace částic v radiačních páslech (vzniklé v důsledku bouře).



Zadání experimentálních úloh

Úloha I.E ... dopadová

13 bodů

Změřte závislost průměru kráteru, vzniklého dopadem kamene do vhodného pís-koviště, na hmotnosti kamene a na výšce vypuštění. Závisí velikost kráteru jenom na energii dopadu? Doporučujeme měřit, když je písek suchý. (řešení str. 113)

Úloha II.E ... hrnečku dost

13 bodů

Proměřte závislost rychlosti, s jakou přibývá kvásek, na čase a na okolní teplotě. *Soutěž* V průběhu měření vyfoťte sebe nebo třeba buchty, které ze vzniklého kvásku upečete, a fotografie nám pošlete na adresu fykos-solutions@fykos.cz. Vystavíme je na našem Facebooku a Instagramu a autora nejlepší fotky oceníme zbrusu novými FYKOSími ponožkami. (řešení str. 121)

Úloha III.E ... difuze

12 bodů

Určitě jste ve škole slyšeli o tepelném pohybu molekul, jako je difuze či Brownův pohyb. Změřte časovou závislost velikosti barevné skvrny ve vodě a vypočtete difuzní konstantu. Proveďte měření pro několik různých teplot a sestrojte graf teplotní závislosti difuzní konstanty. Jak byste mohli zařídit, aby byla teplota v průběhu každého měření konstantní? (řešení str. 124)

Úloha IV.E ... dechberoucí stříkačky

13 bodů

Určete velikost třecí síly mezi pístem a stěnou injekční stříkačky, která vám přišla poštou. (řešení str. 132)

Úloha V.E ... neklamou nás?

12 bodů

Změřte kapacitu libovolné baterie (například tužkové AA) a porovnejte ji s deklarovanou hodnotou. (řešení str. 137)

Úloha VI.E ... rozlité sklenička

12 bodů

Veźměte si skleničku, plechovku či jinou válcově symetrickou nádobu a změřte závislost úhlu náklonu, při kterém se převrhne, na množství vody uvnitř. Doporučujeme použít nádobu s větším poměrem výšky ku průměru podstavy. (řešení str. 142)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I.E ... dopadová

Změřte závislost průměru kráteru, vzniklého dopadem kamene do vhodného pís-koviště, na hmotnosti kamene a na výšce vypuštění. Závisí velikost kráteru jenom na energii dopadu? Doporučujeme měřit, když je písek suchý.

Teória

Hodnota priemeru kráteru vzniknutého dopadom telesa do piesku závisí na ki-netickej energii telesa, jeho rozmeroch, ale aj zložení. Významne ju ovplyvňujú aj vlastnosti použitého piesku, napríklad jeho vlhkosť a tiež veľkosť pieskových častíc. Vznik kráteru v dôsledku dopadu sa nazýva impaktný proces. Ten môžeme rozdeliť na tri časti:

1. Dotyk, kompresia – Počas tejto fázy dochádza k premene kinetickej energie dopadajúceho telesa na energiu seizmických vln a teplo. V mieste dopadu dochádza k stláčaniu piesku (vznik prechodnej dutiny) a jeho vyvrhnutiu do strán od miesta dopadu. Kinetická energia E_k dopadajúceho telesa je daná jeho hmotnosťou m a rýchlosťou v ako

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

2. Vznik dutiny – Nárazová vlna slabne a stlačený piesok je opäť vyvrhnutý do okolia. Pri rýchlostiach, ktoré kameň dosiahne, vzniká dopadový kráter. Tvar kráteru závisí na uhle dopadu telesa a tiež na rýchlosti, ak nedopadá kolmo.
3. Formovanie tvaru kráteru – vyvrhnutý materiál sa vplyvom gravitácie vracia zosúvaním späť do vyhlúbenej dutiny a vzniká finálny kráter.

Objem vyvrhnutého materiálu V by mal byť úmerný kinetickej energii dopa-dajúceho telesa, v našom prípade kameňa. Kinetickú energiu kameň získa voľným pádom z určitej výšky h , kedy sa jeho potenciálna energia E_p zmení na kinetickú. Teda

$$E_k = E_p = mgh.$$

Keďže nemežeme objem vyvrhnutého materiálu, ale iba jeho priemer d , teda jeden rozmer, priemer by mal byť potom úmerný tretej odmocnine potenciálnej energie

$$d \propto \sqrt[3]{mgh}.$$

Meranie a diskusia jeho presnosti

Pre meranie sme si vybrali postupnosť desiatich kameňov s rastúcou veľkosťou, ktorej zodpovedá aj rastúca hmotnosť. Jednotlivé kamene sme si označili číslami

od 1 do 10, môžeme ich vidieť na obrázku 20. Používali sme tiež dva metre, oba s veľkosťou najmenšieho dielika 1 mm. Pomocou jedného z nich sme určovali výšku vypustenia kameňa nad zemou a druhý, položený na zemi, slúžil ako mierka pri vzniknutých kráteroch, viď obrázok 21. Kráter sme si vždy po odstránení kameňa odfotili čo najviac kolmo zhora spolu s metrom ako našou mierkou.



Obr. 20: Kamene použité pri meraní.

Hmotnosti kameňov sme zmerali digitálnymi váhami, pričom každý kameň sme vážili trikrát a na záver sme vypočítali priemernú hodnotu a štatistickú odchýlku merania. Do celkovej odchýlky merania hmotnosti sme započítali aj nepresnosť váh. Pre menšie kamene sme zhruba odmerali taktiež ich objem, a to ponorením do vody v odmernom valci a porovnaním objemov vo valci pred a po ponorení kameňa. Vzhľadom na veľký najmenší dielik stupnice odmerného valca (2 ml) je toto meranie zatažené veľkou chybou. Umožňuje nám však aspoň približne určiť hustotu použitých kameňov. Všetky tieto charakteristiky kameňov sú uvedené v tabuľke 6.

Fotografie kráterov sme následne spracovali v programe ImageJ. Fotografie niektorých kráterov sú na obrázkoch 22, 23 a 24. Pri každej fotografii sme najprv kalibrovali mierku pomocou vyfoteneného pravítka (použili sme z neho vždy 10 cm). Následne sme zmerali priemer krátera v troch smeroch. Keďže kamene boli nesúmerné, také boli aj krátery. Preto sme jeden priemer zmerali v smere najdlhšieho rozmeru, druhý kolmo naň a tretí približne diagonálne. Z týchto nameraných dĺžok sme spočítali priemernú hodnotu a tiež štandardnú odchýlku, ktorá nám dáva informáciu hlavne o súmernosti krátera - čím je vyššia, tým menšia je kruhosť krátera. Výsledky sú v tabuľkách 7 a 8.

Do celkovej odchýlky merania priemeru krátera ale prispieva viacero faktorov.



Obr. 21: Usporiadanie pomôcok pri meraní.

Tie nie sú v štatistických odchýlkach v tabuľkách zahrnuté, ale postupne si ich rozoberieme. Pri kalibrácii mierky v programe ImageJ sa dopúšťame chyby nanajvyš 1 mm v dôsledku zlého vyznačenia dĺžky 10 cm. Avšak ďalšia chyba nastáva kvôli tomu, že celý vyznačený úsek nebol fotený úplne kolmo, v dôsledku čoho sú dĺžky na obrázku skreslené. Chybu kalibrácie spôsobenú týmto skreslením odhadujeme na maximálne 3 mm. Oveľa väčšiu nepresnosť nám do merania prináša chyba určenia okrajov krátera, a to odhadom 1 až 2 cm. Presné určenie okrajov krátera z fotografie bolo často viac či menej nejednoznačné. Záviselo to na osvetlení fotografie, ale aj na tvári krátera. Pomôcť si bolo možné väčšími zrníčkami piesku nahromadenými v okolí hrany krátera.

Pri porovnaní nameraných závislostí s teoretickým predpokladom nemôžeme kvôli týmto nepresnostiam očakávať dokonalú zhodu. Budeme tak sledovať porovnanie trendov. Na tvar, a teda súbežne aj priemer krátera, vplýval vo veľkej miere aj tvar kameňa. Ten nebol súmerný, takže veľkosť krátera závisela aj na tom, aké bolo natočenie kameňa pri dopade. Neistotu výšky vypustenia kameňa nad zemou odhadujeme na 1 cm.

Tab. 6: Charakteristiky kameňov – hmotnosť, chyba hmotnosti, objem a hustota. Neistota merania objemu je 1 ml. Z tohto dôvodu sú uvedené hustoty pre menšie kamene skôr orientačné.

kameň	$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{u_m}{\text{g}}$	$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{\rho}{\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$
1	2,85	0,01	1,5	1,7
2	7,04	0,01	3,5	2,0
3	14,58	0,01	5,0	2,9
4	26,48	0,01	10,0	2,6
5	44,18	0,02	17,0	2,6
6	57,28	0,02	22,5	2,5
7	87,43	0,02		
8	165,85	0,01		
9	589	2		
10	976	2		

Tab. 7: Priemery kráterov, 1. časť.

$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{d_1}{\text{cm}}$	$\frac{d_2}{\text{cm}}$	$\frac{d_3}{\text{cm}}$	$\frac{d_4}{\text{cm}}$	$\frac{d_5}{\text{cm}}$
20	$1,9 \pm 0,1$	$2,6 \pm 0,5$	$3,6 \pm 0,1$	$3,8 \pm 0,1$	$5,5 \pm 0,4$
40	$2,4 \pm 0,1$	$3,4 \pm 0,4$	$4,4 \pm 0,2$	$4,2 \pm 0,3$	$5,8 \pm 0,7$
60	$2,6 \pm 0,2$	$4,4 \pm 0,3$	$4,0 \pm 0,3$	$5,1 \pm 0,2$	$7,4 \pm 0,3$
80	$3,0 \pm 0,1$	$4,2 \pm 0,1$	$5,3 \pm 0,8$	$6,4 \pm 0,2$	$7,4 \pm 0,1$
100	$3,1 \pm 0,1$	$4,3 \pm 0,4$	$5,5 \pm 0,5$	$6,2 \pm 0,6$	$7,7 \pm 0,8$
120	$3,2 \pm 0,1$	$4,6 \pm 0,2$	$6,4 \pm 0,5$	$6,9 \pm 0,1$	$7,3 \pm 0,2$
140	$3,5 \pm 0,2$	$4,8 \pm 0,4$	$5,5 \pm 0,7$	$7,6 \pm 0,6$	$7,8 \pm 0,3$

Porovnanie závislostí

Do grafu na obrázku 25 sme vyniesli závislosť priemeru krátera d na výške vypustenia kameňa h . Porovnaním trendov pre jednotlivé kamene vidíme, že majú až na odchýlky zhruba rovnaký priebeh. Chybové úsečky jednotlivých bodov sme kvôli prehľadnosti do grafu nevyznačili. Ak by sme tieto dáta porovnali so závislosťou $y = kx^{\frac{1}{3}}$, kde k je konštanta, vidíme veľmi podobný trend. Nameraná závislosť pre každý kameň zodpovedá odhadom závislosti približne $d \approx 2,2(mgh)^{\frac{1}{3}}$. Tieto funkcie sme pre prehľadnosť do grafu tiež nevyznačili.

Pre lepšie potvrdenie predpovedanej závislosti sme vykreslili graf závislosti priemeru krátera d na kinetickej energii kameňa pri dopade E , a to v logaritmickú škálu (viď obrázok 26). Do grafu sme tiež vyniesli závislosť $d = \sqrt[3]{E}$. Vidíme, že namerané dáta pre prvých osem kameňov dobre kopírujú túto predpovedanú závislosť. Posledné dva kamene sa od tejto závislosti odchyľujú, nimi preložená priamka



Obr. 22: Kráter od kameňa 4 po vypustení z výšky 140 cm.

rastie rýchlejšie. To môže byť chyba merania veľkosti krátera alebo vplyv tvaru kameňa na výsledný kráter. Ak sa pozrieme na dátové body ako celok, môžeme si všimnúť, že priamka preložená týmito dátami vo všeobecnosti rastie trochu menej prudko ako je teoretická predpoveď. Jedným z možných vysvetlení je, že odpor vzduchu, ktorý na kameň pri páde pôsobí, nie je zanedbateľný, a teda kinetická energia kameňa tesne pred dopadom je menšia, ako je jeho počiatočná potenciálna energia.

Záver

Zmerali sme závislosť priemeru krátera na výške vypustenia kameňa a tiež na kinetickej energii kameňa tesne pred dopadom. Obe závislosti v rámci odchýlky zodpovedali teoretickej predpovedi, teda že priemer krátera závisí na tretej odmocnine kinetickej energie kameňa. Pozorovali sme miernu odchýlku od teoretickej predpovede, ktorá je pravdepodobne dôsledkom neoprávneného zanedbania odporu vzduchu pri páde.



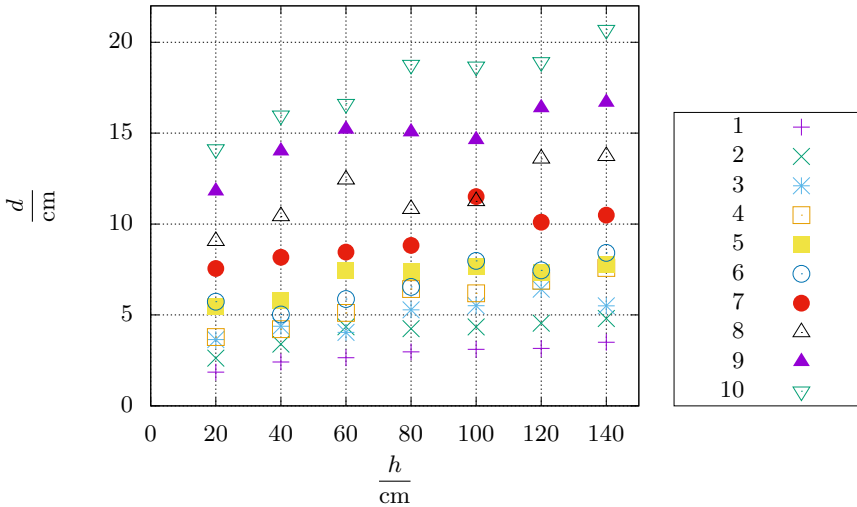
Obr. 23: Kráter od kameňa 7 po vypustení z výšky 120 cm.



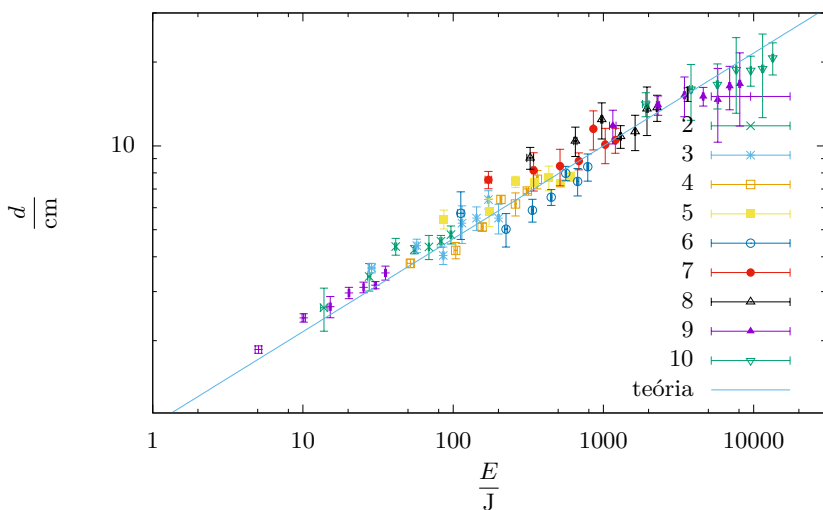
Obr. 24: Kráter od kameňa 4 po vypustení z výšky 80 cm.

Tab. 8: Priemery kráterov, 2. časť.

$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{d_6}{\text{cm}}$	$\frac{d_7}{\text{cm}}$	$\frac{d_8}{\text{cm}}$	$\frac{d_9}{\text{cm}}$	$\frac{d_{10}}{\text{cm}}$
20	$5,7 \pm 1,1$	$7,6 \pm 0,5$	$9,1 \pm 0,8$	$11,8 \pm 1,6$	$14,1 \pm 1,4$
40	$5,0 \pm 0,7$	$8,2 \pm 1,3$	$10,4 \pm 1,3$	$14,0 \pm 1,1$	$16,0 \pm 3,6$
60	$5,9 \pm 0,6$	$8,5 \pm 1,3$	$12,4 \pm 1,8$	$15,2 \pm 2,5$	$16,6 \pm 3,1$
80	$6,5 \pm 0,4$	$8,8 \pm 0,6$	$10,8 \pm 1,0$	$15,1 \pm 1,2$	$18,8 \pm 5,7$
100	$8,0 \pm 0,5$	$11,5 \pm 1,8$	$11,2 \pm 1,6$	$14,6 \pm 4,3$	$18,7 \pm 2,3$
120	$7,5 \pm 0,8$	$10,1 \pm 1,5$	$13,6 \pm 2,7$	$16,4 \pm 2,9$	$18,9 \pm 6,3$
140	$8,4 \pm 0,9$	$10,5 \pm 1,1$	$13,7 \pm 1,5$	$16,7 \pm 4,9$	$20,7 \pm 2,7$



Obr. 25: Graf závislosti priemeru krátera na výške vypustenia kameňa pre všetky merané kamene.



Obr. 26: Logaritmický graf závislosti priemeru vzniknutého krátera na energii kameňa pri dopade.

Úloha II.E ... hrnečku dost

Proměřte závislost rychlosti, s jakou přibývá kvásek, na čase a na okolní teplotě. Soutěž V průběhu měření vyfoťte sebe nebo třeba buchty, které ze vzniklého kvásku upečete, a fotografie nám pošlete na adresu fykos-solutions@fykos.cz. Vystavíme je na našem Facebooku a Instagramu a autora nejlepší fotky oceníme zbrusu novými FYKOSími ponožkami.

Teorie

Při kynutí kvásku pozorujeme vlastně množení kvasinek, které při pučení (rozdělení mateřské buňky na dvě dceřiné) rozkládají cukr na alkohol a oxid uhličitý. Právě tím je zvětšován objem kvásku. Ideální teplota pro množení kvasinek je kolem¹ 30 °C, z tohoto důvodu byl experiment proveden pro teploty v rozmezí 25 °C až 40 °C. Vzhledem k tomu, že jedna kvasinka se rozdělí vždy na dvě dceřiné, které se následně také dělí, lze předpokládat exponenciální průběh.

Samotný objem závisí především na teplotě kvůli velké teplotní roztažnosti plynu. Rychlost množení je pak ovlivněna mnoha faktory, mezi hlavní patří nejen počáteční množství kvasinek, jejich druh a aktivita, ale také teplota, při které pučení probíhá, a množství cukru. Pokud droždí není dostatečně dobře promíseno s cukrem, dochází k růstu objemu pomaleji, neboť má k cukru přístup jen část kvasinek. Proto se ke kvasinkám přidává ještě nějaká tekutina (v našem případě mléko), která usnadní promísení, protože se v ní cukr s droždím alespoň částečně rozpustí.

Měření

Během experimentu je třeba dát pozor na udržování stejných počátečních podmínek pro každé měření. Vždy jsme použili zarovnanou lžičku moučkového cukru (je nutné dát vždy stejné množství, neboť při různém bychom nemohli správně zhodnotit vliv teploty). Pokus by mohla ovlivnit také hrubost zrn cukru, protože každý druh se rozpouští jinak dobře, a proto je vhodné použít pokaždé stejný. Objem jsme měřili pomocí odměrného válce, který měl stupnici s dílky po 5 ml.

Na druhu nádoby také záleží, jelikož po určité době dochází k oddělení částí suspenze. Lehčí kvasinky vyplavou na povrch, zatímco mléko s rozpuštěným cukrem se drží u dna. U vyšší odměrky pak mají kvasinky ve vyšších vrstvách menší množství cukru v okolí, a tudíž může docházet k méně častému pučení než v mělčí odměrce. Nicméně ve vysoké nádobě můžeme určovat objem s lepší přesností, neboť je snazší vyrobit stupnici s jemnějším dělením. Z tohoto důvodu jsme pro měření použili odměrný válec.

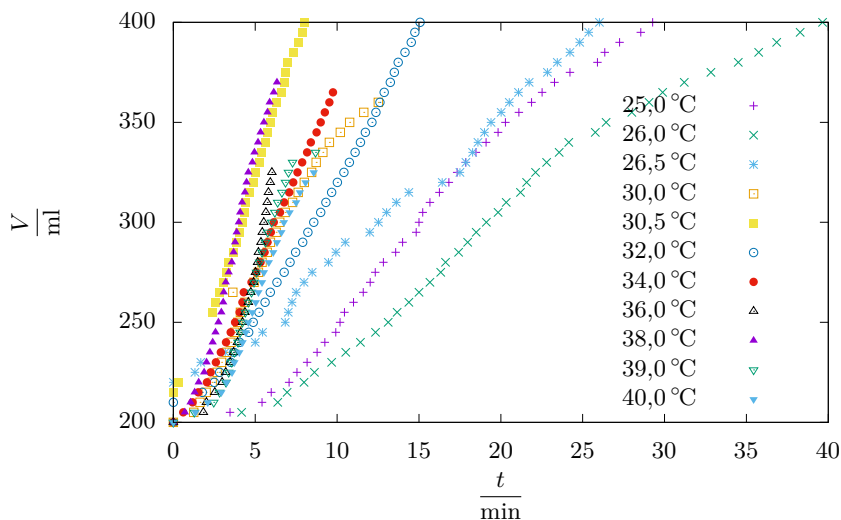
Konstantní teplotu jsme udržovali vodní lázní a kontrolovali teploměrem. Droždí jsme rozmělnili na co nejmenší části, vhodili spolu s cukrem do odměrného válce, dolili do 200 ml mlékem a promíchali. Od této chvíle jsme na stopkách měřili čas

¹NEUPAUEROVÁ, Karla. Bakalářská práce: Využití kvasinek v potravinářském průmyslu. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2012. Dostupné z http://digilib.k.utb.cz/bitstream/handle/10563/21723/neupauerová_2012_bp.pdf?sequence=1&isAllowed=y

a zaznamenávali jej pokaždé, když se objem zvětšil o 5 ml. Objem jsme odečítali z rysky na středu mezi nejnižším a nejvyšším bodem hladiny.

V případě, že stěna z kvasinek byla na hladině moc tenká, začaly bubliny plynu prskat a plyn se uvolňoval do okolí. V tomto okamžiku jsme měření ukončili. Z důvodu možného praskání bublinek není vhodné po začátku měření směs promíchávat, neboť by se tím objem výrazně snížil, i když na úkor toho dochází k oddělování částí suspenze a kvasinky tak mají horší přístup k cukru rozpuštěnému v mléce.

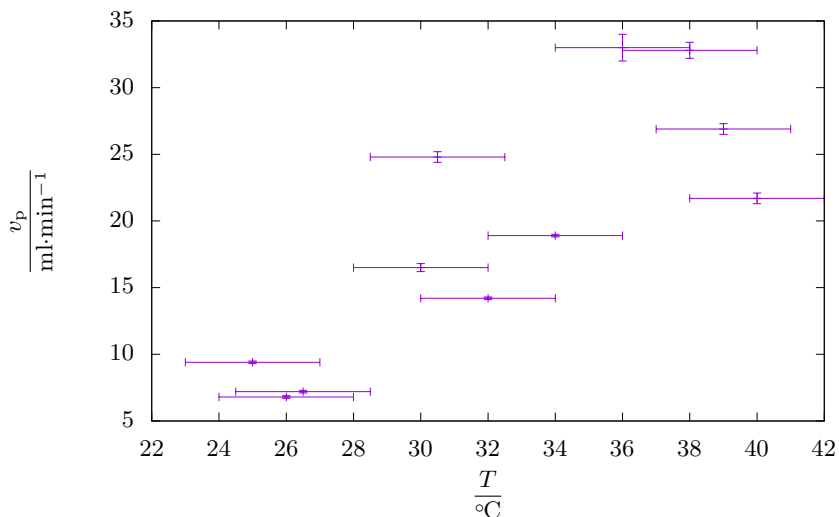
Naměřená data jsme vynesli do grafu 27. Pro každou teplotu jsme je proložili regresní přímkou, hodnoty směrnice jsou uvedeny v tabulce 9 a znázorněny v grafu 28.



Obr. 27: Závislost objemu kvásku na čase pro různé teploty.

Diskuze

Z regrese jsme vyjmuli počáteční hodnoty, kdy pučení probíhalo ještě velmi pomalu. Z naměřených dat je patrné, že průběh byl většinou víceméně lineární. To lze odůvodnit především špatnou distribucí cukru ke kvasinkám a také chladnutím prostředí s kvasinkami, když vystoupaly v odměrném válci nad hladinu vodní lázně a jejich teplota šla následně regulovat jen velmi těžko. Po konci měření byla teplota kvasinek většinou o 1 až 2 °C nižší než počáteční, což může být, spolu s nedostatkem cukru, jedním z důvodů poklesu rychlosti pučení po určitém čase. Dalším z důvodů je též praskání bublinek vzduchu, které nemusíme vždy zpozorovat a zanáší tak do měření další nejistotu.



Obr. 28: Závislost rychlosti pučení kvasinek na teplotě.

Tab. 9: Závislost rychlosti pučení kvasinek na teplotě, která byla měřena s chybou 2 °C.

T °C	v_p ml·min ⁻¹
25,0	9,4 ± 0,1
26,0	6,8 ± 0,1
26,5	7,2 ± 0,1
30,0	16,5 ± 0,3
30,5	24,8 ± 0,4
32,0	14,2 ± 0,1
34,0	18,9 ± 0,1
36,0	33,0 ± 1,0
38,0	32,8 ± 0,6
39,0	26,9 ± 0,4
40,0	21,7 ± 0,4

Rychlosti množení kvasinek v závislosti na teplotě prostředí jsme vynesli do grafu 28, kde je patrné, že v rámci chyby roste rychlost pučení s rostoucí teplotou až do svého maxima při teplotě 36 °C. Z tohoto grafu lze usuzovat, že ideální teplota pro množení pekařských kvasnic je kolem 36 °C.

Závěr

V rámci experimentu se nám nepodařilo potvrdit počáteční předpoklad exponenciálního nárůstu objemu. K tomu by došlo v ideálních podmínkách, které však nejsme schopni s běžným vybavením zaručit. Místo toho jsme pozorovali lineární závilost objemu na čase.

Ověřili jsme, že rychlost pučení kvasinek závisí na teplotě a to tak, že nejlepší podmínky pro množení jsou kolem 36 °C. Tento údaj se sice plně neshoduje s citovanou literaturou (kde byla uvedena ideální teplota 30 °C), to však může být způsobeno jiným druhem kvasnic. Pod 30 °C probíhá množení velmi pomalu, s rostoucí teplotou se zvyšuje tendence kvasinek množit se až do zmíněných 36 °C, odkud následně pozvolna klesá.

Úloha III.E . . . difuze

Určitě jste ve škole slyšeli o tepelném pohybu molekul, jako je difuze či Brownův pohyb. Změřte časovou závislost velikosti barevné skvrny ve vodě a vypočtěte difuzní konstantu. Proveďte měření pro několik různých teplot a sestrojte graf teplotní závislosti difuzní konstanty. Jak byste mohli zařídit, aby byla teplota v průběhu každého měření konstantní?

Teorie

Difuze je popsána rovnicí

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\Delta n = 0,$$

kde $n = n(\mathbf{x}, t)$ je koncentrace a D difuzní konstanta. Tento vztah je také známý pod názvem rovnice vedení tepla a má fundamentální řešení

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4Dt}}. \quad (82)$$

Můžeme si povšimnout, že se jedná o statistické normální rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 2Dt$. Ztotožníme-li posunutí částic x za čas t s tímto rozptylem, dostáváme

$$x = \sqrt{2Dt}. \quad (83)$$

Při výpočtech budeme předpokládat, že tento vztah platí, a jeho validitu podrobněji rozebereme na konci.

Pro posuvný pohyb kulové částice o hmotnosti m a poloměru r , která se nachází v prostředí charakterizovaném teplotou T a dynamickou viskozitou η , lze konstantu D vyjádřit jako

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}, \quad (84)$$

kde k_B je Boltzmannova konstanta.

Chyby určujeme pomocí zákona přenosu chyb pro nezávislé proměnné

$$\sigma_V = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial P_i} \sigma_{P_i} \right)^2}, \quad (85)$$

kde hledáme chybu veličiny V , jež závisí na proměnných P_1, \dots, P_n .

Výsledky měření

Měření probíhalo přibližně za normálního tlaku při teplotách 4°C , 11°C , 20°C a 23°C .

Nejprve jsme naplnili misku či talířek vodou a nechali odstát, aby pro následné měření měla voda teplotu okolního vzduchu. Pouze pro teplotu $T = 4^\circ\text{C}$ se nám takové podmínky nepodařilo zajistit, okolní vzduch měl tedy teplotu pokojovou.

Poté jsme do vody nasypali potravinářské barvivo. Kamerou mobilního telefonu se zapnutým programem *FrameLapse* jsme misku natáčeli (program udělal jeden snímek za pět sekund), přičemž pro referenci jsme k ní položili pravítko a nechali jsme barevnou skvrnu expandovat ve vodě.

Následně jsme v programu *OpenShot Video Editor* pro jednotlivé snímky odečetli jejich indexy f , ze kterých jsme díky znalosti periody snímků získali jejich časy t . Pro nejnižší index snímku v daném měření jsme položili $t = 0\text{s}$, zbylé časy pak odpovídají pětinašobku (periody snímků) rozdílů mezi nějakou hodnotou f a f_0 , jíž odpovídá $t = 0\text{s}$. Pro každou teplotu jsme v programu *PixelZoom* stanovili měřítko (kolik pixelů odpovídá jednomu centimetru) a změřili rozměry barevné skvrny, a to vždy podél dvou (náhodných) na sebe kolmých os, jež budeme dále označovat a a b . Tyto veličiny v rámci našeho experimentu popisují prakticky stejný jev (nemělo by záležet na tom, v jakém směru rychlost difuze měříme), nebudeme proto jejich vztah dále uvažovat a budeme s nimi počítat jako s nezávislými veličinami.

Veličina x z teorie značí polovinu rozměru barevné skvrny, platí tedy $x_a = a/2$ a $x_b = b/2$. Ve vzorcích budou obě proměnné reprezentovány společně písmenem x . Záměrně se vyhýbáme slovům „průměr“ a „poloměr“. Teoreticky by totiž skvrna měla být po celý experiment kruhová, nicméně reálně mohl být tvar mírně odlišný. Proto také měříme dva na sebe kolmé rozměry, nikoliv jen jeden.

Nejistotu odečtení jedné vzdálenosti odhadujeme jako 5 px. Nejistota určení rozměrů skvrny tedy závisí na tom, kolik pixelů odpovídá jednomu centimetru. Konstanta přepočtu – označme ji k (její jednotkou je pixel na centimetr) – byla různá pro každé měření a její hodnoty jsou zaznamenány v tabulce 10.

Potom platí

$$a [\text{cm}] = k^{-1} \cdot a [\text{px}],$$

přičemž chyba je dle zákona přenosu chyb

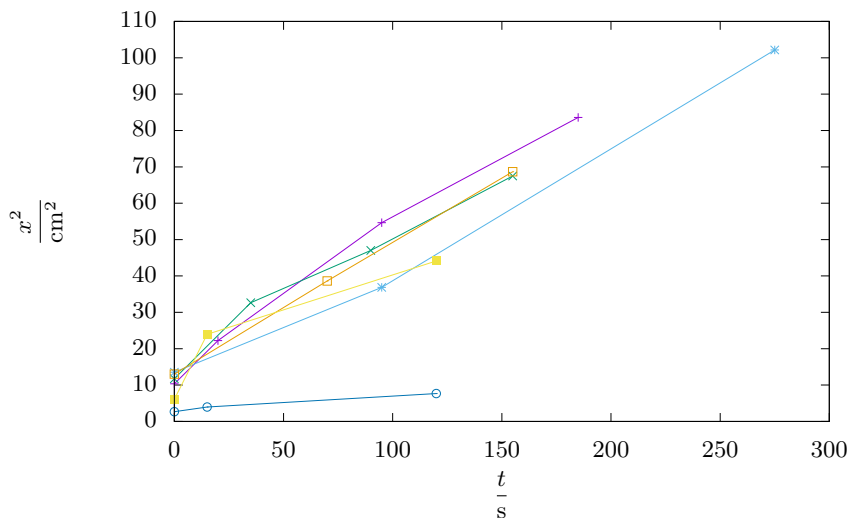
$$\sigma_a [\text{cm}] = k^{-1} \cdot \sigma_a [\text{px}] = k^{-1} \cdot 5 \text{ px}.$$

Chyba x_a je pak jednoduše $\sigma_{x_a} = \sigma_a/2$. Pro b a x_b postupujeme zcela analogicky. Ve zbytku textu je výrazem x vždy myšleno $x [\text{cm}]$. V tabulce 10 jsou uvedeny také nejistoty $\sigma_x [\text{cm}]$ pro odpovídající měření.

Pro $T = 23^\circ\text{C}$ jsme provedli dvě různá měření se dvěma různými měřítky. Závislost druhých mocnin veličin x_a a x_b na čase znázorňují grafy 29 až 33.

Tab. 10: Přepočty k a nejistoty měření x_a a x_b .

T $^\circ\text{C}$	k $\text{px}\cdot\text{cm}^{-1}$	σ_x cm
4	28	0,17
11	14	0,35
20	20	0,25
23	20	0,25
23	31	0,16



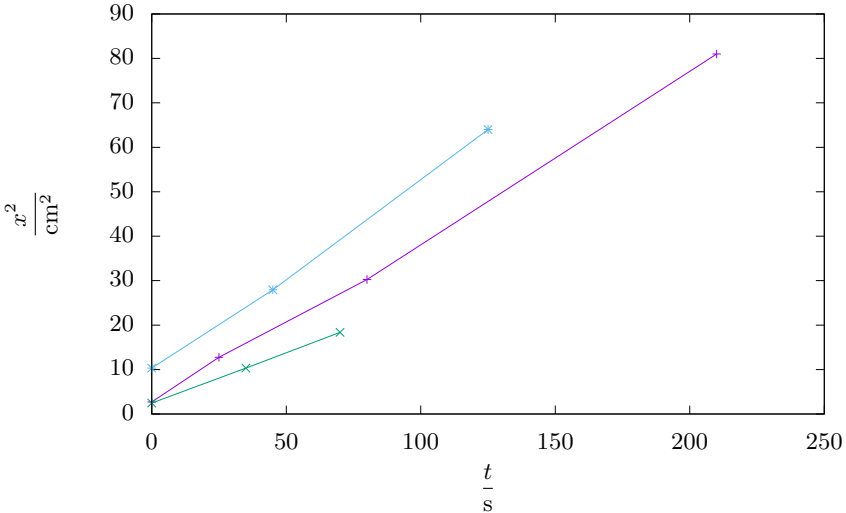
Obr. 29: Závislost vzdálenosti na čase pro $T = 4^\circ\text{C}$ a $k = 28 \text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$

Pro každou hodnotu x_a a x_b jsme pomocí vzorce (83) stanovili hodnotu difuzního koeficientu.

Nejistotu měření i -té hodnoty difuzního koeficientu jsme spočítali ze zákona přenosu chyb (85) dle vzorce

$$\sigma_{D_i} = \frac{2D_i}{x_i} \sigma_x,$$

přičemž jsme neuvažovali nejistotu při určení času, která je vzhledem k ostatním chybám zanedbatelná (čas byl měřen velmi přesnými hodinami mobilního telefonu).



Obr. 30: Závislost vzdálenosti na čase pro $T = 11\text{ °C}$ a $k = 14\text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$

Celkově jsme difuzní koeficient pro danou teplotu stanovili aritmetickým průměrem jednotlivých hodnot. Chybu určení difuzního koeficientu jsme pak spočítali ze vztahu

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_{D_{\text{stat}}}^2 + \sigma_{D_{\text{sys}}}^2},$$

kde

$$\sigma_{D_{\text{stat}}}^2 = \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

je statistická chyba aritmetického průměru a

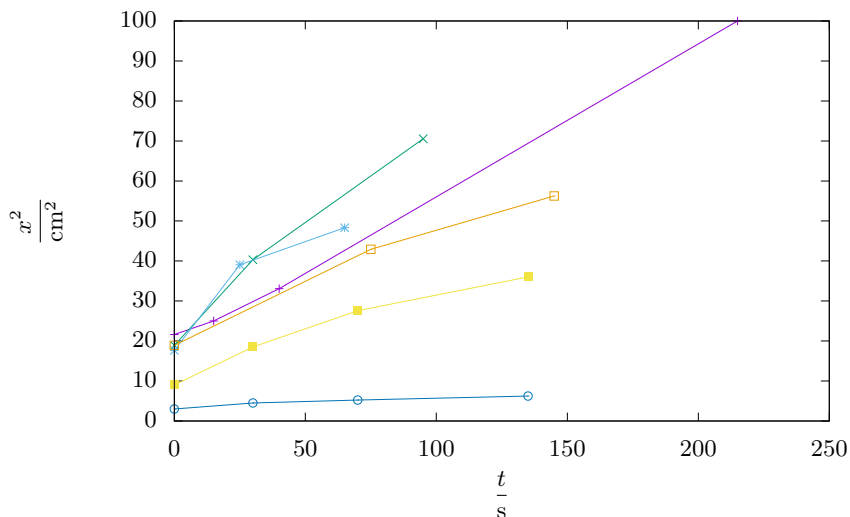
$$\sigma_{D_{\text{sys}}}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_{D_i}^2$$

je chyba systematická.

Výsledné hodnoty difuzních koeficientů včetně odpovídajících chyb jsou zaznamenány v tabulce 11. Závislost $D(T)$ jsme vynesli do grafu 34.

Tuto závislost jsme lineárně fitovali v programu *gnuplot* podle teoretické závislosti (84), čímž jsme získali konstantu úměrnosti mezi D a T s hodnotou

$$(-0,1 \pm 2,1) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$


 Obr. 31: Závislost vzdálenosti na čase pro $T = 20\text{ °C}$ a $k = 20\text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$

Tab. 11: Difuzní koeficienty.

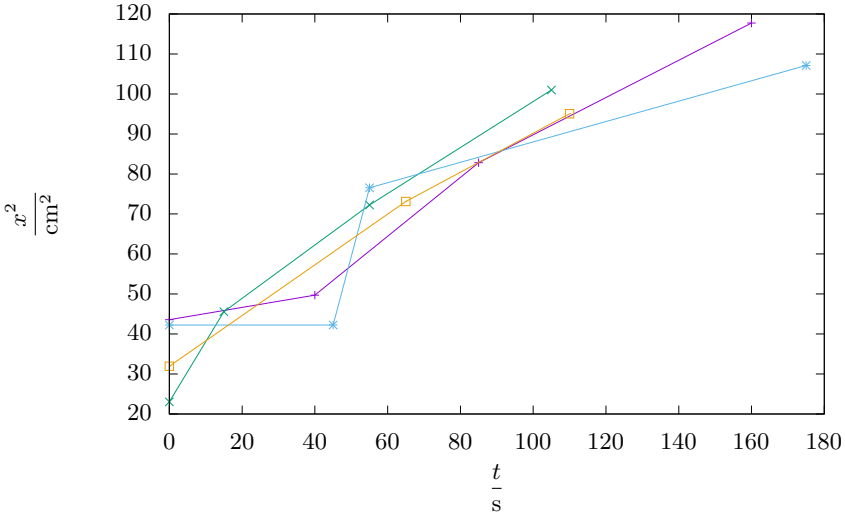
$\frac{T}{\text{°C}}$	k	$\frac{D}{10^{-5}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}}$	$\frac{\sigma_D}{10^{-5}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}}$
4	28	0,9	0,3
11	14	0,4	0,5
20	20	1,2	0,7
23	20	1,3	0,4
23	31	0,5	0,1

Diskuze

V celém postupu jsme předpokládali, že dynamická viskozita vody η se s teplotou nemění, díky čemuž je závislost $D(T)$ lineární. Ve skutečnosti však viskozita na teplotě závisí, což by bylo možné zahrnout do výpočtu. V námi použitém rozsahu teplot jsou ovšem změny viskozity zanedbatelné.

Na experiment také mohlo mít vliv povrchové napětí vody, jež mohlo ovlivňovat způsob pohybu částic barvy. Dá se ale předpokládat, že tento jev není v experimentu výrazný, proto byl zanedbán.

Model difuze předpokládá, že jak molekuly vody, tak molekuly barvy jsou pouze „kuličky“, které na sebe (vyjma srážek) nijak silově nepůsobí. Reálné molekuly na sebe samozřejmě působí i jinými silami, které zde však také zanedbáváme.



Obr. 32: Závislost vzdálenosti na čase pro $T = 23\text{ }^\circ\text{C}$ a $k = 20\text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$

Vztahem (82) jsme se dopustili poměrně velkého teoretického skoku. Pojďme se nyní tímto skokem a validitou vztahu (83) více zabývat.

Je rozumné předpokládat, že stav systému v čase závisí na počátečních podmínkách. Ty ale mohou být v každém případě jiné – vyjadřují se ve tvaru $n_0(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}, 0)$. Z tohoto důvodu při řešení diferenciálních rovnic zpravidla neexistuje obecné řešení a musíme použít právě fundamentální řešení. To má velmi výhodnou vlastnost

$$n(\mathbf{x}, t) = (n_0 * \Phi)(\mathbf{x}, t) ,$$

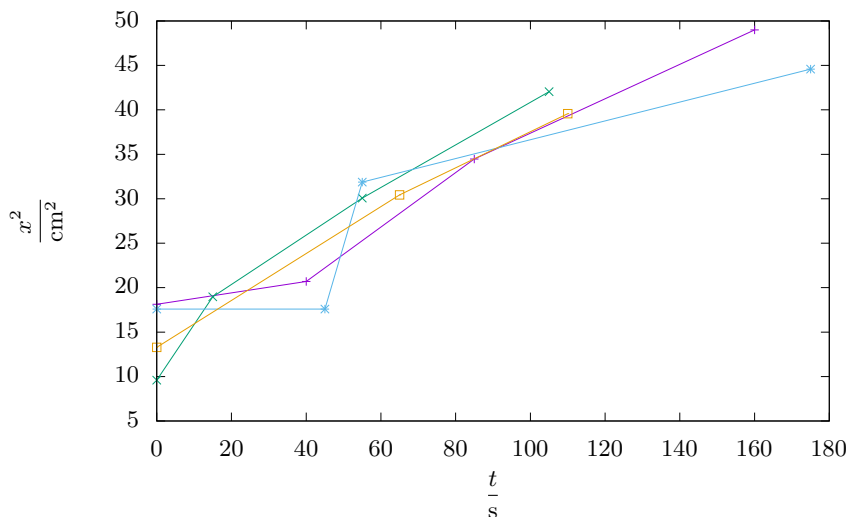
kde $*$ označuje konvoluci přes všechny prostorové proměnné. Tato rovnice nám tedy z funkce, která popisuje stav systému na začátku, „vyrobí“ funkci popisující systém v libovolném čase.

Konvoluce je matematická operace, jež má zásadní fyzikální využití. Můžeme ji chápat jako vyjádření, jak moc se grafy vstupních funkcí překrývají. Přesná definice je

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} ,$$

kde \mathbb{R}^n indikuje, že integrace probíhá přes všechny body prostoru.

Počítat tento integrál pro obecné n_0 nemusí být nic snadného. Naštěstí se tomu můžeme vyhnout vhodnou volbou počátečních podmínek, například $n_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$. Tomuto výrazu se říká δ -funkce a její základní charakteristikou je, že se ve skutečnosti nejedná o funkci. Nemusíme zacházet do podrobností, důležité však je,


 Obr. 33: Závislost vzdálenosti na čase pro $T = 23\text{ }^\circ\text{C}$ a $k = 31\text{ px}\cdot\text{cm}^{-1}$

co tento vztah vyjadřuje – totiž že na počátku je všechna barva v jednom bodě. Jelikož je δ -funkce radiálně symetrická, tuto vlastnost si zachová i výsledné řešení, a proto můžeme přejít do polárních souřadnic, kde x bude vyjadřovat vzdálenost od počátku.

Významnou vlastností δ -funkce je, že se vůči konvoluci chová jako jednotka. To znamená, že pro libovolnou funkci f platí $f * \delta = f$. Vybaveni touto znalostí už snadno najdeme řešení rovnice

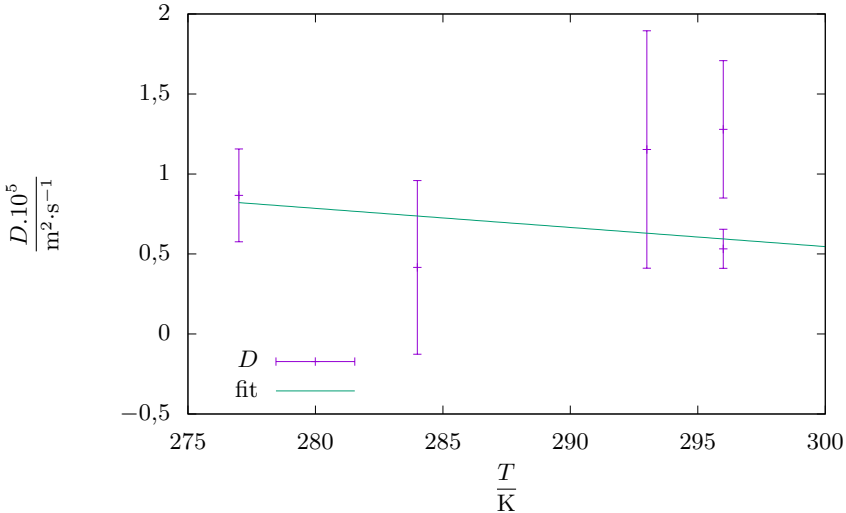
$$n(x, t) = (\delta * \Phi)(x, t) = \Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Tento výsledek má jednu nepříjemnou vlastnost – že koncentrace není v žádném bodě nulová, ačkoli exponenciálně klesá do nuly. Vskutku, řešení se už v prvním možném okamžiku rozšíří do celého prostoru. To je způsobeno tím, že uvažujeme ideální částice, které jsou nekonečně malé a je jich nekonečně mnoho. Reálné částice se tak samozřejmě nechovají, lepší model však bohužel nemáme.

Za hranici barevné skvrny budeme proto považovat takovou vzdálenost od počátku x , v níž je koncentrace c -krát menší než v počátku. Pro tuto vzdálenost potom dostáváme

$$\frac{n(x, t)}{n(0, t)} = \frac{1}{c} \Rightarrow x = \sqrt{4Dt \ln c} = \sqrt{CDt},$$

kde $C = 4 \ln c$.



Obr. 34: Závislost difuzního koeficientu na teplotě.

V tomto vzorovém řešení jsme předpokládali $C = 2$, nicméně dopočet konstanty C je obecně velmi netriviální. Víme pouze to, že c je poměr koncentrace uprostřed a koncentrace na hranici – ten samozřejmě neznáme, ale může to být velmi vysoké číslo. Koncentrace uprostřed bude (řádově) v procentech, koncentrace za okrajem může být prakticky nulová. Naneštěstí si tedy nemůžeme být jisti ani řádem správného výsledku.

Vodu jsme před měřením nechali odstát, aby získala teplotu okolního vzduchu a aby teplota během experimentu byla konstantní. Výjimkou je měření při 4°C , které jsme z technických důvodů prováděli při pokojové teplotě okolního vzduchu. Tento fakt mohl mít negativní vliv na přesnost měření.

Chyby měření by pravděpodobně bylo možné snížit šetrnějším dávkováním barvy do vody (např. pipetováním). Pro lepší ověření závislosti (84) by také bylo vhodné provést měření ve větším rozsahu teplot.

Graf 34 zobrazuje závislost $D(T)$, jež by měla podle (84) být lineární a rostoucí. Takovou závislost ovšem ani podle fitu, ani vizuálně nepozorujeme. Směrnice má dokonce špatné znaménko. Chyby měření jsou značné a pouhým okem v grafu vidíme, že přesnost takového výsledku je diskutabilní.

Srovnáme ještě výsledky s teoretickými hodnotami ze vztahu (84). Neznáme sice poloměr částic r , ale ostatní hodnoty jsou snadno dohledatelné; teplotu volme například $T = 300\text{ K}$. Pak

$$D = \frac{k_{\text{B}}T}{6\pi\eta r} \approx \frac{1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{6\pi \cdot 9 \cdot 10^{-4} r} = \frac{2,4 \cdot 10^{-19}}{r}.$$

Vidíme, že aby difúzní konstanta měla námi naměřené hodnoty (v řádu 10^{-5}), pak by poloměr molekul barvy musel být řádově 10^{-14} m, což je bohužel o několik řádů méně, než je poloměr jediného atomu. Mírně nás může uklidnit diskuse parametru C výše a z ní vyplývající fakt, že C může být řádově nižší než námi zvolená hodnota $C = 2$. Výsledek tedy pravděpodobně není vzdálen příliš mnoho řádů od skutečnosti, nicméně nic bližšího říct nedokážeme.

Závěr

Thomas A. Edison jednou řekl: *I have not failed. I've just found 10 000 ways that won't work.* (Neselhal jsem, jen jsem objevil 10 000 způsobů, které nefungují.)

My jsme právě objevili jeden způsob, jak nezměřit spolehlivě difúzní konstantu.

Úloha IV.E . . . dechberoucí stříkačky

Určete velikost třecí síly mezi pístem a stěnou injekční stříkačky, která vám přišla poštou.

Úvod

Pri pohybe dvoch telies a pri ich vzájomnom dotyku sú bežne prítomné trecie sily. Ako už iste vieme, trecia sila F_t závisí od zloženia materiálov a na ich tvare, resp. na drsnosti povrchov. Tieto veličiny vieme v jednoduchých prípadoch vyjadriť pomocou koeficientu trenia. Ten sa však v praxi väčšinou určuje experimentálne. Pri klasických stredoškolských úlohách a experimentoch sa pre výpočet trecej sily používa normálová zložka tiažovej sily k povrchu, na ktorom je teleso. V tomto experimente sa budeme snažiť zistiť hodnotu koeficientu medzi stenou striekačky a pístem. K určení koeficientu by sme potrebovali hodnotu normálovej sily, ktorá piest tlačí k stene. Určiť túto hodnotu je však netriviálne. Preto nám zostáva meranie hodnoty trecej sily. To by sme mohli vykonať priamo, napríklad silomerom. Ukážeme si ale iný spôsob riešenia, založený na rozpínaní a stlačovaní plynu vo vnútri striekačky.

Postup merania

Ako prvé utesníme piest, čo v našom prípade bolo použitím prsta na ruke. Natiahneme piest, čím v striekačke vznikne podtlak a následne ho pustíme. Tlaková sila, ktorá bude na piest pôsobiť sa ho bude snažiť vrátiť do pôvodnej polohy, ale to sa jej nepodarí úplne, pretože proti nej bude pôsobiť trecia sila. V mieste, kde sa piest zastaví by mala byť dynamická trecia sila vyvolaná rozdielom tlakov v rovnováhe, z čoho už dokážeme vypočítať hodnotu dynamickej trecej sily.

Aby náš model fungoval, musíme piest púšťať pri spätnom pohybe pomaly (avšak kontinuálne). Ak by sme mu totiž umožnili získať vyššiu rýchlosť, tak kvôli zotrvačnosti by mohol prekmitnúť rovnovážnu polohu významnejším spôsobom a následne by sa do nej už nevrátil kvôli vyššej hodnote statického trenia (oproti dynamickej sile trenia).

V druhom prípade zase postupujeme tak, že piest stlačíme na objem menší ako pôvodný a následne ho uvoľníme do finálnej polohy, v ktorej sa opäť vyrovná tlaková a trecia sila.

Teória

Správanie plynu vnútri striekačky môžeme popísať stavovou rovnicou

$$pV = nRT,$$

kde p je tlak, V je objem, n predstavuje počet mólov plynu, R je univerzálna plynová konštanta a T je teplota plynu v Kelvinoch. Vzduch vo vnútri striekačky budeme považovať za adiabaticky izolovaný, a tak počítame s tým, že si nevymieňa teplo s okolím. Adiabatický dej je popísaný vzťahom

$$pV^\kappa = \text{konst},$$

kde κ je Poissonova konštanta. Pre vzduch je $\kappa \approx 1,4$. Pre silu spôsobenú vzduchom v pieste v rovnovážnej polohe máme

$$F_t = F_v = (p_a - p) S,$$

kde S je plocha piestu, resp. prierez valcovej časti striekačky a zároveň p_a je počiatočný tlak vo vnútri piestu, ktorý je rovný atmosférickému tlaku. Dosadením z rovnice adiabatického deja dostávame

$$F_t = \left(1 - \left(\frac{V_{\text{init}}}{V_{\text{end}}}\right)^\kappa\right) p_a S, \quad (86)$$

kde V_{init} , V_{end} je počiatočný, resp. konečný objem vzduchu v pieste.

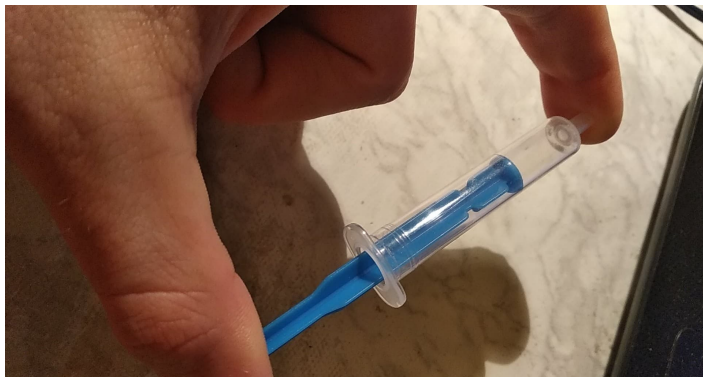
Opačným spôsobom merania by sme nechali vykonávať prácu vzduch vo vnútri striekačky. Teda postupom, že najprv piest stlačíme a potom ho necháme expandovať. Výpočet bude popísaný podobnou rovnicou

$$F'_t = \left(\left(\frac{V'_{\text{init}}}{V'_{\text{end}}}\right)^\kappa - 1\right) p_a S. \quad (87)$$

Meranie

Zistili sme podmienky merania počas experimentu. Tlak vzduchu v miestnosti bol nameraný ako $p_a = (92,0 \pm 0,2)$ kPa a teplota v miestnosti bola $T_V = (294,3 \pm 0,2)$ K. Experiment sme vykonali so striekačkou s objemom 3 ml. Pomocou posuvného meradla s noniusom sme odmerali priemer piestu a jeho hodnota bola $d = (9,14 \pm 0,02)$ mm. Nepresnosť posuvného meradla je 0,02 mm podľa kalibračnej normy. Prierez tak bol $S = \pi d^2/4 = (65,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-6}$ m², kde sme odchýlku určili ako $\sigma(S) = 2S \frac{\sigma(d)}{d}$. Namerané hodnoty sú v tabuľke 12.

Striekačku sme mali uzavretú jedným prstom ako na obrázku 35. Po natiahnutí a opätovnom pribrzdenom pustení (bez dotyku piestu v koncovej fáze) sme odčítali hodnoty. Neistota merania objemu je $\sigma_m(V) = 0,05$ ml.



Obr. 35: Meranie s injekčnou striekačkou.

Zo štatistického spracovania máme pre rovnovážnu polohu objem $\bar{V}_{\text{end}} = (1,315 \pm 0,008)$ ml. Celkovú chybu objemu v rovnovážnej polohe určíme ako kvadratický súčet štatistickej chyby $\sigma(\bar{V}) = 0,008$ ml a chyby meradla $\sigma_m(V) = 0,05$ ml, resp.

$$\sigma(V) = \sqrt{\sigma(\bar{V}) + \sigma_m(V)} \doteq 0,05 \text{ ml.}$$

Dostávame tak $V_{\text{end}} = (1,32 \pm 0,05)$ ml. Dosadením do vzťahu pre treciu silu (86) vychádza

$$F_t = (1,9 \pm 0,4) \text{ N,}$$

kde sme chybu určili zo vzorca

$$\begin{aligned} \sigma(F_t) &= \sqrt{\left(\frac{\partial F_t}{\partial V_{\text{init}}} \sigma_m(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_t}{\partial V_{\text{end}}} \sigma(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_t}{\partial p_a} \sigma(p_a)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_t}{\partial S} \sigma(S)\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\kappa p_a S \left(\frac{V_{\text{init}}}{V_{\text{end}}}\right)^\kappa\right)^2 \left(\left(\frac{\sigma_m(V)}{V_{\text{init}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(V)}{V_{\text{end}}}\right)^2\right) + F_t^2 \left(\left(\frac{\sigma(p_a)}{p_a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(S)}{S}\right)^2\right)}. \end{aligned}$$

Porovnanie opačného pohybu piestu

Pre porovnanie vyskúšame aj druhú metódu, kedy bude konať prácu od trecej sily vzduch v injekčnej striekačke. Postupujeme podobne, a teda na začiatku si zvolíme objem (kvôli presnosti merania maximálny možný), postupne stlačíme vzduch na nami zvolené objemy a následne pomaly (približne niekoľko sekúnd) púšťame, avšak aby sme nijako neovplyvnili koncovú fázu zastavenia. Výsledky sú v tabuľke 13. Neistota merania objemu je $\sigma_m(V) = 0,05$ ml.

Z údajov, kedy bol najmenší objem vyšší ako 1,5 ml tak dostávame údaj pre rovnovážnu polohu $\bar{V}'_{\text{end}} = (2,29 \pm 0,02)$ ml. Kde sme kombinovanú odchýlku opäť získali pomocou štatistickej a systematickej chyby. Aj v tomto prípade bola štatistická chyba zanedbateľná a vyšlo $V'_{\text{end}} = (2,29 \pm 0,05)$ ml.

Tab. 12: Meranie zastavenia piestu z různých maximálních objemov pre začiatočný objem $V_{\text{init}} = (1,00 \pm 0,05)$ ml a natiahnutia na objem V_{max} .

Meranie	$\frac{V_{\text{max}}}{\text{ml}}$	$\frac{V_{\text{end}}}{\text{ml}}$
1	1,30	1,30
2	1,40	1,35
3	1,60	1,30
4	1,80	1,30
5	2,00	1,30
6	2,20	1,30
7	2,40	1,30
8	2,60	1,35
9	2,80	1,35
10	3,00	1,30

Podľa (87) sme spočítali hodnotu trecej sily

$$F_t' = (2,8 \pm 0,3) \text{ N}.$$

Chybu sme určili rovnako ako pri predchádzajúcej metóde.

Diskusia

Pri experimente bolo prítomných viacero faktorov, ktoré mohli ovplyvniť výsledky merania. Počítali sme s modelom ideálneho plynu, a to samozrejme v reálnom svete len približuje fyzikálnu skutočnosť. Ako ďalší fakt, ktorý ovplyvňoval meranie bolo použitie modelu adiabatického deja. Ten predpokladá, že nie je prítomná výmena tepla s okolím (prípadne, že deje prebehnú tak rýchlo, aby sa teplo nestihlo predať). Dĺžka trvania experimentu bola len niekoľko sekúnd napriek pomalšiemu uvoľňovaniu.

Výmena tepla medzi vzduchom vo vnútri striekačky a medzi stenami striekačky nepochybne prebiehala. Skutočný dej mal preto správanie medzi adiabatickým a izotermickým procesom. Ďalším zdrojom tepla bol aj fakt, že sme striekačku pridržiavali prstami, ktoré mali vyššiu teplotu ako okolie. Avšak tepelné výmeny sme z dôvodu relatívne krátkeho meracieho procesu zanedbali. Zároveň je plast pomerne dobrým izolantom.

Predpokladali sme, že vzduch neuniká pri vyššom tlaku ako bol tlak okolia. Rovnako sme zanedbali aj prípadné prúdenie do vnútra striekačky. A to pre miesto, ktoré izoloval piest, a tiež pre utesnenie rukou na výstupe striekačky. Tlak atmosféry na strane piestu sme uvažovali za konštantný v každom okamihu.

V prípade opačného postupu, kedy sme vzduch stlačili a sledovali jeho návrat (expanziu), si musíme uvedomiť, že vtedy koná prácu vzduch vo vnútri striekačky. Odobrané teplo cez steny striekačky vedením tepla zo systému znamenalo, že

Tab. 13: Meranie zastavenia piestu po kompresii na V_{\min} a následnej expanzii vzduchu pri začiatočnom objeme $V'_{\text{init}} = (3,00 \pm 0,05)$ ml.

Meranie	$\frac{V_{\min}}{\text{ml}}$	$\frac{V'_{\text{end}}}{\text{ml}}$
1	2,30	2,35
2	2,20	2,30
3	2,10	2,35
4	2,00	2,30
5	1,80	2,25
6	1,60	2,20
7	1,40	2,25
8	1,20	2,15
9	1,00	2,10
10	0,80	2,00
11	0,60	1,95
12	0,40	1,85

tlak mohol byť v skutočnosti nižší ako sme namerali. To sa dialo prostredníctvom odovzdania tepla okoliu (steny striekačky). Hodnota merania F'_t v tomto smere tak pravdepodobne horšie zodpovedá adiabatickému modelu z hľadiska malých rozmerov sledovaného objektu.

V prvom postupe sa vzduch mierne zahrieval od okolia, čo naopak zvyšovalo tlak vo vnútri. Ďalšou skutočnosťou, ktorá mohla ovplyvniť merania bolo, že sme predpokladali vo všetkých miestach rovnakú treciu silu, avšak toto nemuselo byť splnené. Rovnako účinok trecej sily môže byť iný pri pohybe jedným alebo opačným smerom. Najvýznamnejším zdrojom odchýlky bolo najmä určenie objemu a s tým spojené určenie týchto hodnôt. Presnejšia stupnica by vedela túto nepresnosť znížiť.

Taktiež sme pri porovnávaní metód neuvažovali prípadnú zmenu koeficientu trenia pri pohybe opačným smerom. Z údajov, ktoré zodpovedajú pre najväčšiu nami vytvorenú kompresiu (teda najmenšie objemy) vidíme, že už zreteľne dochádza k výraznejším stratám energie.

Záver

Zmerali sme silové pôsobenia a uviedli sme dôvody, pre ktoré by mala byť metóda konania práce atmosférou rozumnejšou resp. správnou voľbou. Hodnota trecej sily tak bola $F_t = (1,9 \pm 0,4)$ N v smere od väčších objemov k menším. V opačnom smere (kedy prácu konal vzduch vo vnútri) sme touto aproximáciou dostali $F'_t = (2,8 \pm 0,3)$ N. Táto hodnota je podľa očakávaní vyššia, a to z dôvodu, že prácu konal vzduch vo vnútri striekačky a nie okolitá atmosféra.

Úloha V.E ... neklamou nás?

Změřte kapacitu libovolné baterie (například tužkové AA) a porovnejte ji s deklarovanou hodnotou.

Teorie

Kapacita baterie či akumulátoru je množství elektrického náboje, které může tento článek dodat při vybíjení. Běžně se rozlišuje kapacita *jmenovitá* (nominální) a *skutečná* (aktuální). První je hodnotou udávanou výrobcem a představuje náboj, jež článek může dodat za stanovených podmínek (typicky za pokojové teploty při vybíjení během pěti hodin), a to za předpokladu udržení stanoveného rozsahu napětí (běžně v rozmezí $\pm 10\%$ od napětí při plném nabití). Druhá je hodnotou náboje, který baterie vydá za daných konkrétních podmínek. Skutečná kapacita závisí na mnoha faktorech; například na stáří akumulátoru, podmínkách nabíjení, velikosti vybíjecího proudu, konečném vybíjecím napětí nebo teplotě²

Známe-li časovou závislost proudu $I(t)$ procházejícího určitým obvodem, můžeme celkový průchozí náboj určit integrací jako

$$Q = \int_t I(t) dt.$$

Pro zpracování chyb využíváme především zákona přenosu chyb pro nezávislé proměnné³

$$\sigma_V = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial P_i} \sigma_{P_i} \right)^2}, \quad (88)$$

kde hledáme chybu proměnné V , jež závisí na N proměnných P_i , které jsou naměřené s chybami σ_{P_i} .

Pomůcky a přístroje

AAA baterie typu *SHO 750 Orion* (Ni-MH), multimetr *UNI-T M840D* s třímístným displayem, nepřesností⁴ $\pm (0,5\% + 3)$ pro napětí a $\pm (0,8\% + 3)$ pro proud, nabíječka *Voltcraft IPC-1L*, motůrek, žárovka, tablet s aplikací *Skyflow* (coby kamera).

Výsledek měření

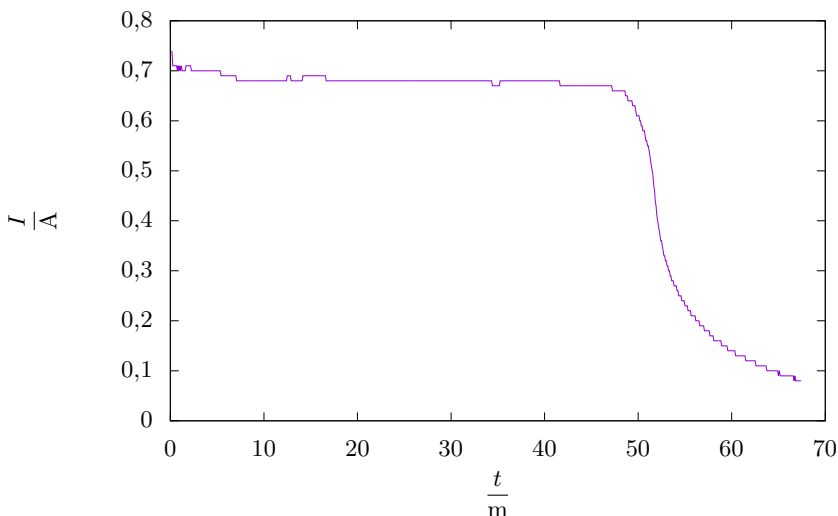
Měření probíhalo přibližně za normální pokojové teploty. Sestavili jsme sériový obvod složený ze zdroje (jedna či dvě baterie *SHO 750 Orion*), odporu (žárovky nebo žárovky a motoru v sérii) a ampérmetru.

²Battex: abeceda baterií a akumulátorů, kapacita [online][cit. 10.4.2021]. Dostupné z <http://www.battex.info/slovnicek-a-pojmy/kapacita+%28článků+nebo+baterií%29>.

³Wikipedia: Propagation of uncertainty [online][cit. 2.3.2021]. Dostupné z https://en.wikipedia.org/wiki/Propagation_of_uncertainty.

⁴Nepřesnost přístroje se nám bohužel nepodařilo dohledat, použili jsme tedy nepřesnost podobného přístroje jiné vývojové řady.

Obvodem jsme nechali procházet proud, přičemž v pravidelných časových intervalech jsme zaznamenávali hodnotu proudu, resp. natáčeli jsme display ampérmetru tabletem s aplikací *Skyflow* v režimu timelapse (po pěti či šedesáti sekundách v závislosti na měření) a hodnoty následně odečetli. Kompletní časovou závislost jednoho měření znázorňuje obr. 36, časovou závislost prošlého náboje pak obr. 37.



Obr. 36: Závislost proudu na čase.

Jak je z grafů zřejmé, obvodem prochází po většinu času přibližně konstantní proud. Pro srovnání s nominální kapacitou budeme část měření, ve které začne rychle docházet k poklesu proudu, zanedbávat.

Pro získání celkového náboje jsme proud numericky časově zintegrovali dle vztahu

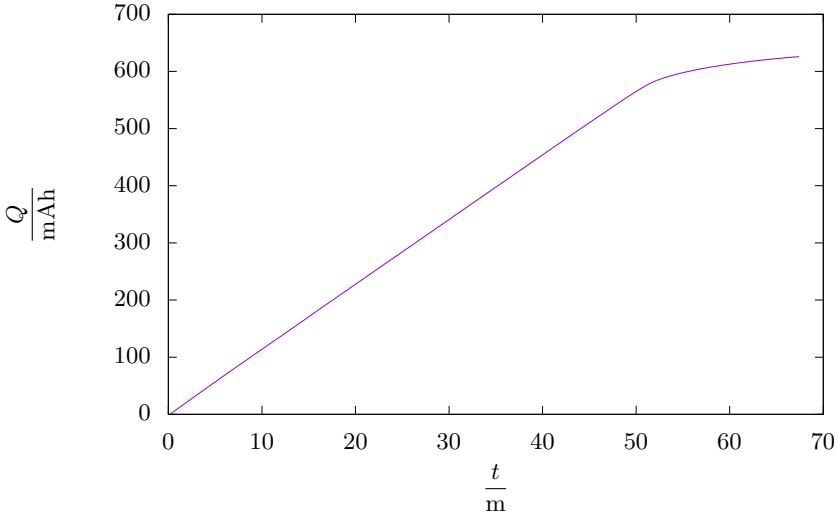
$$Q = \int_{t_0}^{t_n} I(t) dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{I(t_i) + I(t_{i+1})}{2} (t_{i+1} - t_i) .$$

Jelikož obvodem procházel přibližně konstantní proud, pro jednoduchost přejdeme pro počítání chyb ke konstantní (střední) hodnotě proudu \bar{I} . Tu si definujeme právě tak, aby platilo $Q = \bar{I}t$ (tedy náboj získaný integrací jednoduše vydělíme celkovým časem). Ze zákona přenosu chyb pro násobení pak máme

$$\sigma_{Q_i, \text{sys}} = Q_i \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{I}}}{\bar{I}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2} ,$$

kde σ_X je chyba v určení veličiny X a Q_i je náboj získaný z i -tého měření. Odchylky proudu způsobené nepřesností ampérmetru činí přibližně 0,04 A pro naměřené proudy nad 0,6 A a 0,03 A pro proudy nižší.

Hodnoty pro jednotlivá měření jsou uvedeny v tabulkách 14 a 15, přičemž jsme oddělili měření se žárovkou od měření se žárovkou i motůrkem. Konkrétně jsou zde zaznamenány zátěž (z – pouze žárovka, zm – žárovka a motor v sérii), celkový náboj získaný numerickou integrací a střední hodnota proudu. Výslednou hodnotu kapacity Q získáme jednoduše aritmetickým průměrem. Chyby u jednotlivých měření jsou pouze systematické, pro celkový náboj pak stanovíme chybu kombinovanou z chyby statistické i systematické⁵



Obr. 37: Závislost prošlého náboje na čase.

⁵ Statistickou chybu aritmetického průměru určíme jako

$$\sigma_{Q,\text{stat}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (Q_i - Q)^2}.$$

Systematická chyba aritmetického průměru se spočte z chyb dílčích měření jako

$$\sigma_{Q,\text{sys}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_{Q_i}^2}.$$

Jelikož jsou si pro měření v rámci každé metody (vybíjení s nižším proudem, vybíjení s vyšším proudem...) systematické chyby velmi blízké, odhadneme celkovou systematickou chybu jako aritmetický průměr systematických chyb. Celkovou chybu pak stanovíme jako

$$\sigma_Q = \sqrt{\sigma_{Q,\text{sys}}^2 + \sigma_{Q,\text{stat}}^2}.$$

Tab. 14: Vybíjení se žárovkou.

Chyby měření jsou $\sigma_t = 5$ s,
 $\sigma_I = 0,04$ A a $\sigma_Q = 30$ mAh.

$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{I}{\text{A}}$	$\frac{Q}{\text{mAh}}$
2700	0,70	560
2935	0,68	520
2825	0,69	560
2765	0,69	530

Tab. 15: Vybíjení se žárovkou a motůrkem. Chyby měření jsou

$\sigma_t = 1$ s a $\sigma_I = 0,03$ A.

$\frac{t}{\text{m}}$	$\frac{I}{\text{A}}$	$\frac{Q}{\text{mAh}}$	$\frac{\sigma_Q}{\text{mAh}}$
366	0,11	670	190
347	0,11	630	180

Pro měření se žárovkou byla stanovena (aktuální) kapacita

$$Q_z = (540 \pm 20) \text{ mAh},$$

pro měření se žárovkou i motůrkem pak

$$Q_{zm} = (650 \pm 180) \text{ mAh}.$$

Mezi všemi měřeními jsme použitý zdroj (akumulátor) nabíjeli (přibližně) konstantním proudem I , který jsme zaznamenávali opět pomocí timelapse, tentokrát jsme však snímali display nabíječky, jenž hodnotu proudu ukazoval. Díky konstantnímu proudu se vztah pro celkový náboj redukuje na násobení $Q = It$. Hodnotu proudu budeme považovat za přesnou (více v diskuzi), v důsledku toho považujeme i celou systematickou chybu určení náboje za zanedbatelnou. V tabulkách pak chyby neudáváme a výsledná chyba aritmetického průměru je pouze statistická.

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulkách 16 a 17.

Tab. 16: Nabíjení proudem 0,7 A.

Chyba měření času je $\sigma_t = 5$ s.

$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{Q}{\text{mAh}}$
4000	777
3925	763
3815	741
3840	746

Tab. 17: Nabíjení proudem 0,5 A.

Chyba měření času je $\sigma_t = 5$ s.

$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{Q}{\text{mAh}}$
5770	801
5395	749

Výsledné hodnoty činí

$$Q_{700} = (757 \pm 8) \text{ mAh}$$

pro proud 0,7 A a

$$Q_{500} = (780 \pm 30) \text{ mAh}.$$

pro proud 0,5 A.

Diskuze

Z naměřených hodnot je patrné, že baterie vydala vyšší náboj při pomalejším vybíjení, což je plně v souladu s předpovědí (docházelo k menším ztrátám energie). Systematické chyby u měření s nižším proudem jsou bohužel značné, což je způsobeno nevhodnou volbou rozsahu ampérmetru. Měřili jsme na rozsahu do 20 A, řád nejnižšího digitu byl 0,01 A – plná jedna desetina hodnoty proudu. Tento rozsah jsme však zvolili z toho důvodu, že použitý ampérmetr na nižším rozsahu nefungoval. Pro přesnější výsledky by bylo vhodné pokus opakovat s menším rozsahem. Vzhledem k délce vybíjení odpovídají nominálnímu napětí spíše výsledky z delšího měření.

Hodnota kapacity při nabíjení byla konzistentně vyšší než hodnota při vybíjení. Vliv mohlo mít několik faktorů. Nabíjení je endotermický jev – pro uchování energie v chemickém článku je potřeba vyvolat endotermickou chemickou reakci. Projevem toho se například baterie během nabíjení znatelně zahřívala, což znamená nižší energetickou efektivitu. Přebytný náboj při nabíjení se pak ztrácí v nevratných chemických reakcích v materiálu akumulátoru, které následně způsobují snížení kapacity, tedy opotřebování. V našem případě byl použitý akumulátor aktivně používán po několik let, lze tedy předpokládat poměrně velkou míru opotřebování.

Použité nabíjecí proudy byly poměrně vysoké, což mohlo dále snížit efektivitu nabíjení. To však naše měření nepotvrdilo (ani nevyvrátilo), jelikož se kapacity pro oba proudy v rámci chyby shodují; měření s nižším proudem pak dává dokonce vyšší průměrnou hodnotu, ale s mnohem větší chybou.

Výrobce udává nominální kapacitu $Q_v = 750 \text{ mAh}$. Té jsou blíže měření z nabíjení, při kterých baterie pojala znatelně vyšší náboj, než jaký vydala při vybíjení. Nominální kapacita se však udává jako náboj, který je akumulátor schopný vydat, nikoliv přijmout.

Z výše uvedených důvodů usuzujeme, že ideálnímu způsobu určení nominálního napětí nejvíce odpovídalo měření při vybíjení nižším proudem. To v našem případě dalo výsledek $Q_{zm} = (650 \pm 180) \text{ mAh}$.

Do měření mohly vnést další chyby změny elektrických vlastností odporu v průběhu měření; experiment mohlo ovlivnit například zmíněné zahřívání baterie. Dále se také mohl měnit odpor obvodu (žárovky), to však na naše měření nemá velký vliv, neboť jsme měřili pouze procházející proud.

Hodnotu proudu při měření jsme považovali za přesnou, neboť se nám nepodařilo dohledat konkrétní přesnost displeje nabíječky. Konkrétní naměřené hodnoty pak nemají velkou váhu, nicméně i kdyby systematická chyba byla několiknásobně vyšší než při měření vybíjení s vyšším proudem, hodnoty naměřeného prošlého náboje by stále vycházely konzistentně vyšší než při vybíjení.

Závěr

Čtyřmi způsoby jsme změřili náboj vydaný či přijatý baterií (*SHO 750 Orion*) během vybíjení a nabíjení. Hodnoty jsou shrnuty v tabulce 18.

Tab. 18: Shrnutí výsledků.

způsob měření	$\frac{Q}{\text{mAh}}$	$\frac{\sigma_Q}{\text{mAh}}$
vybíjení, 0,7 A	540	20
vybíjení, 0,1 A	650	180
nabíjení, 0,7 A	760	8
nabíjení, 0,5 A	740	30

Fyzikální podstatou nejvíce měření nominální kapacity odpovídalo vybíjení s nižším proudem. Stanovená kapacita je tedy

$$Q = (650 \pm 180) \text{ mAh},$$

přičemž výrobce udává nominální kapacitu $Q_v = 750 \text{ mAh}$.

Vzhledem k opotřebovanosti baterie je pravděpodobné, že výrobce nám nijak zásadně nelhal.

Úloha VI.E . . . rozlité sklenička

Veźměte si skleničku, plechovku či jinou válcově symetrickou nádobu a změřte závislost úhlu náklonu, při kterém se převrhne, na množství vody uvnitř. Doporučujeme použít nádobu s větším poměrem výšky ku průměru podstavu.

Úvod

Už jste někdy rozlili skleničku nebo hrnek s nápojem? Asi ano, taková nešťastná situace snad potkala každého. Přemýšleli jste ale někdy nad rovnováhou skleničky? Jak moc můžete sklenici nahnout, aby se nepřevrhla? Maximální úhel zcela určitě závisí na množství tekutiny uvnitř.

Těžiště prázdné sklenice se nachází mírně pod polovinou výšky. Pokud do ní nalijeme vodu, těžiště klesne. Při dalším přilívání se však trend obrátí a těžiště začne stoupat. Plná sklenice má zase těžiště přibližně v polovině výšky. Čím níže se těžiště nalézá, tím je sklenice stabilnější.

Při analýze naklánění sklenice však musíme vzít v potaz, že kapalina mění tvar. Hladina vody je vždy vodorovná, tudíž těžiště se při naklánění přesouvá. Spočítat úhel náklonu, při kterém se sklenice převrhne, není úplně triviální, ale můžeme odhadnout, že úhel převrnutí bude největší při nějakém středním množství vody, nikoliv při prázdné nebo plné sklenici.

Uspořádání experimentu

Kromě sklenice či plechovky potřebujeme vodu (samozřejmě), posuvné měřidlo k určení rozměrů plechovky a váhu k posouzení množství vody v plechovce. Jelikož experiment nutně zahrnuje rozlévání vody, hodí se experimentovat někde, kde

rozlitá voda nevádí, a pro jistotu si připravte ručníky a ubrousky (co kdyby náhodou. . .). My jsme plechovku umístili do akvária, takže voda zůstávala lapena na dně akvária, ale zároveň jsme přes průhledné stěny mohli pozorovat, co se děje.

Jakým způsobem změřit úhel pádu? Plechovku jsme postavili na dřevěné prkno, které jsme rukou na jednom konci začali zvedat. Situaci ze vzdálenosti cca 2 m natáčela kamera. Museli jsme vybalancovat dva protichůdné požadavky – kamera musí být co nejdál, aby úhlové zkeslení obrazu bylo co nejmenší a zároveň ne příliš daleko, abychom na záznamu rozlišili detaily. Díky kameře jsme mohli přesněji zachytit okamžik, kdy plechovka začala padat, a z následné analýzy videa na počítači (použili jsme program Tracker) jsme určili úhel pádu. Tento způsob měření úhlů nám přijde jednak přesnější a jednak méně náročný pro experimentátora, na rozdíl od snahy změřit pádový úhel přímo v průběhu experimentu.

Před experimentem se vyskytl menší problém – při vyšších úhlech náklonu plechovka po dřevě klouzala. Takto bychom nemohli naměřit celou křivku. Proto jsme podstavu plechovky přilepili pásky smirkového papíru a taktéž na prkno jsme nalepili smirkový papír.

Měření jsme prováděli po několika sériích, kdy jsme postupovali od malého po velké množství vody v plechovce. Pro menší hmotnosti vody jsme udělali okolo 10 měření, pro velké hmotnosti jenom 4-5, protože voda v akváriu pak přibývala rychle.

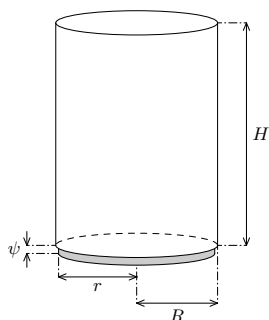
Do plechovky jsme nalili vodu, zvážili jsme plechovku s vodou a odečetli jsme předtím změřenou hmotnost plechovky. Takto jsme zjistili hmotnost vody. Nepřesnost určení hmotnosti vody vzhledem k použité váze a nepřesnosti hmotnosti plechovky odhadujeme na 0,7 g.

Základní parametry plechovky

Měření jsme prováděli s plechovkou, jelikož plechovka má válcový tvar, takže matematický popis bude snazší. Rozměry plechovky jsou v tabulce 19, hmotnost jsme určili jako $M = (38,9 \pm 0,5)$ g. Význam naměřených veličin je zřejmý z obrázku 38. Změřená výška $H + \psi$ je bez vrstvy smirkového papíru. Prostor na vodu je od výšky ψ výš. Délky jsme změřili posuvným měřidlem s dělením po 0,005 cm a hmotnost jsme zvážili na digitální váze s dílkem 1 g. Odchyšky v tabulce mají statistickou významnost 2σ .

Tab. 19: Parametry plechovky.

Parametr	Veličina	Hodnota cm	Nejistota cm
výška plechovky	$H + \psi$	10,19	0,01
vnější poloměr plechovky	$R_{\text{vně}}$	3,26	0,02
vnitřní poloměr plechovky	R	3,24	0,02
výška spodní části	ψ	0,30	0,03
poloměr spodní části	r	3,14	0,01



Obr. 38: Náčrt plechovky s vyznačenými rozměry. Naměřené hodnoty si můžete prohlédnout v tabulce 19.

Poloměry $R_{\text{vně}}$ a r jsme zjistili tak, že jsme provedli měření průměru plechovky a z něj spočítali poloměr. Dále jsme ze znalosti hmotnosti plechovky M , hustoty plechovky (železo s hustotou $\rho_{\text{Fe}} = 7,85 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$) a z aproximace plochy plechovky jako $S = \pi R_{\text{vně}}^2 + 2\pi R_{\text{vně}}H$ mohli odhadnout tloušťku plechu $h = M / (\rho_{\text{Fe}}S) \sim 0,021 \text{ cm}$. To je hodnota srovnatelná s nepřesností veličiny $R_{\text{vně}}$. Vnitřní poloměr plechovky je $R = R_{\text{vně}} - h$ a k jeho chybě přispívá převážně nejistota v hodnotě $R_{\text{vně}}$. Výška spodní části plechovky nešla změřit lépe, neboť dno plechovky je vlnité, takže se ψ nedá definovat s vyšší přesností.

Teorie

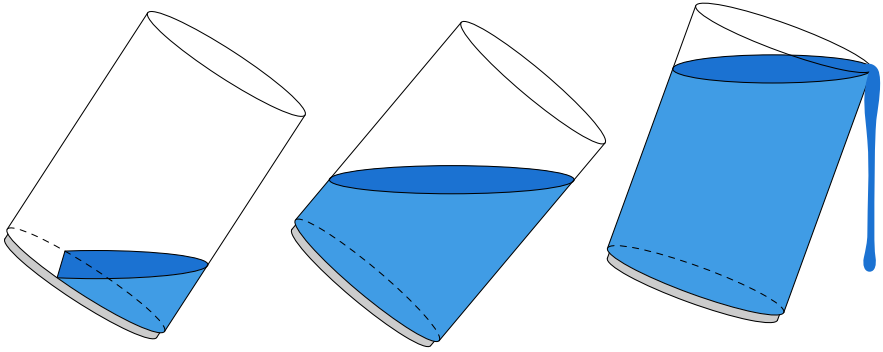
V úvodu bylo naznačeno, že určit úhel pádu není triviální. Začněme tedy s fenomenologickým popisem a pokusme se předpovědět, co se bude dít. V závislosti na množství vody existují tři režimy převržení.

- Pokud je v plechovce málo vody, v okamžiku dosažení pádového úhlu bude rovina vodní hladiny protínat dno plechovky. Viz obrázek 39 vlevo.
- Při středním množství vody protíná rovina hladiny plášť plechovky. Viz obrázek 39 uprostřed.
- Zajímavý jev nastane, pokud je plechovka téměř naplněná. Při určitém úhlu menším než úhel pádu začne voda přetékat, plechovka však zůstane stabilní. Od jistého hraničního množství vody výše se plechovka převrhne vždy při stejném úhlu! Viz obrázek 39 vpravo.

Můžeme však učinit i nějaké kvantitativní předpovědi? Díky tomu, že válec je matematicky jednoduchý tvar, tak ano. Potřebujeme znát pár vztahů týkajících se homogenní válcové výšečky, kde $v = R$ (viz obrázek 40 pro definici veličin a orientaci souřadnicových os). Objem takové válcové výšečky⁶ je

$$V_R = \frac{2}{3} R^3 \text{tg } \alpha. \quad (89)$$

⁶Následující tři vztahy jsou uvedeny zde: <https://mathworld.wolfram.com/CylindricalHoof.html>, nebo je můžeme odvodit integrováním.



Obr. 39: Tři režimy převržení plechovky podle množství vody v plechovce.

Souřadnice těžiště jsou

$$x_R = \frac{3\pi}{16} R,$$

$$y_R = \frac{3\pi}{32} R \operatorname{tg} \alpha.$$

Umíme určit polohu těžiště v případě popsaném na obrázku 39 uprostřed. Podívejte se na obrázek 41. V levé části je přebytek vody (označeno jako m_+) ve tvaru válcové výseče, zatímco v pravé části je nedostatek vody (můžeme s ní v rovnicích počítat jako se zápornou hmotností $m_- = -m_+$).

Hmotnost m_+ spočítáme ze vztahu (89)

$$m_+ = \frac{2}{3} \rho R^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Nechť m je hmotnost vody, pak x -ová souřadnice těžiště vody je

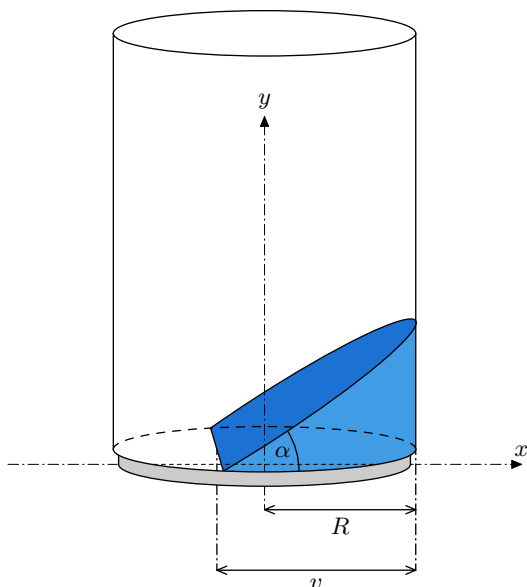
$$x_v = \frac{\frac{3\pi}{16} R m_+ - \frac{3\pi}{16} R (-m_+)}{m} = \frac{\pi \rho R^4 \operatorname{tg} \alpha}{4m}$$

a y -ová souřadnice je

$$y_v = \frac{m \left(\frac{h_v}{2} + \psi \right) + m_+ \left(h_v + \psi + \frac{3\pi}{32} R \operatorname{tg} \alpha \right) + (-m_+) \left(h_v + \psi - \frac{3\pi}{32} R \operatorname{tg} \alpha \right)}{m}.$$

Po dosazení za m_+ a za $h_v = m / (\pi \rho R^2)$, kde ρ je hustota vody, dostaneme

$$y_v = \frac{m}{2\pi \rho R^2} + \psi + \frac{\pi}{8} \frac{\rho R^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{m}.$$



Obr. 40: Válcová výseč.

Prázdňá plechovka má těžiště ve výšce h_p , kterou můžeme buď odhadnout (je přibližně v polovině) nebo určit z experimentu. Těžiště soustavy voda+plechovka má souřadnice

$$x_t = \frac{\pi \rho R^4 \operatorname{tg} \alpha}{4(M + m)},$$

$$y_t = \frac{\frac{m^2}{2\pi \rho R^2} + m\psi + \frac{\pi}{8} \rho R^4 \operatorname{tg}^2 \alpha + Mh_p}{M + m}.$$

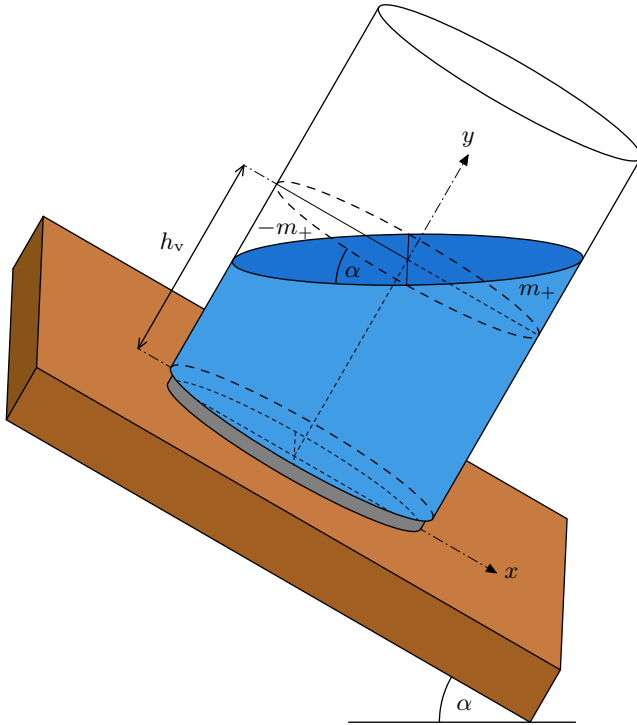
Obrázek 42 popisuje hraniční situaci, kdy je plechovka těsně před převrnutím. Těžiště T se nachází nad bodem O . Důležité úhly a vzdálenosti jsou: $|\angle SPT| = 90^\circ$, $|\angle SOT| = 90^\circ - \alpha$, $|SP| = y_t$, $|PT| = x_t$, $|SO| = r$. Platí

$$r = x_t + y_t \operatorname{tg} \alpha.$$

Po dosazení za x_t a y_t dostaneme kubickou rovnici pro $\operatorname{tg} \alpha$

$$r(M + m) = \frac{1}{4} \pi \rho R^4 \operatorname{tg} \alpha + \frac{m^2}{2\pi \rho R^2} \operatorname{tg} \alpha + m\psi \operatorname{tg} \alpha + \frac{\pi}{8} \rho R^4 \operatorname{tg}^3 \alpha + Mh_p \operatorname{tg} \alpha,$$

$$0 = \operatorname{tg}^3 \alpha + \left(2 + \frac{8Mh_p}{\pi \rho R^4} + \frac{8m\psi}{\pi \rho R^4} + \frac{4m^2}{\pi^2 \rho^2 R^6} \right) \operatorname{tg} \alpha - \frac{8r(M + m)}{\pi \rho R^4}. \quad (90)$$



Obr. 41: Plechovka na nakloněném dřevěném prkně. Dokážeme zjistit polohu těžiště.

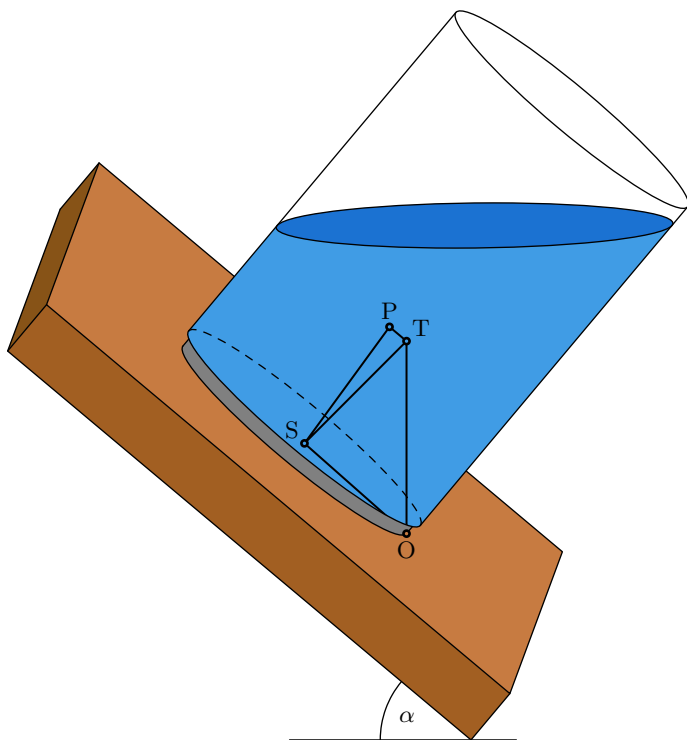
Kubickou rovnicí dokážeme vyřešit analyticky. Ještě musíme zjistit limity platnosti této rovnice. Na hranici mezi režimem vlevo na obrázku 39 a režimem uprostřed bude platit

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{h_v}{R} = \frac{m_{\min}}{\pi \rho R^3}, \quad (91)$$

to je minimální úhel platnosti našeho modelu. Naopak na hranici mezi režimem vpravo a režimem uprostřed platí

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{H - h_v}{R} = \frac{\pi \rho R^2 H - m_{\max}}{\pi \rho R^3}. \quad (92)$$

Hraniční hmotnosti vody m_{\min} , resp. m_{\max} můžeme najít numericky tak, že porovnáme řešení kubické rovnice pro danou hmotnost vody s úhlem vypočteným podle vztahu (91), resp. (92). Pokud řešení kubické rovnice souhlasí s jedním z těchto dvou úhlů, našli jsme hraniční úhel a tím pádem i hraniční hmotnost. Pro přechod mezi prvním a druhým režimem vyšla hmotnost vody 93,0 g při úhlu pádu 41,0°, zatímco



Obr. 42: Situace těsně před převrnutím.

přechod mezi druhým a třetím režimem by měl nastat při hmotnosti vody 253,9 g a úhlu $34,1^\circ$. Pro hmotnosti vody vyšší než 253,9 g pak očekáváme, že před převrnutím plechovky bude voda přetékat přes okraj a plechovka spadne vždy při stejném úhlu $34,1^\circ$.

Pádové úhly v režimu 1 jsme museli najít numericky na počítači⁷

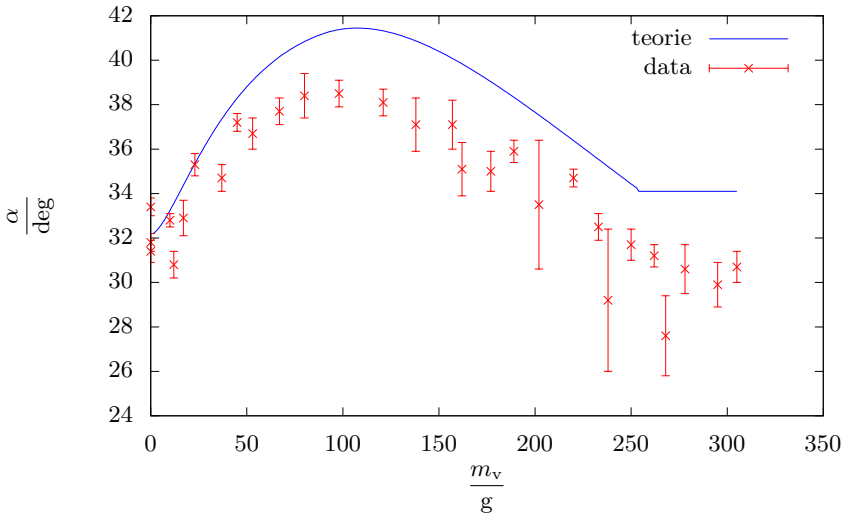
Výsledky

Výšku těžiště prázdné plechovky jsme určili experimentálně. V třech sériích měření jsme změřili pádový úhel prázdné plechovky jako $\alpha_0 = (32,2 \pm 0,4)^\circ$. Podle vztahu $\text{tg } \alpha_0 = r/h_p$ jsme spočítali výšku těžiště plechovky jako $h_p = (4,99 \pm 0,08)$ cm. Tuto hodnotu můžeme dosadit do rovnic odvozených v odstavci o teorii a učinit nějaké předpovědi.

Výsledky experimentu i porovnání s teoretickou předpovědí vidíme na obrázku 43. Maximum pádového úhlu nastane ve druhém režimu (viz modrou křivku),

⁷ Vztahy pro objem a těžiště obecné válcové výseče je možné buď odvodit integrováním, nebo nalézt například zde: <https://mathworld.wolfram.com/CylindricalWedge.html>.

takže jej můžeme určit nalezením největšího řešení rovnice (90). Teoretická předpověď maximálního pádového úhlu je $41,2^\circ$ při 105 g vody v plechovce.



Obr. 43: Závislost pádového úhlu na množství vody v plechovce. Chybové úsečky mají významnost 2σ . Ve vodorovném směru jsme chybové úsečky nekreslili, nepřesnost měření je všude 0,7 g. Modrá křivka je teoretická předpověď pádového úhlu.

Měření závislosti pádového úhlu na množství vody v plechovce potvrdilo naši kvalitativní předpověď, že maximum pádového úhlu nastane při středním množství vody v plechovce. Z grafu můžeme vyčíst, že maximální pádový úhel je $(38,5 \pm 0,5)^\circ$ při hmotnosti vody (98 ± 6) g.

Naměřená data jsou taktéž konzistentní s předpovědí, že ve třetím režimu nad určitou kritickou hmotností je úhel pádu konstantní. Kritická hmotnost vody, přechod mezi druhým a třetím režimem, byla určena z grafu jako (278 ± 6) g a kritický pádový úhel jako $\alpha_{\max} = (30,4 \pm 0,7)^\circ$. Na fotografii 44 vidíte situaci předpovězenou na obrázku 39 vpravo – voda přetéká okraj plechovky, avšak plechovka stojí v klidu.

Diskuze

V datech není vidět ani náznak přechodu (např. nespojitá změna první derivace křivky) mezi prvním a druhým režimem. Na to jsou jednotlivá měření příliš zatížena chybami. Žádný takový náznak však nepozorujeme ani v teoretické křivce, takže je možné, že žádný výrazný přechod mezi režimem 1 a 2 neexistuje. Experimentátor bohužel během experimentu nesledoval, kdy vodní hladina protíná dno a kdy už



Obr. 44: Třetí režim převržení plechovky na záznamu z videa. Voda vytéká z plechovky, avšak úhel náklonu je menší než α_{\max} , a tak se plechovka nepřevrátí.

Kdybychom dále neměnili úhel náklonu, po odtečení přebytečné vody by se situace stabilizovala.

protíná plášť plechovky, takže nemůžeme nic říct o tom, kdy nastal přechod mezi režimy 1 a 2 v experimentu.

Problém, že materiál plechovky nemá rovnoměrnou tloušťku, ale například okraje dole a nahoře jsou zesílené, se podařilo obejít tím, že polohu těžiště h_p vystupující v rovnicích jsme určili experimentálně, nikoliv teoretickým výpočtem. Změřená hodnota se výrazně neliší od rozumného předpokladu $h_p \approx H/2$. Na druhou stranu, změření h_p ze stejných dat zase způsobilo jistou provázanost mezi teorií a experimentálními výsledky, takže v levé části grafu pro malé hmotnosti vody se teoretická předpověď bude vždy shodovat s daty, ale to je jen umělá shoda právě kvůli určení h_p stejnou metodou.

Tvar modré křivky je velice podobný tvaru experimentálně naměřené závislosti pod ní. Největší rozpor mezi naměřenými daty a předpovědí je, že modrá

křivka je posunutá o pár stupňů nahoru. To by naznačovalo systematickou chybu v provedení experimentu. Nabízí se vysvětlení, že jsme při zpracování obrazu špatně nakalibrovali rovinu, vůči které měříme úhel náklonu. To by vedlo k tomu, že teoretická křivka by byla o pár stupňů posunutá vůči naměřeným datům, jak skutečně pozorujeme. Musíme ale zdůraznit, že výška těžiště prázdné plechovky byla určena stejnou metodou, takže v každém případě se pro hmotnost vody 0 g budou teoretická i naměřená křivka shodovat.

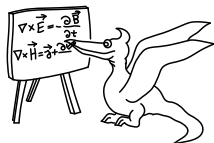
Hraní si s počítačovým modelem plechovky s vodou také ukázalo, že i malé variace ve výšce podstavy ψ vedou k signifikantním změnám ve tvaru a poloze teoretické křivky. Na to bychom měli dávat pozor, neboť ψ je veličina, která je nejednoznačně určená (zvlněné dno plechovky, nenulová tloušťka dna, smirkový papír připepený k podstavě) a změřili jsme ji s největší nejistotou. Například, pokud ponecháme všechny parametry modelu a změníme jen výšku podstavy na $\psi = 0,70$ cm, teoretická křivka bude dobře kopírovat data pro všechny hmotnosti vody. Ačkoliv jsme se při měření ψ (doufejme) o tolik nespletli, nepřesnost v ψ určitě mohla významnou měrou přispět k rozdílu mezi teoretickou předpovědí a daty.

Další oblastí, jež potřebuje nutně vylepšit, je přesnost měření. Pokud chceme v datech najít přechod mezi prvním a druhým režimem, pádové úhly musí být změřeny přesněji. Pomohlo by zdvihání prkna rovnoměrnou rychlostí (např. pomocí stroje), přesnější váhy, abychom přesněji změřili hmotnost vody, atd.

Závěr

Výsledky experimentu můžete vidět na obrázku 43. Podařilo se potvrdit původní předpoklad, že maximální pádový úhel nastane při středním množství vody v plechovce, nikoliv při prázdné plechovce ani plné plechovce. Tento maximální úhel byl změřen jako $(38,5 \pm 0,5)^\circ$ při hmotnosti vody (98 ± 6) g. Naměřená hmotnost je konzistentní s předpovězenou hmotností 105 g v intervalu 2σ , avšak předpovězený úhel $42,1^\circ$ se příliš liší od naměřené hodnoty.

Data taktéž podporují předpoklad, že pro velké hmotnosti vody v plechovce je úhel pádu konstantní. Tento úhel byl určen jako $(30,4 \pm 0,7)^\circ$ a kritická hmotnost vody, nad kterou je pádový úhel konstantní, je (278 ± 6) g. Ani úhel ani hmotnost nejsou konzistentní s předpovězenými hodnotami $34,1^\circ$, resp. 253,9 g. Je vysoce pravděpodobné, že měření bylo zatíženo systematickou chybou.



Kmity a vlnění

Kapitola 1: Kmity a vlnění

Úvod

Jeden z nejrozšířenějších a nejlépe popsanych fenoménů v přírodě je kmitání. Od kytarových strun, kyvadel, vln na moři či elektrických obvodů, v mnoha systémech můžeme pozorovat nějaký druh vlnění či kmitání. Jak toto kmitání vzniká? Jak systémy reagují na vnější síly? Které veličiny hrají při kmitání roli, a které ho naopak neovlivňují? Toto jsou otázky, na které se budeme snažit nalézt odpověď v letošním seriálu.

Zpět k pružinám

Pokud chceme porozumět složitějším jevům, jako vlnění, musíme nejprve dobře analyzovat základní složku každého problému zahrnujícího oscilace – jednoduché kmity. Začneme na nejjednodušším příkladě – závaží na pružině. Tento systém je snad až nechvalně proslulý ve fyzikálním světě, kde ho velmi často potkáváme jako základní systém. Vy jste ho taktéž jistě už potkali, nebo zanedlouho potkáte v hodinách fyziky. Snad právě četnost jeho používání při výuce je odrazem skutečnosti, že tento nenápadný systém v sobě skrývá zásadní vlastnosti společné pro všechny oscilující systémy.

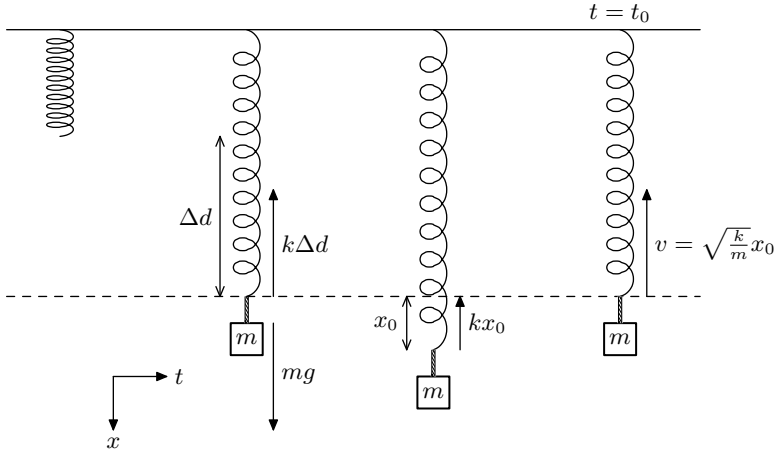
Ukazuje se totiž, že všechny kmitající systémy splňují určité vlastnosti nezávisle na tom, zda se jedná o pružinu, kyvadlo či jiný systém. Postupně rozklíčujeme, o které vlastnosti se jedná.

Uvažujme nyní dokonalou pružinu (viz obrázek 45), která se vyznačuje tím, že při prodloužení z klidové délky o určitou délku Δd vzniká síla o velikosti $F = k\Delta d$, kde k je tzv. tuhost pružiny, která se snaží vrátit pružinu do původní délky. Pokud na pružinu zavěsíme závaží o hmotnosti m , které je v klidu, musí se tato síla pružiny vybalancovat s tíhou závaží čili platí

$$mg = k\Delta d.$$

Rychlost závaží je v klidu nulová, a tedy i kinetická energie závaží je v tomto stavu nulová. Potenciální energie systému se skládá z energie natažení pružiny a z gravitační potenciální energie závaží v tíhovém poli. Nulovou hladinu potenciální energie můžeme zvolit jako stav, kdy je prodloužení pružiny Δd , a tím pádem je i potenciální energie závaží nulová.

Co se stane, pokud závaží vychýlíme tak, že bude prodloužení pružiny $\Delta d + x_0$? Stále předpokládáme, že závaží je v klidu – držíme ho v určité konstantní výchyl-



Obr. 45: Závaží na pružině před natažením, při natažení a po puštění.

ce x_0 . Změní se tedy síla, kterou pružina na závaží působí, a potenciální energie systému. Změna potenciální energie má velikost

$$E_p = \frac{1}{2} k x_0^2,$$

jak můžeme ověřit z grafu síly v závislosti na výchylce. Síla, která na závaží působí, je

$$F = -k x_0,$$

kde znaménko mínus značí, že síla působí ve směru opačném ke směru výchylky x_0 . Tady narážíme na první dva obecné znaky kmitavých systémů. Zaprvé, *síly v kmitajících systémech působí opačným směrem, než je směr výchylky*. Zadruhé, *potenciální energie harmonických kmitajících systémů roste jako čtverec výchylky*.

Nyní závaží necháme rozkmitat a ve vychýlené poloze ho pustíme. Síla bude závaží urychlovat zpět směrem k výchylce $x(t_0) = 0$, kterou dosáhne závaží v čase t_0 . Během tohoto pohybu vykoná síla přesně práci $\frac{1}{2} k x_0^2$, a tedy kinetická energie závaží bude v momentu, kdy $x(t_0) = 0$, rovna

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2(t_0) = \frac{1}{2} k x_0^2.$$

Zřejmě se tedy energie v systému nikam neztrácí, a můžeme očekávat, že závaží prolétne rovnovážnou polohou $x(t_0) = 0$ rychlostí o velikosti $v(t_0) = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$, a následně začne zpomalovat, když se síla působící na závaží obrátí. Závaží pak dosáhne výchylky $-x_0$ a proces se bude opakovat obráceně, dokud nedosáhne původního stavu (viz obrázek 45).

Směřování k obecnosti – fázový prostor

Nyní se pokusíme odvodit dynamiku tohoto jednoduchého oscilátoru, tj. průběh různých veličin rozlišený v čase. Volíme k tomuto postup bez použití algebry diferenciálního počtu, který možná některým z vás, co s derivacemi pracovat umíte, připadá lehce krkolomný, ale věříme, že se jedná o způsob zajímavý. Používáme totiž ideu fázového prostoru. Nicméně, jakémusi proto-diferenciálnímu počtu se nevyhneme.

Fázový prostor je prostor složený z dvou typů veličin – z veličin, které odpovídají pozicím/výchylkám v systému, a z veličin odpovídajících hybnostem v systému. V našem případě má fázový prostor pouze dva rozměry – jeden rozměr odpovídající výchylce x a druhý rozměr odpovídající hybnosti $p = mv$.

Pro pohyb oscilátoru platí zákon zachování energie. Říkáme, že energie je integrálem pohybu. Můžeme tedy psát

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

Tuto energii můžeme vyjádřit jako podmínku na hybnost a výchylku ve fázovém prostoru ve tvaru

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

Vynásobením $\frac{2}{k}$ dostáváme

$$\frac{p^2}{km} + x^2 = x_0^2.$$

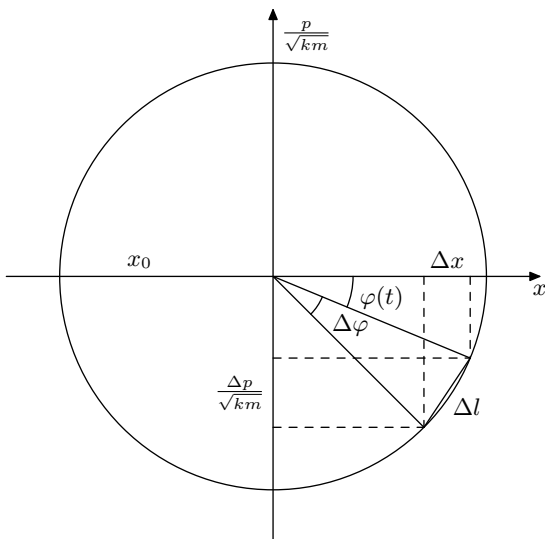
Pokud si vzpomenete na hodiny analytické geometrie, zajisté poznáte, že tato podmínka představuje podmínku pro body na kružnici o poloměru x_0 ve fázovém prostoru, kde na svislou osu vynášíme $\frac{p}{\sqrt{km}}$, viz obrázek 46. To tedy znamená, že náš oscilátor můžeme v každém okamžiku popsat jako bod na kružnici ve fázovém prostoru. Abychom získali dynamiku oscilátoru, musíme zjistit, jak se oscilátor po této trajektorii pohybuje. Kvalitativně jsme alespoň přímo schopni určit, že se oscilátor pohybuje po kružnici v záporném směru, tj. po směru hodinových ručiček. Toto je důsledek druhého Newtonova zákona a orientace síly – pro kladné výchylky x musí síla působit v záporném směru a tedy i hybnost růst v záporném směru.

Pro popis pohybu po kružnici se nabízí klasická veličina – úhlová rychlost. Obecně se tato rychlost může měnit s časem, proto budeme její velikost označovat jako ω . Úhlová rychlost v čase t je dána úhlem o velikosti $\Delta\varphi$, který bod ve fázovém prostoru urazí mezi časem t a $t + \Delta t$, kde Δt je nějaký malý časový interval. Z definice úhlu vyplývá

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{x_0},$$

kde Δl se blíží k délce oblouku uraženého po kružnici za čas Δt pro dostatečně malé Δt . Tuto délku určíme pomocí Pythagorovy věty

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \frac{\Delta p^2}{km}},$$



Obr. 46: Trajektorie harmonického oscilátoru ve fázovém prostoru.

kde ze zákona zachování energie platí

$$\Delta p = \sqrt{km(x_0^2 - (x - \Delta x)^2)} - \sqrt{km(x_0^2 - x^2)},$$

kde Δx je velikost změny souřadnice x za čas Δt . Pro malé Δx můžeme provést rozvoj (viz níže)

$$\begin{aligned} \sqrt{km(x_0^2 - (x - \Delta x)^2)} &\approx \sqrt{km(x_0^2 - x^2 + 2x\Delta x)} = \\ &= \sqrt{km(x_0^2 - x^2)} \sqrt{1 + \frac{2x\Delta x}{x_0^2 - x^2}} \approx \sqrt{km(x_0^2 - x^2)} \left(1 + \frac{x\Delta x}{x_0^2 - x^2}\right). \end{aligned}$$

A tedy

$$\Delta p = \Delta x \sqrt{km \frac{x^2}{x_0^2 - x^2}},$$

což nás vede k

$$\Delta l = \Delta x \sqrt{1 + \frac{x^2}{x_0^2 - x^2}} = \Delta x \sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2 - x^2}}.$$

Tím pádem získáváme úhel

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta l}{x_0} = \Delta x \sqrt{\frac{1}{x_0^2 - x^2}}$$

a úhlovou rychlost

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \sqrt{\frac{1}{x_0^2 - x^2}}.$$

Poměr $\Delta x/\Delta t$ můžeme rozpoznat jako rychlost závaží, pro kterou platí

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{p}{m} = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)},$$

z čehož vyplývá zásadní rovnost

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

kde si všimněme zejména toho, že úhlová rychlost ve fázovém prostoru je *nezávislá na čase*, tj. náš oscilátor se pohybuje ve fázovém prostoru po kružnicové trajektorii s konstantní úhlovou rychlostí.

Tento objev přináší konečně vhled do dynamiky kmitání - kmitání odpovídá projekci souřadnice bodu na kružnici do směru souřadnice x . Tu lze určit jako

$$x = x_0 \cos \varphi = x_0 \cos(\omega t)$$

v našem původním zadání, kde φ je aktuální úhel ve fázovém prostoru, brány v záporném směru (viz obrázek 46). Obdobně, v našem případě lze určit

$$\frac{p}{\sqrt{km}} = -x_0 \sin(\omega t)$$

pomocí projekce do druhého směru. Tím pádem platí

$$p = -x_0 \sqrt{km} \sin(\omega t),$$

$$v = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\omega t) = -x_0 \omega \sin(\omega t).$$

Konečně, z druhého Newtonova pohybového zákona můžeme odvodit, že zrychlení závaží je

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{kx}{m} = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t).$$

Tím pádem jsme získali kompletní dynamiku našeho oscilátoru.

Jaké obecné poznatky si z tohoto příkladu můžeme odnést? Zaprvé, kmitání ve fázovém prostoru vypadá jako rovnoměrný pohyb bodu po kružnici (při použití vhodných jednotek). Zadruhé, frekvenci tohoto pohybu lze určit z druhého Newtonova zákona a ze vztahu mezi zrychlením a výchylkou

$$a = -\omega^2 x.$$

Harmonický aproxilátor

Zmínili jsme, že důležitou vlastností harmonických kmitajících systémů je parabolický profil potenciální energie – potenciální energie roste jako čtverec výchylky. Ukazuje se, že pokud se systém nachází ve stabilní poloze (neboli v nějakém minimu potenciální energie), pak lze vždy pro dostatečně malé výchylky považovat profil potenciální energie za parabolický. Tím pádem lze říct, že ve stabilních systémech pro malé výchylky vždy vznikají síly, které působí v opačném směru k výchylce a jejich velikost roste lineárně s výchylkou.

Lineární závislost sil na výchylce je nutná, pokud má být energetická závislost parabolická, a záporné znaménko odpovídá tomu, že se systém snaží minimalizovat potenciální energii, tj. snaží se vrátit k minimu.

Aby se jednalo skutečně o harmonické kmity, je ještě zapotřebí, aby kinetická energie, kterou systém získá působením síly, byla úměrná čtverci hybnosti. Pokud je přítomná nějaká jiná závislost, nevytvoří se ve fázovém prostoru kruh a nejedná se o harmonické oscilace. Některé takové oscilace budeme zkoumat v příštím díle seriálu, ale pouze ve zjednodušené formě.

Nejdůležitější charakteristikou kmitů je jejich frekvence. Tu lze zcela obecně určit analogickým způsobem jako pro případ závaží na pružině – určíme sílu, která na systém působí při malé výchylce ze stabilní polohy. Z této síly pak pomocí Newtonova druhého zákona vyjádříme zrychlení a dostaneme rovnici ve tvaru $a = -\omega_0^2 x$, kde x je výchylka a ω_0 je hledaná frekvence kmitů. Problém určení frekvence kmitů se tedy zjednodušuje na problém aproximace síly působící na systém pro malé výchylky. Právě jednoduchost a obecnost tohoto postupu vede k tomu, že se mnoho stabilních systémů modeluje pro malé výchylky jako harmonické oscilátory.

Abychom mohli postupovat účinně, je potřeba připomenout si/vysvětlit si některá přiblížení složitějších funkcí pro malé výchylky. Začneme se základními funkcemi – polynomy. Uvažujme, že máme malé číslo x (tedy číslo, pro které platí $|x| \ll 1$), a snažíme se určit přibližnou hodnotu výrazu

$$(1 + x)^n ,$$

kde n je přirozené číslo. Zřejmě, pokud x je malé číslo, pak $|x^2| \ll |x|$, $|x^3| \ll |x^2|$ atd. Tím pádem, můžeme hovořit o určité přesnosti našeho přiblížení podle toho, do kolikátého řádu x budeme výsledek zpřesňovat. Například polynom druhého stupně můžeme aproximovat do prvního řádu jako

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \approx 1 + 2x$$

a polynom čtvrtého stupně do druhého řádu jako

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \approx 1 + 4x + 6x^2 .$$

Pro účely určování frekvencí harmonických kmitů nám budou většinou postačovat přiblížení do prvního řádu, tedy přiblížení typu

$$(1 + x)^n \approx 1 + cx ,$$

kde c je nějaká konstanta. Z binomického rozvoje členu $(1+x)^n$ vyplývá, že vždy platí $c = n$. Pro ty zvědavější z vás, můžete zkusit důkaz matematickou indukcí, nebo pokud si pamatujete důkaz binomické věty, pak je důkaz tohoto tvrzení triviální.

Ovšem, u přirozených čísel užitečnost tohoto rozvoje nekončí – ukazuje se, že pro obecné reálné číslo a lze provést aproximaci do prvního řádu

$$(1+x)^a \approx 1+ax,$$

takže můžeme psát například

$$\frac{1}{(1+x)^\pi} \approx 1 - \pi x.$$

Důkaz tohoto tvrzení je složitější, zvědavější z vás odkazuji k četbě o Taylorových řadách.

Polynomy ovšem nejsou jediné funkce, se kterými se budeme setkávat. Často se setkáváme s goniometrickými funkcemi. Kde je můžeme jak přiblížit? Začněme funkcí sinus v okolí bodu 0. Hodnotu sinu si můžeme představit jako poměr hodnoty protilehlé odvěsny vůči přeponě v pravoúhlém trojúhelníku. Představme si nyní Thaletovu kružnici (viz obrázek 47), kde jedna z odvěsen je velmi krátká. Sinus nejmenšího úhlu je zřejmě také velmi malé číslo a délka nejmenší odvěsny b se blíží k délce kružnicového oblouku l , který vytyčuje tento nejmenší úhel. Lze tedy říct $b \approx l$ čili

$$\sin \varphi = \frac{b}{c} \approx \frac{l}{c}.$$

Zároveň si můžeme všimnout, že středový úhel, který přísluší stejnému oblouku, má velikost 2φ , a platí (z definice úhlu)

$$2\varphi = \frac{l}{\frac{c}{2}} = \frac{2l}{c},$$

což znamená, že

$$\varphi = \frac{l}{c},$$

a tím pádem

$$\sin \varphi \approx \varphi.$$

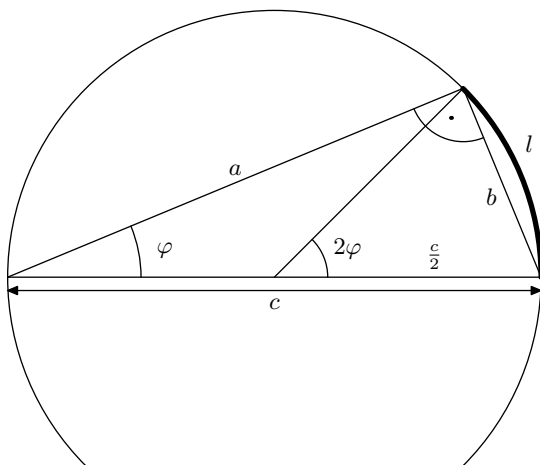
Podobným argumentem vede k tomu, že platí

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi.$$

Zajímavá vlastnost kosinu je, že do prvního stupně ho lze aproximovat v okolí nuly jako konstantu (což souvisí s tím, že kosinus má v nule maximum). Do druhého stupně pak lze psát

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

což odpovídá aproximaci kosinu pomocí paraboly.



Obr. 47: Thaletova kružnice pro přiblížení goniometrických funkcí.

Poslední třída funkcí, jejichž přiblíženími se budeme zabývat, jsou exponenciály a logaritmy. Exponenciální funkci budeme aproximovat v blízkosti bodu $x = 0$. Jak možná víte, Eulerovu konstantu lze definovat jako

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pak můžeme nahlédnout, s využitím našich přiblížení polynomů (ale měli bychom rozumět, že toto rozhodně není kompletní matematický důkaz)

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} \approx 1 + \frac{nx}{n} = 1 + x.$$

Pokud hledáme přiblížení mocniny o jiném základu, můžeme použít vztahy pro logaritmy

$$2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{x \ln 2} \approx 1 + x \ln 2$$

a obdobně pro jiné základy.

Samotný logaritmus nemá smysl rozvíjet v okolí nuly, protože zde se zprava blíží k $-\infty$. Můžeme ho však rozvíjet v okolí jedničky, což je vlastně inverze rozvoje exponenciály. Hledáme tedy rozvoj $\ln(1+x)$. Inverzí našeho předchozího argumentu můžeme nahlédnout

$$\ln(1+x) \approx \ln e^x = x.$$

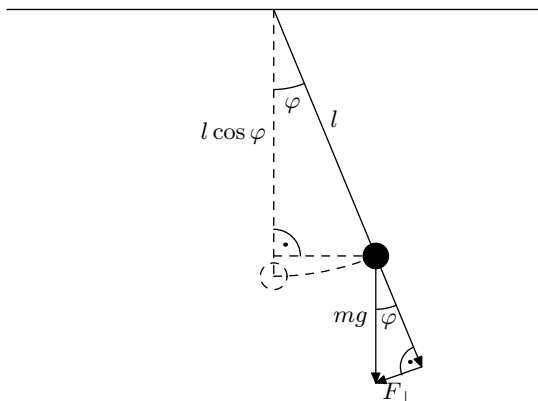
Nakonec, pro logaritmy o odlišných základech použijeme vztahy pro změny základu logaritmů

$$\log_5(1+x) = \log_5(e) \ln(1+x) \approx x \log_5 e$$

a obdobně pro jiné základy.

Příklad přiblížení – kyvadlo

Abychom si ukázali, jak postupovat s odvozenými přiblíženími, uvažujme klasické kyvadlo – hmotný bod o hmotnosti m na v jednom bodě upevněné lehké nedeformovatelné tyčce o délce l v gravitačním zrychlení g (viz obrázek). Tento systém má stabilní polohu – ve chvíli, kdy je hmotný bod v klidu přímo pod závěsným bodem. Při malé výchylce z této pozice můžeme tíhovou sílu, která působí na hmotný bod, rozložit do směru rovnoběžného k tyčce a do směru kolmého k tyčce.



Obr. 48: Geometrie kyvadla při malé výchylce.

Z geometrie problému vidíme, že síla kolmá na tyčku má velikost

$$F_{\perp} = mg \sin \varphi,$$

kde φ je malá úhlová výchylka tyčky z rovnovážné polohy. Moment této síly je

$$M = -lF_{\perp} = -mgl \sin \varphi$$

a moment setrvačnosti hmotného bodu kolem osy procházející závěsem je

$$J = ml^2,$$

a tedy úhlové zrychlení je podle druhé impulsové věty rovno

$$\alpha = \frac{M}{J} = -\frac{mgl \sin \varphi}{ml^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Pro malé φ dostáváme standardní rovnici harmonických kmitů

$$\alpha \approx -\frac{g}{l} \varphi,$$

akorát místo přímého zrychlení a malého posunutí máme úhlové zrychlení a malé pootočení, což ale na podstatě problému nic nemění. Stále dostaneme harmonické kmity okolo rovnovážné polohy s frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Zdůrazněme, že kyvadlo se nepohybuje s konstantní úhlovou rychlostí ve φ , tj. nevykonává rovnoměrnou rotaci ve $\varphi - \omega$ značí frekvenci samotných oscilací v úhlech, nikoliv úhlovou rychlost.

Ještě by nás mohlo zajímat, zda má potenciální energie opravdu požadovaný kvadratický profil (víme, že kinetická energie rotací má kvadratický profil v momentu hybnosti). Nulovou hladinu potenciální energie můžeme zvolit ve výšce, v níž se nachází hmotný bod v rovnovážné poloze. Pak platí

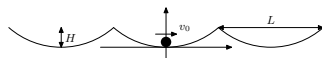
$$E_p = mg(l - l \cos \varphi) \approx mgl \left(1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} mgl \varphi^2,$$

a tedy i potenciální energie má požadovaný kvadratický profil pro malé výchylky.

Úloha I.S ... kmitáme

10 bodů

Seriál začneme zkoumáním několika mechanických oscilátorů, u kterých nás bude zajímat především určení frekvence volných kmitů. Dále si zopakujeme, jak vypadá oscilátor ve fázovém prostoru.



1. Uvažujme dutý nehmotný kužel, do jehož špičky vložíme kámen o hmotnosti M . Kužel ponoříme špičkou dolů do vody o hustotě ρ , ve které bude plovat. Určete rovnovážnou hloubku ponoru kužele měřenou od špičky h , pokud je celková výška kužele H a poloměr základny R . Dále nalezněte úhlovou frekvenci malých vertikálních kmitů kuželu.
2. Představme si závaží o hmotnosti m přidělané na nehmotné pružině o tuhosti k a klidové délce L . Pokud pružinu na druhém konci upevníme, dostaneme kyvadlo. Spočítejte přirozenou úhlovou frekvenci jeho oscilací, přičemž předpokládejte, že délka pružiny se během pohybu nemění. Následně určete malý rozdíl v úhlové frekvenci $\Delta\omega$, o který se úhlová rychlost tohoto kyvadla liší od případu, ve kterém je pružina nahrazena nedeforovatelnou tyčí se stejnou klidovou délkou. Přitom předpokládejte $kL \gg mg$.
3. V terénu, který se skládá z periodicky se opakujících parabol s výškou H a šířkou L , se nachází kostka cukru s hmotností m . Popište její potenciální energii jako funkci souřadnice v horizontálním směru a následně načrtněte možné trajektorie jejího pohybu ve fázovém prostoru v závislosti na rychlosti v_0 , kterou má při průchodu vrcholem paraboly. Na náčrtku označte všechny významné vzdálenosti. Pro výchylku použijte horizontální souřadnici, vhodně přizpůsobte jednotky hybnosti v horizontálním směru. Při výpočtech zanedbejte kinetickou energii pohybu kostky ve vertikálním směru a předpokládejte, že stále zůstává v kontaktu s terémem.

(řešení str. 212)

Kapitola 2: Tření a vnější síly

V úvodním dílu seriálu jsme se zabývali dokonalými kmity – na naše závaží na pružině nepůsobil odpor vzduchu, kyvadlo kmitalo v bezvětří a kužel se potápěl v dokonale stojaté vodě. V reálném světě ovšem často musíme počítat s tím, že na naše závaží působí kromě síly způsobované pružinou i další síly. V tomto díle se budeme zabývat tím, jak s takovými externími silami pracovat, a představíme si důležitý důsledek povahy oscilátorů v poli vnějších sil – rezonanci.

O co se síly snaží?

Uvažujme nyní kmitající systém, který popíšeme výchylkou x a hybností $p = mv$, kde v je rychlost změny výchylky. Označíme-li zrychlení výchylky jako a , dá nám druhý Newtonův zákon rovnici

$$F = ma,$$

kde F je součet všech sil působících na systém. Prozatím budeme uvažovat pouze pohyb v jedné dimenzi. V minulém dílu nám stačilo pracovat pouze se silou, která se snažila vrátit systém do rovnovážné polohy a měla vyjádření

$$F_0 = -kx,$$

kde x byla výchylka odpovídající rovnovážné poloze. Nyní k této síle připočteme obecnou externí sílu závisující na čase, což lze reprezentovat zápisem

$$F_e = F_e(t).$$

Výsledná rovnice má tvar

$$F_e(t) = ma + kx. \quad (93)$$

Obecné řešení této rovnice je složité, provedme proto zpočátku aproximaci – předpokládejme, že hmotnost je natolik malá, že kinetická energie systému je vždy zanedbatelná ve srovnání s potenciální energií systému. Rovnice (93) se tím zjednoduší na

$$F_e(t) = kx.$$

Vidíme, že v tomto případě se síla vracející systém do rovnovážné polohy přesně vyrovná s externí silou a výchylka následuje bez jakéhokoliv zpoždění externí síly. Pokud by závislost externí síly na čase byla například $F_e(t) = F_e^0 \cos(\omega t)$, pak by se výchylka v čase měnila jako

$$x(t) = \frac{F_e^0}{k} \cos(\omega t),$$

kde F_e^0 je amplituda externí síly.

Normální systém ovšem nulovou hmotnost nemá – to způsobí, že systém má nenulovou hybnost ve chvíli, kdy se externí síla vyrovná se silou F_0 , a tím pádem pokračuje v pohybu i mimo tuto výchylku. Externí síla tak vlastně určuje novou rovnovážnou polohu, do které se systém snaží dostat, ale kterou vždy „přestřelí“.

Tuto ideu můžeme realizovat formálněji na následujícím příkladu. Uvažujme sílu s časovým průběhem $F_e(t) = F_e^0 \Theta(t)$, kde $\Theta(t)$ je tzv. Heavisideova funkce, pro kterou platí

$$\Theta(t) = \begin{cases} \Theta(t) = 1 & t > 0 \\ \Theta(t) = 0 & t < 0 \end{cases} .$$

Jedná se tedy o konstantní sílu, kterou v čase $t = 0$ „zapneme“. Pro čas $t < 0$ je rovnice (93) shodná s rovnicí harmonických kmitů. Pro jednoduchost uvažujme, že systém má pro $t < 0$ nulovou výchylku, a tím pádem je v klidu. Pro $t > 0$ je pak pohybová rovnice

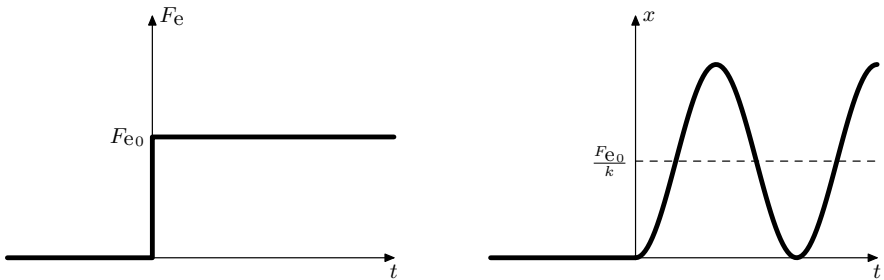
$$\begin{aligned} F_e^0 &= ma + kx, \\ 0 &= ma + k \left(x - \frac{F_e^0}{k} \right). \end{aligned}$$

Zde si můžeme uvědomit, že pokud udáváme polohu v souřadnicích $x' = x - \frac{F_e^0}{k}$, zůstává rychlost $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} = v'$ nezměněná a platí

$$0 = ma' + kx' .$$

Vidíme, že systém v tomto případě vykonává jednoduché harmonické kmity, ovšem okolo nové rovnovážné polohy, kterou je $\frac{F_e^0}{k}$. Důležité je, že tyto kmity probíhají s přirozenou úhlovou frekvencí systému

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$



Obr. 49: Systém vlivem vnější síly začne kmitat okolo nové rovnovážné polohy.

Systém pod vlivem externí síly můžeme kvalitativně popsat následujícím způsobem – externí síla se snaží dostat systém do nové rovnovážné polohy dané velikostí síly, avšak oscilační povaha systému mu brání setrvat v klidu v blízkosti rovnovážné polohy.

Povolené ztráty

Mimo externí síly musíme v reálných systémech uvažovat také třecí síly. Ty jsou obecně poměrně složité, nicméně pro relativně pomalé oscilace lze tření vznikající odporem tekutiny přibližně modelovat jako sílu

$$F_t = -\gamma mv,$$

kde γ je koeficient tření (má rozměr s^{-1} , tedy stejný jako frekvence). Tento model tření má značnou výhodu v tom, že je lineární. Pokud je náš pohyb složen ze dvou rychlostí v_1 a v_2 , výsledná třecí síla je

$$F_t = -\gamma m(v_1 + v_2) = -\gamma mv_1 - \gamma mv_2 = F_{t1} + F_{t2}.$$

Pokud tuto sílu vnímáme jako externí sílu, rovnice (93) vede (opět pro nesložený pohyb) na

$$-\gamma mv = ma + kx. \quad (94)$$

Tento vztah není zcela triviální, jelikož a , x i v se v čase mění. Abychom odhalili základní fyzikální principy, uvažujme opět zjednodušení, kdy koeficient γ je relativně malý vzhledem k přirozené frekvenci oscilací $\omega_0 = \frac{k}{m}$. V takovém případě je naše rovnice vlastně opět rovnicí harmonických kmitů, avšak s malým vlivem tření. Kvůli tomuto tření bude systém ztrácet energii. Množství ztracené energie lze odhadnout, budeme-li předpokládat, že systém osciluje pouze harmonicky, tj. platí

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t), \\ v(t) &= -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t), \\ a(t) &= -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Výkon ztráty energie je dán jako

$$P = F_t v = -\gamma m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

S použitím vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin^2 \omega_0 t = \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2}$$

dostáváme

$$P = -\frac{1}{2} \gamma m x_0^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \gamma m x_0^2 \omega_0^2 \cos(2\omega_0 t).$$

Průměrný výkon ztráty energie za jednu periodu kmitů je pak dán pouze prvním členem, jelikož cosinus se zprůměruje na nulu. Změna energie systému za jednu periodu je tedy

$$\Delta E = PT = P \frac{2\pi}{\omega_0} = -\pi \gamma m \omega_0 x_0^2.$$

Tato změna energie se projeví jako pokles amplitudy kmitání x_0 , která bude po jednom cyklu x'_0 , přičemž z rovnováhy energie plyne

$$\frac{1}{2}k(x'_0)^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 - \pi\gamma m\omega_0 x_0^2,$$

$$(x'_0)^2 = x_0^2 \left(1 - 2\pi\gamma \frac{m}{k}\omega_0\right) = x_0^2 \left(1 - \frac{2\pi}{\omega_0}\gamma\right) = x_0^2(1 - \gamma T)$$

a provedením aproximace pro malé γ

$$x'_0 = x_0 \sqrt{1 - \gamma T} \approx x_0 \left(1 - \frac{\gamma}{2}T\right).$$

Nezapomeňme, že jsme v našem odvození uvažovali pouze malé hodnoty γ , a tedy výraz $1 - \frac{\gamma}{2}T$ může být pouze přiblížením určité funkce pro nízké koeficienty tření. Při důkladnějším postupu se ukazuje, že správné řešení obsahuje exponenciální funkci, kterou pro malé hodnoty γ můžeme vyjádřit jako

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t} \approx 1 - \frac{\gamma}{2}t,$$

tedy platí

$$x'_0(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}. \quad (95)$$

Při ještě důkladnějším zkoumání se ukáže, že pouhý exponenciální pokles amplitudy není jediný efekt tření, ale mění se i frekvence oscilací. Při velkém tření se může dokonce stát, že systém vůbec oscilovat nebude. Těmito zpřesněními a odpovídajícími příklady se však zatím zabývat nebudeme. Nyní nám stačí si pamatovat, že tření způsobuje exponenciální pokles amplitudy kmitů.

Všechny síly dohromady

Nyní se budeme zabývat tím, jak ideu tření a ztrát energie v systému zkombinovat s ideou externích sil, které se snaží v systémem pohybovat. Pro tento účel budeme uvažovat jednoduchou harmonickou externí sílu

$$F_e(t) = F_e^0 \cos(\omega t),$$

kde ω se může lišit od ω_0 . Zároveň započteme v kmitech vliv tření, čímž získáme výslednou pohybovou rovnici

$$F_e^0 \cos(\omega t) = ma + \gamma mv + kx. \quad (96)$$

V systému, který tato rovnice popisuje, soupeří několik vlivů. Externí síla kontinuálně mění rovnovážný bod, kolem kterého se systém snaží oscilovat, zároveň však tření zabraňuje přílišné rychlosti systému, jehož oscilace tak ztrácí energii. Výsledkem těchto vlivů může být velmi komplikovaný pohyb, ovšem tření zajistí, že většina složek tohoto pohybu nakonec vymizí. Nás bude zajímat ta část pohybu, která s plynoucím časem nezmizí, tzv. *stacionární řešení*. Z tvaru rovnice (96)

můžeme tušit, že aby byla platná, musí systém nějak oscilovat, ale konkrétní amplituda a relativní fáze vzhledem k oscilacím externí síly nejsou jasné. Budeme předpokládat, že systém osciluje podle rovnic

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos(\omega' t - \varphi_0), \\v(t) &= -\omega' x_0 \sin(\omega' t - \varphi_0), \\a(t) &= -\omega'^2 x_0 \cos(\omega' t - \varphi_0).\end{aligned}$$

S použitím sčítacích vzorců pro goniometrické funkce dostáváme

$$\begin{aligned}\cos(\omega' t - \varphi_0) &= \cos \varphi_0 \cos(\omega' t) + \sin \varphi_0 \sin(\omega' t), \\ \sin(\omega' t - \varphi_0) &= \sin(\omega' t) \cos \varphi_0 - \cos(\omega' t) \sin \varphi_0.\end{aligned}$$

Tím pádem má rovnice tvar

$$\begin{aligned}F_e^0 \cos(\omega t) &= (kx_0 \cos \varphi_0 + \gamma m \omega' x_0 \sin \varphi_0 - m \omega'^2 x_0 \cos \varphi_0) \cos(\omega' t) + \\ &+ (kx_0 \sin \varphi_0 - \gamma m \omega' x_0 \cos \varphi_0 - m \omega'^2 x_0 \sin \varphi_0) \sin(\omega' t).\end{aligned}$$

Aby tato rovnice platila v jakýkoli čas t , člen obsahující $\sin(\omega' t)$ musí být nulový neboli musí platit

$$\begin{aligned}kx_0 \sin \varphi_0 - \gamma m \omega' x_0 \cos \varphi_0 - m \omega'^2 x_0 \sin \varphi_0 &= 0, \\ (\omega_0^2 - \omega'^2) \sin \varphi_0 &= \gamma \omega' \cos \varphi_0.\end{aligned}$$

Tato rovnice je triviálně splněna pro $\gamma = 0$ a $\varphi_0 = n\pi$, kde n je celé číslo. To znamená, že pokud je tření nulové, fázový rozdíl mezi silou a oscilacemi systému bude buď nulový, nebo budou síla a systém přesně v protifázi. V ostatních případech máme

$$\operatorname{cotg} \varphi_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega'^2}{\gamma \omega'} . \quad (97)$$

Vidíme, že tento výraz replikuje předpovídané chování pro $\gamma \rightarrow 0$, jelikož pro malé hodnoty γ dostáváme naopak velkou hodnotu funkce kotangens, která odpovídá buď takřka nulovému fázovému posunu (pro kladnou velkou hodnotu), nebo protifázi (pro zápornou hodnotu). Tím pádem je pohybová rovnice dána jako

$$\begin{aligned}F_e^0 \cos(\omega t) &= (kx_0 \cos \varphi_0 + \gamma m \omega' x_0 \sin \varphi_0 - m \omega'^2 x_0 \cos \varphi_0) \cos(\omega' t) = \\ &= x_0 \sin \varphi_0 (k \operatorname{cotg} \varphi_0 + \gamma m \omega' - m \omega'^2 \operatorname{cotg} \varphi_0) \cos(\omega' t).\end{aligned}$$

Nyní by mělo být zřejmé, že další podmínkou platnosti rovnice v každém čase je $\omega' = \omega$. Díky tomu už známe jak frekvenci, tak fázový posun kmitů. Ještě nás ovšem zajímá amplituda kmitů. Substitucí v rovnici (97) dostáváme

$$\begin{aligned}F_e^0 &= kx_0 \sin \varphi_0 \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma \omega} + \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2 \omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 \gamma \omega} \right) = \\ &= kx_0 \frac{\sin \varphi_0}{\gamma \omega \omega_0^2} (\omega_0^4 - \omega_0^2 \omega^2 + \gamma^2 \omega^2 + \omega^4 - \omega^2 \omega_0^2) = \\ &= kx_0 \frac{\sin \varphi_0}{\gamma \omega \omega_0^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right).\end{aligned}$$

Na tomto místě použijeme další goniometrickou identitu

$$1 + \cot^2 \varphi_0 = \frac{1}{\sin^2 \varphi_0},$$

s jejíž pomocí vyjádříme

$$\sin \varphi_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \varphi}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\gamma^2 \omega^2}}} = \pm \frac{\gamma \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}},$$

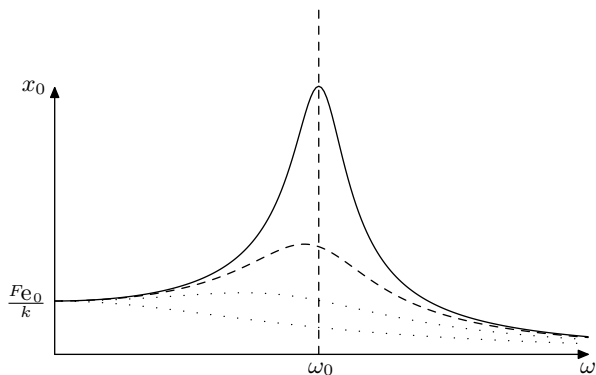
takže

$$F_e^0 = \pm x_0 \frac{k}{\omega_0^2} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Pokud nás zajímá pouze absolutní velikost amplitudy (relativní fázi už známe), máme jednoduše

$$x_0 = \frac{1}{m} \frac{F_e^0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}. \quad (98)$$

Všimněme si, že pokud za předpokladu malého tření ($\gamma \ll \omega_0$) zvolíme frekvenci externí síly ω blízkou ω_0 , výsledná amplituda oscilací je obrovská. Tomuto jevu se říká *rezonance* (viz obrázek 50).



Obr. 50: Amplituda jako funkce frekvence vnější síly. Grafy odpovídají třecím koeficientům $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0,2, 0,5, 1,2$ s klesajícím vrcholem pro rostoucí γ . Všimněme si, že pro γ , které již není mnohem menší než ω_0 , se maximum amplitudy přesouvá pryč od ω_0 .

Rezonanci lze pozorovat v mnoha systémech a dá se velmi dobře využít, kupříkladu pomocí rezonančních obvodů lze zvýraznit některé frekvence signálů oproti jiným. Samozřejmě existuje mnoho příkladů rezonance v akustice, například jednotlivé tóny. Jak je možné, že systém má více než jednu přirozenou frekvenci,

budeme řešit v pozdějších dílech seriálu, zabývajících se vlněním. Prozatím nám postačí zkoumat vlastnosti rezonance jednoduchých oscilátorů.

Vraťme se ke vztahům pro fázový rozdíl a amplitudu oscilujícího systému s externí silou. Z kvalitativního hlediska nás zajímají limity $\omega \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ a $\omega \rightarrow \omega_0$. Pokud je frekvence síly výrazně nižší než frekvence přirozených oscilací, platí

$$x_0 \rightarrow \frac{F_e^0}{m\omega_0^2} = \frac{F_e^0}{k}.$$

Zároveň $\cotg \varphi_0 \rightarrow \infty$, takže $\varphi_0 \rightarrow 0$ a opět máme situaci, ve které výchylka přesně následuje sílu. To dává smysl, jelikož předpoklad $\omega \rightarrow 0$ odpovídá systému, na nějž působí jen velmi pomalu se měnící vnější síla, a ten je díky tlumení schopen tuto sílu následovat. Efektivně to také odpovídá předpokladu $\omega_0 \rightarrow \infty$, což je ekvivalentní s případem $m \rightarrow 0$, který jsme diskutovali na začátku textu.

Pro případ $\omega \rightarrow \infty$, $\cotg \varphi_0 \rightarrow -\infty$, a tedy $\varphi \rightarrow -\pi$ je výchylka systému v přesné protifázi k oscilacím síly. Amplituda oscilací je

$$x_0 \rightarrow \frac{F_e^0}{m\omega^2} \rightarrow 0.$$

V této situaci jsou oscilace vnější síly tak rychlé, že se systém nestíhá rozpohybovat.

V posledním případě (při rezonanci) platí $\cotg \varphi_0 \rightarrow 0$ čili $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Síla je shodná se směrem rychlosti, oscilační amplituda

$$x_0 \rightarrow \frac{F_e^0}{\gamma\omega}$$

je určena třením, resp. ztrátami v systému. Dále vidíme, že pro malé ztráty může amplituda růst bez omezení, v praxi však často dojde k nelineárním efektům, jako je například poškození systému.

Závěr

V tomto díle seriálu jsme se zabývali tím, co se stane, když do našeho systému přidáme více sil. V příštím díle zjistíme, co se změní, když přidáme více oscilátorů! Budeme zkoumat chování pružin se dvěma závažími, kyvadel, která se mohou pohybovat více směry, a podobné problémy.

Úloha II.S ... kmitající RLC

10 bodů

Uvažujme obvod, ve kterém jsou sériově zapojeny cívka, kondenzátor, rezistor a zdroj napětí. Cívka má indukčnost L , kondenzátor má kapacitu C a rezistor má odpor R . Zdroj vytváří střídavé napětí $U = U_0 \cos(\omega t)$. Všechny součástky považujte za ideální. S pomocí zákona zachování energie napište rovnici pro náboj, rychlost náboje (proud I) a zrychlení náboje (rychlost změny proudu I). Jedná se o rovnici tlumených kmitů. Porovnáte-li ji s rovnicí pro tlumené kmity závaží na pružině, co v tomto obvodu hraje roli hmotnosti, tuhosti pružiny a tření? Jaká je přirozená frekvence kmitů?

Dále pomocí veličin L , R a ω vyjádřete kapacitu kondenzátoru, při které by byl fázový posun napětí na kondenzátoru roven $\frac{\pi}{4}$. Jaká bude amplituda napětí na kondenzátoru při tomto fázovém posunu? (řešení str. 216)

Kapitola 3: Víc oscilátorů víc ví

Na konci minulého dílu bylo naznačeno, že se budeme zabývat více navzájem propojenými oscilátory či oscilacemi ve více dimenzích. Než se ovšem do takových úkolů pustíme, bude třeba poněkud zformalizovat některé matematické kroky, které jsme při odvození chování jednoduchých oscilací učinili. Konkrétně se bude jednat o dvě důležité kapitoly z matematiky – naším prvním cílem budou derivace a diferenciální rovnice a poté se podíváme na některé aspekty komplexních čísel. Doufáme, že většina z témat pro vás bude pouze opakováním, zatímco jiná přinesou nový pohled na věc. Doporučujeme také prozkoumat různé jiné zdroje mimo tento seriál, pokud si vysvětlením nějaké problematiky nebudete jistí. Jelikož se jedná o velmi rozšířené koncepty, zdrojů pro studium existuje bezpočet.

Pod mikroskopem jsou všechny křivky přímky

V minulých dílech jsme se zabývali přiblížením určité funkce v okolí nějakého bodu. Je to právě ukotvení této aproximace v rigoróznějším matematickém formalismu, které vede k pojmu derivace. Proces tohoto ukotvení začněme na jednoduchém konkrétním případě – polynomiální funkci.

Již víme, že pro malá h platí

$$(1 + h)^a \approx 1 + ah.$$

Při řešení předchozích problémů jsme si také ukazovali, že pro $A \gg B$ lze psát

$$(A + B)^a = A^a \left(1 + \frac{B}{A}\right)^a \approx A^a \left(1 + \frac{aB}{A}\right).$$

Vždy jsme tedy aproximovali funkci x^a v okolí nějakého bodu (v prvním případě v okolí bodu 1, v případě druhém v okolí bodu A) tím, že jsme provedli rozvoj pro určité malé reálné číslo. Samotná hodnota funkce v okolí tohoto bodu závisí na několika parametrech – jednak na funkční hodnotě právě v tom bodě, jehož okolí nás zajímá, dále pak na velikosti zvoleného malého čísla a nakonec na nějaké kombinaci parametrů odvozených ze základní funkce v daném bodě. Tato *odvozenina*, vytvořená z parametrů funkce a její funkční hodnoty v příslušném bodě, se právě nazývá derivace. Formálně lze psát, že naše aproximace funguje jako

$$\Delta x \ll x_0 : f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \cdot \Delta x,$$

kde hovoříme o *derivaci funkce f dle proměnné x v bodě x_0* . Jako ilustraci si vezměme předchozí případ, kdy jsme měli

$$(1 + h)^a \approx 1 + ah,$$

pokud tedy definujeme $g(x) = x^a$, můžeme psát

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_1 = a.$$

Jelikož ve druhém uvedeném příkladě platí

$$(A + B)^a \approx A^a + aA^{a-1}B,$$

lze obdobně psát

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_A = aA^{a-1}.$$

Můžeme zkontrolovat, že tento výraz skutečně funguje pro $A = 1$. Obecně pak z naší lineární aproximace definujeme derivaci funkce v daném bodě jako

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ohledně limity $\Delta x \rightarrow 0$ nám stačí vědět, že indikuje, že $\Delta x \ll 1$ je velmi malé číslo. Přesnou definicí se zde nebudeme zabývat. Derivace funkce je tedy také funkcí, která se může bod od bodu měnit. Často pak vynecháváme konkrétní označení bodu, ve kterém je derivace vyhodnocena, a používáme stejné označení jako v originální funkci. Níže je ve zkratce uveden seznam derivací některých běžných funkcí

$$\begin{aligned} \frac{dx^a}{dx} &= ax^{a-1}, \\ \frac{d \sin x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} = \cos x, \\ \frac{d \cos x}{dx} &= -\sin x, \\ \frac{de^x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{(1 + \Delta x) - 1}{\Delta x} = e^x, \\ \frac{d \ln x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Kombinujeme funkce

Jelikož derivace počítáme ve fyzice velmi často, vyplatí se zamyslet nad jejich algebrou. Je opravdu nezbytné vždy explicitně počítat limitu funkcí? Nebo lze zjistit hodnoty derivací z nějakého množství základních bloků? Ukazuje se, že to možné je; za pomoci několika pravidel.

Prvním pravidlem, které si ukážeme, je linearita. To znamená, že pokud máme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ a definujeme pomocí nich funkci $h(x) = af(x) + bg(x)$, kde a a b jsou nějaké kontanty, bude platit

$$\frac{dh}{dx} = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx}.$$

Tím pádem derivace součtu funkcí je prostě pouze součet derivací funkcí. O něco složitější chování (a jak se později ukazuje, naprosto zásadní vlastnost derivací) charakterizuje tzv. Leibnizovo pravidlo, které odpovídá na otázku, jak naložit se součinem funkcí. Platí

$$\begin{aligned} \frac{dfg}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x\right)\left(g(x) + \frac{dg}{dx}\Delta x\right) - f(x)g(x)}{\Delta x} = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}, \end{aligned}$$

kde jsme zanedbali druhý řád v Δx v čitateli.

Posledním pravidlem, které budeme odvozovat, je pravidlo pro derivaci složené funkce. Definujme funkci $f(x) = g(h(x))$, kde $g(x)$ i $h(x)$ jsou další funkce. Pak platí

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(h(x + \Delta x)) - g(h(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g\left(h(x) + \frac{dh}{dx}\Delta x\right) - g(h(x))}{\Delta x}.$$

Pokud lze předpokládat, že $\frac{dh}{dx}\Delta x = \Delta h$ je stále malé číslo, dostaneme

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(h(x)) + \frac{dg}{dh} \frac{dh}{dx} \Delta x - g(h(x))}{\Delta x} = \frac{dg}{dh} \frac{dh}{dx}.$$

Toto pravidlo se označuje jako řetězové a bude hrát důležitou roli při odvozování derivací některých složitých funkcí.

Fyzikální význam derivací

Ačkoli je tento matematický aparát velmi zajímavý, jeho fyzikální význam je snad ještě zajímavější. Už tušíme, že schopnost charakterizovat chování nějaké funkce v okolí určitého bodu pomocí lineární aproximace je klíčová ke zjednodušení popisu chování mnoha systémů. Nyní nám derivace umožňuje popsat, jak rychle se příslušná funkce mění v okolí daného bodu – derivace určuje *míru změny veličiny*. Efektivně to znamená, že pro dostatečně malé okolí bodu nějaké funkce lze tuto funkci aproximovat jako přímkou, přičemž směrnice této přímky je dána právě derivací v tomto bodě.

Popis míry změny veličiny je jedním z ústředních bodů jakéhokoliv fyzikálního zkoumání. Například v kinematice často sledujeme pozici určitého hmotného bodu v závislosti na čase. Pokud se zaměříme na velmi krátký časový interval, lze trajektorii bodu popsat přímkou, tj. předpokládáme, že se bod v tomto časovém úseku pohybuje víceméně rovnoměrně nebo je v klidu. Mírou změny polohy je v tuto

chvíli zřejmě rychlost. Z toho lze usoudit, že rychlost je derivací polohy podle času. Symbolicky zapsáno, pro polohu x jakožto funkci času t (píšeme $x = x(t)$) máme

$$v = \frac{dx}{dt},$$

kde v je rychlost bodu.

Odvození derivací pro popis dynamiky částic je středobodem newtonovské mechaniky. Zkusme tedy zformulovat Newtonovy zákony v jazyce derivací. První zákon mluví o tom, že tělesa, na která nepůsobí žádná síla, setrvávají v klidu či v rovnoměrném přímočarém pohybu. To znamená, že rychlost tělesa se nemění – míra změny rychlosti tělesa je nulová, což lze s využitím přechozího zapsat jako

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Druhý zákon dává do souvislosti zrychlení a síly působící na těleso. Důležitým zobecněním je, že pokud ponecháme volnost pro změnu hmotnosti s časem, píšeme

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}.$$

Třetí zákon nehovoří o změnách čili zůstává v originálním znění.

Pokud se hmotnost tělesa s časem nemění, můžeme psát (což lze jednoduše odvodit z výše uvedených pravidel)

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

kde $\frac{d^2x}{dt^2}$ značí *druhou derivaci* polohy podle času, kterou identifikujeme jako zrychlení. Jelikož ve většině případů jsou vnější síly závislé pouze na poloze, rychlosti či času, jsme schopni druhý Newtonův zákon vyjádřit čistě pomocí času, polohy a derivate polohy.

Kmity ve formalismu derivací

Pro závaží na pružině platí Hookův zákon

$$F = -kx,$$

kde $x = l - l_0$ označuje prodloužení pružinky vzhledem k rovnovážné poloze. Aplikací druhého Newtonova zákona dostáváme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Rovnici, která obsahuje funkce a jejich derivate, se říká diferenciální rovnice. Abychom tuto rovnici vyřešili, potřebujeme najít polohu jako funkci času $x(t)$ takovou, že druhá derivace této funkce bude až na násobící konstantu stejná jako

původní funkce. Pokud se podíváme na definice derivací základních funkcí, můžeme si všimnout, že

$$\frac{d^2 \cos z}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d \cos z}{dz} \right) = \frac{d(-\sin z)}{dz} = -\cos z.$$

Vidíme, že tato funkce se nám může hodit, ovšem musíme do ní dosadit bezrozměrnou veličinu z , zatímco v původní rovnici hledáme závislost na čase. Jelikož víme, že se jedná o kmity, má smysl vyzkoušet jako bezrozměrný parametr $z = \omega_0 t$ a pokusit se derivovat vzhledem k času místo parametru z . Dostáváme

$$\frac{d^2 \cos(\omega_0) t}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d \cos(\omega_0) t}{d\omega_0 t} \frac{d\omega_0 t}{dt} \right) = -\omega_0 \frac{d \sin(\omega_0 t)}{dt} = -\omega_0^2 \cos(\omega_0) t.$$

Nyní už jen stačí, aby tato funkce měla rozměr vzdálenosti. K tomu ji stačí vynásobit konstantní amplitudou kmitů A , čímž dostaneme $x(t) = A \cos(\omega_0) t$. Odtud plyne

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 A \cos(\omega_0) t}{dt^2} &= -k A \cos(\omega_0) t, \\ -m \omega_0^2 A \cos(\omega_0) t &= -k A \cos(\omega_0) t, \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m}, \end{aligned}$$

což není nic jiného než klasický vzorec pro přirozenou frekvenci kmitů.

Na tomto příkladě vidíme sílu formalismu derivací. Za cenu rozvoje matematického aparátu jsme se mohli zcela vyhnout diskuzi o fázovém prostoru, analytické geometrii kružnice a podobným problémům. Derivace tedy představují výrazně algebraičtější cestu k zodpovězení fyzikálních problémů. Samozřejmě, může se zdát, že jsme si při výše uvedeném postupu museli náhodně tipnout funkci času s vhodnými vlastnostmi. Není tomu tak – pro řešení diferenciálních rovnic existují sofistikované postupy, ty však jdou za rámec tohoto seriálu. Pro složitější problémy jsou derivace nepostradatelným nástrojem už jen proto, že například odpovídající trajektorie ve fázovém prostoru nemají analyticky popsateľný tvar.

Princip superpozice

Tento princip výrazným způsobem zmenšuje počet všech možných řešení, která musíme hledat pro danou *lineární* diferenciální rovnici. Jak vypadá lineární diferenciální rovnice? Opět platí standardní definice lineariry, tj. pokud máme funkce $f(x)$ a $g(x)$, které jsou obě samostatně řešením diferenciální rovnice, tak i $a f(x) + b g(x)$, kde a, b jsou konstanty, je řešením dané rovnice. Podívejme se například na druhý Newtonův zákon pro závaží na pružině. Pro polohu $x(t)$ jako funkci času platí

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$

Pokud definujeme $g(t) = ax(t)$, dostaneme

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{g}{a} \right) = -k \frac{g}{a}.$$

Jelikož je derivace lineární, můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{m}{a} \frac{d^2 g}{dt^2} &= -k \frac{g}{a}, \\ m \frac{d^2 g}{dt^2} &= -kg \end{aligned}$$

a tedy i $g(t)$ je validním řešením této diferenciální rovnice. Podobně lze ukázat, že pokud máme ještě nějaké $h(t) = g(t) + x(t)$, pak sečtením rovnic dostaneme

$$m \frac{d^2 g}{dt^2} + m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kg - kx = -k(g + x)$$

a z linearitě derivace vyplývá

$$m \frac{d^2 (g + x)}{dt^2} = m \frac{d^2 h}{dt^2} = -kh.$$

Říkáme, že h je lineární kombinací neboli superpozicí funkcí g a x . Významem principu superpozice je fakt, že z několika různých řešení dokážeme sestavit všechna ostatní, která se typicky liší jen v počátečních a okrajových podmínkách úlohy. Těchto řešení může být obecně nekonečně mnoho.

Fáze a komplexní čísla

Komplexní čísla rozšiřují obor reálných čísel zavedením imaginární jednotky i . Ta má unikátní vlastnost, kterou nemá žádné reálné číslo, totiž

$$i^2 = -1.$$

Jinak se imaginární jednotka chová jako reálné číslo, tj. lze ji sčítat, odčítat, násobit, mocnit atd. Těmito operacemi vznikají čísla, která jsou zčásti reálná a zčásti imaginární – říkáme jim komplexní. Každé komplexní číslo z lze vyjádřit v tzv. algebraickém tvaru

$$z = x + iy,$$

kde x a y jsou reálná čísla. Pak hovoříme o reálné části $\operatorname{Re} z = x$ komplexního čísla a o jeho imaginární části $\operatorname{Im} z = y$.

Jelikož reálná čísla můžeme vnímat jako číselnou osu, můžeme přidání imaginární jednotky i vnímat jako přidání nové dimenze. Komplexní čísla, která jsou kombinací čistě reálných a čistě imaginárních čísel, lze pak vnímat jako vektory v (tzv. Gaussově) rovině, viz obrázek 51. Definujeme absolutní hodnotu komplexního čísla jako velikost tohoto vektoru

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

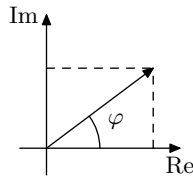
Úhel, který příslušné vektory svírají s reálnou osou, bude

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} .$$

Uvědomme si však, že úhel φ je 2π -periodický, zatímco funkce arctg je jen π -periodická. Pro výpočet φ tak musíme použít jiný vzorec, například

$$\varphi = \operatorname{atan2}(y, x) ,$$

kde funkce $\operatorname{atan2}$ je definována právě jako prostředek pro výpočet úhlu v rovině. Jedná se v podstatě o funkci $\operatorname{arctg}(y/x)$, u níž se ale mění znaménko podle kvadrantů.



Obr. 51: Komplexní číslo jako vektor v komplexní rovině. Horizontální osa představuje reálná čísla a vertikální osa je osou imaginární.

Algebra komplexních čísel je velmi bohatá a v tomto seriálu není dost prostoru, abychom ji mohli obsáhnout celou. Pro nás nejdůležitější vlastnost komplexních čísel je popsána Eulerovou rovnicí, která definuje komplexní exponenciálu jako

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y ,$$

kde y je reálné číslo. Exponenciálu z obecného komplexního čísla $x+iy$ už spočítáme snadno díky rovnosti

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

K čemu je nám tento vztah užitečný? Umožňuje nám převést algebru goniometrických funkcí na algebru exponenciál. Ty mají z hlediska derivací velmi výhodné vlastnosti.

Ve fyzikálních systémech se často komplexní čísla zavádějí ve chvíli, kdy je potřeba pracovat s fází kmitání. Tu lze totiž reprezentovat úhlem komplexního čísla v Gaussově rovině. Kmity samotné potom představuje rotující vektor v této rovině. Zde by měla být jasná analogie s fázovým prostorem – v něm obíhal bod reprezentující stav systému po kružnici. V komplexní rovině bude takový bod obíhat taktéž po kružnici.

Kružnice je množina všech bodů se stejnou vzdáleností od středu, proto ji budeme reprezentovat jako množinu všech komplexních čísel se stejnou absolutní hodnotou A . Pro úhel φ definujeme goniometrický tvar komplexního čísla jako

$$z = A (\cos \varphi + i \sin \varphi) .$$

Fyzikálním významem A je amplituda kmitů, zatímco úhel $\varphi = \omega t$ představuje fázi. Ve fázovém prostoru byla poloha reprezentována jedním z rozměrů prostoru, v komplexní rovině bude polohu představovat reálná část

$$x = \operatorname{Re} z = A \cos(\omega t) .$$

Nyní využijeme komplexní exponenciálu a zápis zjednodušíme na

$$\begin{aligned} z &= Ae^{i\omega t} , \\ x &= \operatorname{Re} (Ae^{i\omega t}) . \end{aligned}$$

V tomto formalismu lze také velmi snadno řešit fázové posuny. Pokud je fázový posun bodu roven φ_0 , pak bod v komplexní rovině bude dán jako

$$z = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)} = Ae^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = \hat{A}e^{i\omega t} .$$

Nyní je tedy fáze zcela obsažena v násobící konstantě, ze které jsme udělali komplexní číslo. Její absolutní hodnota má však stále význam amplitudy, protože platí $A = |\hat{A}|$.

Derivace komplexních funkcí a fourierovská substituce

V tomto seriálu se budeme zabývat pouze derivacemi funkcí, které mají reálný argument (tj. definiční obor leží zcela na reálné ose), ale komplexní hodnoty. Typickým příkladem je exponenciála reprezentující kmity

$$f(t) = e^{i\omega t} .$$

Pravidla pro derivace, která jsme odvodili pro čistě reálná čísla, platí i pro funkce s komplexními hodnotami. Toto je vlastně důsledkem linearitity derivace, protože

$$\frac{df}{dt} = \frac{d(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)}{dt} = \frac{d \operatorname{Re} f}{dt} + i \frac{d \operatorname{Im} f}{dt} .$$

V tomto výrazu už figurují pouze derivace reálných funkcí.

Vraťme se zpět ke komplexní exponenciále. Víme, že

$$\frac{df}{dt} = \frac{de^{i\omega t}}{d(i\omega t)} \cdot \frac{d(i\omega t)}{dt} = e^{i\omega t} \cdot i\omega = i\omega f .$$

Dále lze obdobným způsobem ukázat, že platí

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = i^2 \omega^2 f = -\omega^2 f ,$$

což je vlastně přímo rovnice harmonických kmitů. V případě, že $f(t)$ je funkce popisující kmitání, dostáváme jednoduchý předpis, jak nahrazovat derivace v rovnicích, a to ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\rightarrow i\omega , \\ \frac{d^2}{dt^2} &\rightarrow -\omega^2 \end{aligned}$$

a obdobně pro vyšší mocniny. Tato substituce nemá odborný název, ve zkratce ji zde budeme označovat jako fourierovskou substituci.

Jednoduchá molekula

Uvažujme nyní jednoduchý fyzikální systém, na němž si prakticky ukážeme některé postupy, které jsme odvodili výše. Mějme dvě částice o stejné hmotnosti m , jež jsou spojeny pružinou s tuhostí k a s nulovou klidovou délkou. Částice se mohou pohybovat pouze v jednom rozměru, jejich pozice budeme proto udávat jako body x_1, x_2 na souřadnici x .

Síly působící na částice mají stejnou velikost, ale opačný směr. Nechť je první částice před druhou čili je splněna podmínka $x_1 < x_2$. Potom pro sílu působící na první, resp. druhou částici platí

$$\begin{aligned} F_1 &= k(x_2 - x_1), \\ F_2 &= -k(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Druhý Newtonův zákon použijeme na každou částici zvlášť s výsledky

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= F_1 = k(x_2 - x_1), \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= F_2 = k(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Lze předpokládat, že tento systém bude nějakým způsobem oscilovat, tj. že řešení pohybových rovnic bude ve formě

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}), \\ x_2 &= \operatorname{Re}(\hat{B}e^{i\omega t}), \end{aligned}$$

kde \hat{A} a \hat{B} jsou (potenciálně komplexní) konstanty a ω je neznámá frekvence oscilací. Do druhého Newtonova zákona dosadíme fourierovskou substituci

$$\begin{aligned} -m\omega^2 x_1 &= kx_2 - kx_1, \\ -m\omega^2 x_2 &= kx_1 - kx_2. \end{aligned}$$

Rovnice vydělíme m a zavedeme konstantu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

čímž je převedeme do tvaru

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) x_1 &= \omega_0^2 x_2, \\ (\omega_0^2 - \omega^2) x_2 &= \omega_0^2 x_1. \end{aligned}$$

Jednoduchými algebraickými úpravami dostaneme

$$x_1 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega_0^4} x_1.$$

Odtud je vidět, že máme *dvě* možná řešení – jak $\omega = 0$, tak $\omega = \sqrt{2}\omega_0$. Existence dvou řešení je pro podobné problémy typická, neboť dvě oscilující částice znamenají dva stupně volnosti systému. Mírně atypická je přítomnost řešení $\omega = 0$, které má význam neoscilujícího řešení. V tomto případě platí $x_1 = x_2$, což odpovídá rovnoměrnému přímočarému pohybu obou částic tak, že pružina mezi nimi není vůbec natažená.

Pro druhý případ (například dosazením do první rovnice) dostáváme

$$x_2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega_0^2} x_1 = -x_1,$$

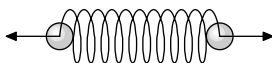
což je možné číst tak, že částice oscilují v protifázi. Dosadíme si z komplexního vyjádření

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\hat{B}e^{i\omega t}) &= -\operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}), \\ \operatorname{Re}\hat{B}\operatorname{Re}e^{i\omega t} - \operatorname{Im}\hat{B}\operatorname{Im}e^{i\omega t} &= -\operatorname{Re}\hat{A}\operatorname{Re}e^{i\omega t} + \operatorname{Im}\hat{A}\operatorname{Im}e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Tato rovnice musí platit pro všechny časy t , konkrétně i pro $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{2\omega}$. V nich přechází do tvaru

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\hat{B} &= -\operatorname{Re}\hat{A}, \\ -\operatorname{Im}\hat{B} &= \operatorname{Im}\hat{A}, \end{aligned}$$

takže můžeme psát $\hat{B} = -\hat{A}$. Tento výsledek bychom mohli interpretovat také pomocí fázového posunu jako $\hat{B} = e^{i\pi}\hat{A}$, což znamená přesnou protifázi, jak nám již vyšlo výše.



Obr. 52: Naznačený pohyb částic při oscilujícím řešení.

Ověřme princip superpozice. Ukázali jsme, že rovnoměrný přímočarý pohyb v případě, kdy jsou částice na stejné pozici, je jedním z možných řešení. Zapišme jej ve tvaru

$$x = vt + x_0,$$

kde v je rychlost rovnoměrného pohybu a x_0 je počáteční souřadnice. Zároveň máme oscilující řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}), \\ x_2 &= -\operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}). \end{aligned}$$

Mělo by platit, že pokud sečteme $x + x_1 = x'_1$ a $x + x_2 = x'_2$, získáme také validní řešení pro náš systém. Dosadíme-li například do první rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x'_1}{dt^2} &= m \frac{d^2}{dt^2} (vt + x_0 + \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t})) = m \frac{d}{dt} (v + \operatorname{Re}(i\omega \hat{A}e^{i\omega t})) = \\ &= m \operatorname{Re}(i^2 \omega^2 \hat{A}e^{i\omega t}) = -m\omega^2 \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}). \end{aligned}$$

Pro pravou stranu téže rovnice platí

$$k(x_2' - x_1') = k(x_2 - x_1) = -2k \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}).$$

Jelikož $\omega^2 = \frac{2k}{m}$, nové řešení stále vyhovuje původní rovnici.

Výhled na příště – vše je lineární

V tomto díle jsme si ukázali, jak linearita harmonických oscilací umožňuje relativně jednoduše řešit i zdánlivě složité systémy. Stačí nám vždy nalézt pouze několik speciálních řešení našich pohybových rovnic a ostatní možné pohyby můžeme vyjádřit jako superpozici těchto řešení. Odborně se jim říká normální módy a budeme se jimi zabývat i v příštím díle seriálu, kde si představíme další velmi užitečný matematický formalismus – lineární algebru.

Úloha III.S ... elektron v poli

10 bodů

Uvažujte částici s nábojem q a hmotností m , která je přichycená k pružině o tuhosti k , jejíž druhý konec je ukotven v jednom bodě. Předpokládejte, že pohyb částice je omezen na pohyb v jedné rovině. Celý systém je v magnetickém poli o velikosti B_0 , které je kolmé na rovinu pohybu částice. Pokusíme se popsat možné oscilace této částice. Začněte sestavením rovnic pohybu pro tuto částici – nezapomňte započítat vliv magnetického pole.

Poté předpokládejte oscilující pohyb pro obě kartézské souřadnice částice, a proveďte Fourierovskou substituci, tj. nahraďte derivace násobky $i\omega$, kde ω je frekvence oscilací. Vyřešte výslednou soustavu rovnic tak, abyste získali poměr amplitud oscilací a frekvenci oscilací. Takto získané řešení je poměrně složité, a abychom mu lépe porozuměli, je vhodné přiblížit si ho v jednodušším případě. Předpokládejte tedy dále, že magnetické pole je velmi silné, tj. $\frac{q^2 B_0^2}{m^2} \gg \frac{k}{m}$. Určete přibližnou hodnotu (hodnoty) ω v této aproximaci, hledejte vždy nejvyšší nenulový řád přiblížení. Dále načrtněte pohyb (pohyby) částice v reálném prostoru při této aproximaci.

(řešení str. 217)

Kapitola 4: Symetrie a lineární algebra

V minulém díle jsme rozšířili náš matematický aparát, což nám umožnilo nahlédnout a popsat některé složitější systémy. Viděli jsme, že pokud osciluje více částic, nebo se částice pohybuje ve více rozměrech, objevuje se více typů možných oscilací. Pro každý rozměr, případně každou další částici, existuje příslušný počet rovnic, které nám umožní najít řešení. Obecně tento počet rozměrů problému nazýváme počet stupňů volnosti problému. Viděli jsme také, jak u oscilací můžeme určit relativní fázový rozdíl a poměr amplitud.

Nyní tyto poznatky převedeme do ještě silnější formy – místo toho, abychom řešili jednotlivé rovnice oscilací, budeme řešit všechny rovnice zároveň, s využitím formalismu lineární algebry. Tento formalismus si tedy musíme nejprve představit.

Lineární algebra

Úkolem lineární algebr je obecně popis chování lineárních transformací vektorů. Rozeberme tedy jednotlivé pojmy v této větě.

Vektory jsou kolekce čísel, pro které definujeme některé základní operace. Většinou značíme vektory pomocí šipky či tlustého fontu, zde budeme používat \mathbf{v} . Komponenty vektoru značíme pomocí znaku pro vektor spolu s dolním indexem označujícím daný komponent, tedy první komponent vektoru \mathbf{u} by byl označen jako u_1 . Někdy je vhodné použít pro index komponentu znak používaný k označení určité osy souřadnic, tedy v kartézské soustavě souřadnic můžeme mluvit o x -komponentu vektoru \mathbf{t} , který značíme jako t_x . V našem případě budou vektory sdružovat polohy jednotlivých částic ve všech možných rozměrech pohybu, tj. pokud budeme zkoumat systém tří částic, z nichž dvě se pohybují v rovině a jedna v celém prostoru, bude mít náš vektor 7 komponentů.

Pro vektory definujeme vektorový součet, který lze v jednotlivých komponentech zapsat jako

$$\mathbf{t} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \iff \forall n : t_n = u_n + v_n,$$

kde n vybíráme z možných indexů \mathbf{u} , které jsou shodné s možnými indexy \mathbf{v} a \mathbf{t} . Dále definujeme násobení skalárem

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} \iff \forall n : v_n = au_n.$$

Vektorové odčítání je pak interpretovatelné jako kombinace násobení skalárem a sčítání

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}.$$

Poslední důležitou operací, kterou pro vektory zde definujeme, je skalární součin. Pomocí něho převedeme dva vektory na jeden skalár. Pro vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} je definován jako

$$s = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_n u_n v_n,$$

kde opět n jde přes všechny indexy \mathbf{u} a \mathbf{v} . Pokud je skalární součin dvou vektorů roven 0, pak říkáme, že vektory jsou navzájem *kolmé*.

Můžeme si všimnout, že provádění vektorových součtů bude v našem případě odpovídat superpozici dvou pohybů. Vidíme tedy, že zavedení vektorů přímo replikuje vlastnosti, které očekáváme od řešení lineárních diferenciálních rovnic, o nichž víme, že představují náš oscilující systém.

Báze vektoru

Pokud si představíme vektor jako pozici v kartézských souřadnicích, je zřejmé, že ho můžeme rozložit na součet jiných vektorů, přičemž tyto vektory mohou být navzájem kolmé. Takovému rozkladu vektoru se říká *bázový rozklad*. V našem algebraickém pojetí vektorů bychom mohli například napsat

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2,$$

kde jsme definovali bázové vektory \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 . Kolmost bázových vektorů můžeme ověřit skalárním součinem, jelikož platí

$$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \iff \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0.$$

Výběr báze ovšem není jedinečný - například, mohli bychom zvolit bázi

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kteřá stále obsahuje dva navzájem kolmé vektory a platí

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2.$$

Obecně je vhodné používat pro báze vektory, které mají jednotkovou délku, tj. které splňují

$$\forall n : \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = 1,$$

což třeba předchozí příklad nespĺňuje.

Algebraicky lze rozklad do tzv. ortonormální báze (tj. báze skládající se z navzájem kolmých jednotkových vektorů) realizovat pomocí skalárních součinů, které udávají složku jednoho vektoru ve směru druhého vektoru. Při takovém výběru báze lze psát

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2.$$

Všimněme si, že takový rozklad do báze můžeme provést pro libovolné množství bázových vektorů. Nemusíme se tedy omezovat maximálně na 3 dimenze, jak jsme možná zvyklí z geometrické interpretace vektorů.

Lineární transformace vektorů

Operace jako násobení skalárem či skalární součin jsou lineární operace, ale zdaleka nevyčerpávají všechny možnosti, kterými lze vektor lineárně změnit. Například, co kdybychom chtěli vytvořit vektor \mathbf{v} tak, že $v_1 = u_2 + u_1$ a $v_2 = 0$, kde \mathbf{u} je jiný vektor? Definujme obecnou lineární transformaci T vektoru \mathbf{u} jako nový vektor $\mathbf{v} = T(\mathbf{u})$, pro který platí

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v}).$$

Uvažujme nyní nad tím, jak bychom mohli takovou transformaci rozložit na co nejmenší díly. Víme, že vektory můžeme rozdělit na jednotkové vektory přenesené komponenty vektoru – tomuto říkáme bázový rozklad vektoru. Například,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2.$$

Poté pro lineární transformaci T platí

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{e}_1) u_1 + T(\mathbf{e}_2) u_2.$$

Jak bychom našli komponenty nového vektoru \mathbf{v} ? Musíme získat komponenty podél bázových vektorů, tedy

$$\begin{aligned}v_1 &= \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}'_1 \cdot T(\mathbf{e}_1) u_1 + \mathbf{e}'_1 \cdot T(\mathbf{e}_2) u_2, \\v_2 &= \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}'_2 \cdot T(\mathbf{e}_1) u_1 + \mathbf{e}'_2 \cdot T(\mathbf{e}_2) u_2,\end{aligned}$$

přičemž bázové vektory \mathbf{e} a \mathbf{e}' mohou, ale nemusí být ze stejné báze. Vidíme tedy, že k určení transformovaného vektoru nám stačí znát komponenty originálního vektoru (u_1 a u_2) a série koeficientů, které můžeme označit jako

$$\begin{aligned}m_{11} &= \mathbf{e}'_1 \cdot T(\mathbf{e}_1), & m_{12} &= \mathbf{e}'_1 \cdot T(\mathbf{e}_2), \\m_{21} &= \mathbf{e}'_2 \cdot T(\mathbf{e}_1), & m_{22} &= \mathbf{e}'_2 \cdot T(\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

Tyto koeficienty jsou *nezávislé* na konkrétním vektoru \mathbf{u} . Jsou pouze odrazem vlastností transformace T a zvolené báze (popřípadě zvolených bází). Tyto koeficienty můžeme uskupit do objektu, kterému říkáme matice.

Maticová algebra

Pokud porovnáme naše výrazy pro komponenty matice m_{ij} a rozklad vektoru do báze, zjišťujeme, že matici lze vlastně také vnímat jako vektor skládající se z dalších vektorů. Transformaci vektoru \mathbf{u} pak můžeme vnímat jako aplikaci skalárního součinu mezi vektory obsaženými v matici a vektorem \mathbf{u} . Tento poznatek, mimo jiné, vedl k definici maticového součinu, který je základní operací maticové algebry. Abychom maticovému součinu porozuměli, představme si nejprve matici jako kolekci vektorů

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}.$$

Tato matice může působit na vektor \mathbf{u} , čímž získáme transformovaný vektor \mathbf{v}

$$\mathbf{v} = M\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}u_1 + m_{12}u_2 \\ m_{21}u_1 + m_{22}u_2 \end{pmatrix}.$$

Obyčejně ovšem píšeme matici jako souhrn jednotlivých komponentů. V takovém případě je potřeba psát vektory horizontálně – význam tohoto zápisu zanedlouho poznáme. Pak tedy matice M je

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Maticový součin pak lze definovat bez reference k vektorům tvořící matici. Komponent i vektoru $\mathbf{v} = M\mathbf{u}$ totiž můžeme zapsat jako

$$v_i = (M\mathbf{u})_i = \sum_j M_{ij}u_j,$$

kde indexy j jdou přes všechny indexy vektoru \mathbf{u} . Zde můžeme poprvé vidět první důležitou podmínku maticového součinu – rozměr vektoru \mathbf{u} musí být stejný jako počet sloupců matice M .

Tato definice maticového součinu je velmi lehce zobecnitelná ze součinu matice a vektoru na součin dvou matic $A = MB$ jako

$$A_{ij} = \sum_k M_{ik} B_{kj}.$$

Příklad maticového součinu je pak

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}.$$

Další důležitou operací s maticemi je tzv. transpozice, při které efektivně prohodíme řádky a sloupce matice. Transponovanou matici M značíme jako M^T . Uvádíme jednoduchý příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

V komponentech matice toto můžeme zapsat jako

$$(M_{ij})^T = (M_{ji}).$$

Speciálně pro vektory platí

$$(1 \ 2)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Správně bychom tedy původní rovnici pro násobení vektoru \mathbf{u} maticí M měli psát jako

$$M\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \mathbf{m}_2^T \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Můžeme si všimnout, že skalární součin dvou vektorů lze zapsat jako maticový součin, kde jeden z vektorů je transponovaný, tedy

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

Dále, matice lze po komponentech sčítat a násobit skaláry, obdobně jako vektory

$$\begin{aligned} A = B + M &\iff A_{ij} = B_{ij} + M_{ij}, \\ sA &\iff (sA)_{ij} = sA_{ij}. \end{aligned}$$

Toto jsou základy maticové algebry. My je použijeme k řešení rovnic, které složitějším způsobem kombinují různé stupně volnosti. Ke kompletnímu řešení se nám bude hodit ještě jedna část lineární algebry, kterou je koncept vlastních vektorů a vlastních čísel.

Vlastní vektory a vlastní čísla

Pro čtvercové matice platí, že transformují vektory do nových vektorů, které mají stejný počet komponentů. Je tedy možné, že existuje takový vektor, který zůstává transformací nezměněný, až na určitý skalární násobek. Takovému vektoru se říká vlastní vektor dané matice a příslušnému skalárnímu násobku říkáme vlastní číslo matice pro daný vlastní vektor. Tyto veličiny jsou důležitou vlastností matice. Vlastní vektor \mathbf{v} matice M můžeme definovat rovnicí

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

kde λ je příslušné vlastní číslo. Čtvercová matice o rozměru n může mít až n různých vlastních vektorů, každý s příslušným vlastním číslem. Jak tyto vlastní vektory odvodit? Buď můžeme vlastní vektor uhádnout na základě vlastností systému, jako je symetrie (viz níže), nebo lze vektor spočítat na základě rovnice

$$(M - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

kde I je tzv. jednotková matice – čtvercová matice, u které jsou nenulové pouze diagonální prvky, které jsou obsazeny jedničkami. Lze se snadno přesvědčit, že jakýkoliv validní maticový součin vektoru (nebo čtvercové matice) s jednotkovou maticí nezmění původní vektor (nebo matici). Výše zmíněná rovnice má buďto triviální řešení, kdy všechny komponenty \mathbf{v} jsou rovny nule, nebo matice $M - \lambda I$ obsahuje ve svých řádcích vektory, které se smíchají dohromady tak, že vytvoří nulu v každém řádku \mathbf{v} . To ale znamená, že tyto vektory v řádcích jsou nutně lineárně závislé, tj. alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Důležitým výsledkem z teorie lineárních rovnic je, že v tomto případě se veličina, kterou nazýváme determinant matice, rovná nule.

Determinant lze určit pro libovolnou čtvercovou matici, my budeme ovšem zejména potřebovat chování pro 2×2 matice. Pro ty se determinant počítá následovně

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = ad - bc,$$

kde $|M|$ značí determinant matice M (nikoli nějakou absolutní hodnotu). Dále nás zajímá determinant diagonální matice, který je určen jednoduše součinem všech diagonálních prvků. Pokud se větší matice skládá z více navzájem oddělených bloků ležících na diagonále, lze determinant určit jako součin determinantů jednotlivých bloků. Například

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = ef(ad - bc),$$

přičemž determinant matice 1×1 je prostě jediný komponent dané matice.

Pojďme si ukázat příklad výpočtu vlastního vektoru a vlastního čísla. Uvažujte matici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abychom našli vlastní čísla, vyřešíme rovnici

$$0 = |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 \Rightarrow (1 - \lambda)^2 = 4.$$

Výsledkem je $\lambda = 1 \pm 2$, neboli $\lambda \in \{3, -1\}$. Se znalostí λ již můžeme vyřešit rovnice pro vlastní vektor. Zvolme $\lambda = -1$, potom dostaneme

$$\begin{aligned} (M - \lambda I) \mathbf{v} &= 0, \\ \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 \\ 2 & 1 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Řešení je v tomto jednoduchém případě nasnadě – platí $v_1 = -v_2$, a vlastní vektor je například

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Říkáme například, protože vektor můžeme libovolně násobit skaláry, a bude se při transformaci maticí M chovat stejně. Důležitý je tedy poměr jednotlivých komponentů vlastních vektorů, nikoliv jejich absolutní velikost.

Jako poznámka – mohlo by nás zajímat, proč jsme zkrátka neřešili jednotlivé řádky v rovnici $(M - \lambda I) \mathbf{v} = 0$? Problémem je, že v dané soustavě n rovnic máme $n + 1$ neznámých – n komponentů vektoru \mathbf{v} , a vlastní číslo λ . Ukáže se, že kdybychom tyto rovnice řešili, tak v posledním kroku vydělíme hodnotou nenulového komponentu na obou stranách rovnice, čímž budeme moct získat vzájemné poměry všech komponentů a vlastní číslo. Je ale mnohdy snazší snažit se získat determinant matice, jelikož z něho rovnou získáme vlastní číslo, které má samo o sobě určitý význam. Fakt, že stále máme $n + 1$ neznámých na n rovnic se projeví v tom, že vlastní vektory můžeme volně násobit skaláry.

Normální mody

Dosti bylo obskurní matematiky, pojďme se věnovat fyzice. Na následujících dvou příkladech se pokusím ilustrovat užitečnost výše zmíněných nástrojů – budeme schopni přesně popsat kmitání netriviálních oscilátorů. V tomto případě jsem si vybral zaprvé dvě závaží, která jsou navzájem spojená pružinou a kmitají pouze ve vertikálním směru, za druhé pak dvě částice, které jsou spojené jednou pružinou a zároveň je každá zvlášť uchycena ke stěnám, mezi nimiž je mezera.

Dvě závaží od stropu

Uvažujme následující systém: první pružina s tuhostí k je přichycená k pevnému stropu na jednom konci a k závaží o hmotnosti m na druhém konci. Druhá pružina, také o tuhosti k , je připevněná k prvnímu závaží na jednom konci a k druhému

závaží o stejné hmotnosti m na druhém konci. Rovnovážná poloha systému (kdy systém neosciluje) nastane ve chvíli, kdy gravitační síly vybalancují napětí v pružinách. Touto rovnovážnou polohou se nyní nebudeme zabývat, na její výpočet stačí použít známé poznatky ze statiky. Uvažujme tedy malé výchylky z této rovnovážné polohy. Výchylku prvního závaží označíme jako x_1 , výchylku druhého závaží jako x_2 . Předpokládáme, že obě výchylky oscilují, a lze je tedy zapsat jako

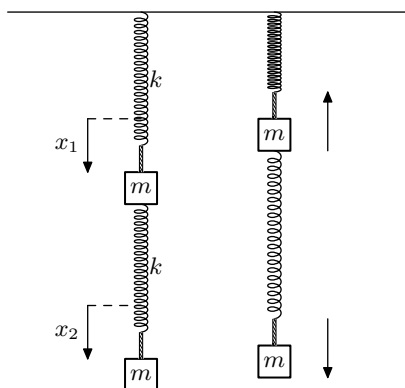
$$\begin{aligned}x_1(t) &= \operatorname{Re} \left(A e^{i\omega t} \right), \\x_2(t) &= \operatorname{Re} \left(B e^{i\omega t} \right).\end{aligned}$$

Případný fázový rozdíl mezi oscilacemi můžeme vyjádřit jako součást konstanty B , pro kterou můžeme psát

$$B = |B| e^{i\varphi},$$

kde φ je fázový rozdíl. Tedy

$$x_2(t) = \operatorname{Re} \left(|B| e^{i(\omega t + \varphi)} \right).$$



Obr. 53: Nalevo je znázorněna geometrie problému a zobrazena definice x_1 a x_2 . Napravo je znázorněn jeden okamžik během kmitání jednoho normálního modu. Šipky naznačují směr pohybu.

První pružina je tedy prodloužená oproti rovnovážné poloze o délku x_1 , zatímco druhá pružina je prodloužená o $x_2 - x_1$. V druhé pružině je síla

$$F_2 = -k(x_2 - x_1).$$

V první pružině je síla

$$F_1 = -kx_1 - F_2,$$

jelikož síla z druhé pružiny se přenáší na první pružinu. Dle druhého Newtonova zákona v diferenciální formě tedy můžeme psát

$$F_1 = m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1),$$

$$F_2 = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1).$$

Provedením fourierovské substituce dostáváme

$$-m\omega^2 x_1 = -2kx_1 + kx_2,$$

$$-m\omega^2 x_2 = kx_1 - kx_2.$$

Tuto rovnici lze přepsat do maticové rovnice – snažíme se najít oscilace v x_1 a v x_2 , které jsou nezávislé, takže je vlastně lze vnímat jako různé dimenze oscilací. Konkrétně, definujeme vektor \mathbf{x} jako

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Pak platí

$$\omega^2 M \mathbf{x} = K \mathbf{x},$$

kde K je matice

$$K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix},$$

a M je matice

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

přičemž jsme obě strany obou původních rovnic vynásobili -1 . Naše soustava rovnic je tedy vyjádřena jednou maticovou rovnicí

$$\omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Z toho můžeme odvodit

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy

$$(K - \omega^2 M) \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Tato rovnice je obdobou té, kterou jsme řešili při hledání vlastních čísel matice. Opět, je potřeba zjistit, kdy je determinant matice roven nule, tedy $|K - \omega^2 M| = 0$. Determinant této matice je

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = (2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0,$$

takže

$$\begin{aligned} 2k^2 - 2km\omega^2 - km\omega^2 + m^2\omega^4 - k^2 &= 0, \\ m^2\omega^4 - 3mk\omega^2 + k^2 &= 0. \end{aligned}$$

Vydělením m^2 a zavedením $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ dostáváme

$$\omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0.$$

Vyřešíme bikvadratickou rovnici jako kvadratickou rovnici, ale pro ω^2 . Jejím řešením je

$$\omega^2 = \frac{3\omega_0^2 \pm \sqrt{9\omega_0^4 - 4\omega_0^4}}{2}.$$

Máme tedy dvě možné frekvence oscilací

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}}.$$

Jaký bude poměr amplitud oscilací, popřípadě fázový rozdíl? K tomu musíme najít kromě vlastních čísel také vlastní vektory matice M . První řádek matice v naší maticové rovnici udává

$$m\omega^2 x_1 = 2kx_1 - kx_2.$$

Nyní už známe hodnotu ω^2 , kterou můžeme dosadit. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} m\omega_0^2 \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \right) x_1 &= 2kx_1 - kx_2, \\ \omega_0^2 \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \right) x_1 &= 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2, \end{aligned}$$

Můžeme vydělit ω_0^2 a zároveň také vydělit faktorem $e^{i\omega t}$, který je obsažen jak v x_1 , tak v x_2 , takže dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \right) A &= 2A - B, \\ \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \right) A &= -B, \\ \frac{B}{A} &= \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{5}{4}}. \end{aligned}$$

Poměr oscilací je tedy různý pro různé frekvence. Pro vyšší frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

osciluje systém tak, že poměr amplitudy druhého závaží ku prvnímu závaží je

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Tento poměr je menší než nula, což znamená, že v každém moment oscilace se závaží pohybují opačným směrem. Nižší frekvence oscilací

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

odpovídá situaci, kdy poměr amplitud je

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

a závaží oscilují ve stejném směru. V jazyku fázových rozdílů jsme mohli psát

$$-1 = e^{i\pi}$$

a tedy usoudit, že v prvním případě jsou kmity prvního a druhého závaží v perfektní antifázi – výsledek, ke kterému jsme dospěli i bez této úvahy.

Uvědomme si, co jsme vlastně nyní dokázali. Zjistili jsme, že pro systém **dvou** částic existují **dvě** speciální frekvence, při kterých jsou dynamické rovnice splněny. Tyto frekvence odpovídají dvěma různým typům oscilací, které jsou charakterizované komponenty A a B určitého vektoru. Těmto typům oscilací říkáme normální mody.

Mohli byste namítnout, že sice jsme popsali velmi specifický případ, kdy obě polohy oscilují, ale že zajisté lze vymyslet pohyb závaží, který je výrazně složitější. Klíčem k síle normálních modů je zde linearita našich dynamických rovnic. Zjišťujeme totiž, že pokud najdeme dva vektory, které splňují dynamické rovnice (jako jsme našli my), pak i jakákoliv jejich lineární kombinace splňuje dynamické rovnice. Matematicky řečeno, jestliže máme \mathbf{A}_1 takové, že

$$\omega^2 M \mathbf{A}_1 = K \mathbf{A}_1,$$

a jiné \mathbf{A}_2 , které splňuje

$$\omega^2 M \mathbf{A}_2 = K \mathbf{A}_2,$$

pak pro libovolné skaláry a a b platí

$$\omega^2 M (a \mathbf{A}_1 + b \mathbf{A}_2) = K (a \mathbf{A}_1 + b \mathbf{A}_2),$$

a tedy i vektor $a \mathbf{A}_1 + b \mathbf{A}_2$ je řešením dynamických rovnic. Kromě dvou speciálních případů oscilací jsme tedy odhalili i nekonečné množství pohybů systému, které lze interpretovat jako *superpozici* pohybu dvou normálních modů. Právě kvůli této vlastnosti se lineární systémy popisují tak jednoduše – pro popsání velkého množství možných jevů nám stačí určení pouze několika základních parametrů.

Elementární struna

Uvažujme nyní druhý příklad. Mějme dvě částice o shodné hmotnosti m . První je ukotvená ke zdi, která prochází počátkem souřadnic, pružinou o tuhosti k . Druhá je přichycená pružinou o stejné tuhosti ke zdi rovnoběžné s první zdí a procházející bodem \mathbf{R} , přičemž \mathbf{R} je vektor kolmý na roviny zdi. Nakonec jsou částice navzájem spojeny ještě jednou pružinou o tuhosti k . Částice se mohou volně pohybovat v rovině kolmé na tyto dvě zdi.

Řešení tohoto příkladu uvádíme pouze zrychleně, abyste si mohli procvičit výpočet některých konkrétních veličin. Začneme nalezením rovnovážné polohy. Nechť je souřadnice první částice dána vektorem \mathbf{r}_1 a poloha druhé částice nechť je dána vektorem \mathbf{r}_2 . Na první částici působí síla

$$\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{r}_1 + k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Na druhou částici působí síla

$$\mathbf{F}_2 = -k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}) + k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

V rovnováze budou síly nulové, což vede na

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \frac{1}{3}\mathbf{R}, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{2}{3}\mathbf{R}.\end{aligned}$$

Označme tyto pozice jako $\mathbf{r}_{1,0}$ a $\mathbf{r}_{2,0}$. Malé výchylky z těchto pozic označíme jako \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 , takže platí $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1,0} + \mathbf{x}_1$, obdobně pro druhou částici. Zjistíme, že při těchto malých výchylkách budou výslednice sil rovny

$$\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{x}_1 + k(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

pro první částici a

$$\mathbf{F}_2 = -k\mathbf{x}_2 + k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

pro druhou částici. Z druhého Newtonova zákona víme

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= m \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}, \\ \mathbf{F}_2 &= m \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}.\end{aligned}$$

Jelikož $\mathbf{r}_{1,0}$ a $\mathbf{r}_{2,0}$ jsou konstantní vektory, platí

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= m \frac{d^2\mathbf{x}_1}{dt^2}, \\ \mathbf{F}_2 &= m \frac{d^2\mathbf{x}_2}{dt^2}.\end{aligned}$$

Opět budeme předpokládat, že systém osciluje. Z fourierovské substituce odvodíme $\mathbf{F}_1 = -m\omega^2 \mathbf{r}_1$, obdobně pro druhou rovnici. V maticové formě můžeme tyto rovnice zapsat jako

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & 0 & k & 0 \\ 0 & m\omega^2 - 2k & 0 & k \\ k & 0 & m\omega^2 - 2k & 0 \\ 0 & k & 0 & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde x_{11} je první komponent vektoru \mathbf{x}_1 atd. Determinant této matice nemůžeme ihned najít, jelikož se nejedná o diagonální matici. Ale můžeme si všimnout, že se mezi sebou vážou pouze komponenty s indexem 1, resp. 2. Pokud tyto komponenty dáme dohromady v našem vektoru, což determinant matice nezmění, dostaneme následující rovnici

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k & 0 & 0 \\ k & m\omega^2 - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\omega^2 - 2k & k \\ 0 & 0 & k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Tato matice se již skládá z dvou matic na diagonále, a umíme tedy určit její determinant, tj.

$$D = \begin{vmatrix} m\omega^2 - 2k & k & 0 & 0 \\ k & m\omega^2 - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\omega^2 - 2k & k \\ 0 & 0 & k & m\omega^2 - 2k \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{vmatrix}^2 = \left((m\omega^2 - 2k)^2 - k^2 \right)^2.$$

Položíme $D = 0$, a dostáváme

$$k^2 = (m\omega^2 - 2k)^2,$$

$$k = \pm (m\omega^2 - 2k),$$

$$(2 \pm 1)k = m\omega^2.$$

Zavedeme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

což vede na

$$\omega = \sqrt{2 \pm 1} \omega_0.$$

Získali jsme tedy pouze dvě frekvence, ačkoliv počet normálních modů bude 4. To znamená, že některé mody mají shodné frekvence. Dosazením do původní rovnice získáme vztah pro vlastní vektory. Začneme s $\omega = \omega_0$. Pak

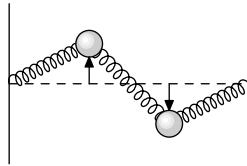
$$\begin{pmatrix} m\frac{k}{m} - 2k & k & 0 & 0 \\ k & m\frac{k}{m} - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{k}{m} - 2k & k \\ 0 & 0 & k & m\frac{k}{m} - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opět narážíme na fakt, že dva bloky matice jsou nezávislé. Takže první dva komponenty našeho vlastního vektoru vůbec nemíchají zbývající dva komponenty, a naopak. Lze tedy určit dva vlastní vektory z této jedné frekvence (jak jsme očekávali), které mají hodnoty například

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\omega = \sqrt{3}\omega_0$ lze poté určit, že vlastní vektory budou

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Obr. 54: Naznačený směr pohybu částic při kmitání v jednom normálním modu.

Vliv symetrie

Mnoho problémů oscilací obsahuje určité symetrie. Například, v předchozím problému jsme mohli bez problému prohodit souřadnice používané pro popis první a druhé částice – dostali bychom přesně stejnou sadu dynamických rovnic. Systém byl tedy tzv. symetrický při výměně částic.

Takovouto symetrii můžeme definovat i pomocí matice – efektivně hledáme matici S , pro kterou platí (pro popis druhého příkladu)

$$S \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{11} \\ x_{22} \\ x_{12} \end{pmatrix},$$

což znázorňuje prohození označení částic. Určení takovéto matice je poměrně jednoduché – každý komponent nového vektoru určíme jedním komponentem z originálního vektoru, který musí matice S vybrat. Platí

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tušíme, že výsledné mody systému budou tuto symetrii nějakým způsobem respektovat. Ukazuje se, že platí velmi obecné pravidlo. Pokud oscilující systém splňuje určitou symetrii, pak vlastní vektory těchto oscilací jsou alespoň zčásti dány vlastními vektory matice, která popisuje tuto symetrii. Důkaz tohoto pravidla je poměrně složitý a nebudeme se jím zde přímo zabývat. Pro ty zvědavější z vás, symetrii systému lze rigorózněji definovat jako invarianci Hamiltoniánu systému při aplikování dané symetrie. Můžete se také zamyslet, jaké má toto tvrzení důsledky v kontextu teorému Noetherové, pokud ho znáte. K řešení problémů v tomto seriálu tento přesah však není potřeba.

Co však potřeba bude, je schopnost určit matice aplikující danou symetrii (zejména permutace částic) a najít pro tyto matice vlastní vektory. Můžeme zkontrolovat, že vlastní vektory nalezené v předchozím příkladě skutečně jsou vlastními vektory matice S , s vlastními čísly ± 1 . Mody jsou tedy symetrické nebo antisymetrické při výměně částic.

Výhoda hledání vlastních vektorů v maticích symetrie spočívá v tom, že tyto matice jsou zpravidla jednodušší než dynamická matice, která řídí oscilace. Poté, co najdeme vlastní vektory matice symetrie, můžeme získat vlastní čísla jednoduchým dosazením vlastního vektoru do dynamické rovnice.

Neúplné symetrie

Může se stát, že systém má určitou symetrii, avšak tato symetrie nedeterminuje celé chování systému. Například, uvažujte míček, který se pohybuje údolím, které by vzniklo protažením paraboly ležící v rovině xy (danou třeba vzorcem $y = x^2$) do směru z – rovnice povrchu by stále byla $y = x^2$, nezávislá na z . Zřejmě platí symetrie zrcadlení přes rovinu yz , tedy symetrie $x \rightarrow -x$. Pokud bychom oscilace charakterizovali třemi souřadnicemi míčku $\mathbf{r} = (x, y, z)$, operace symetrie by byla

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že blok spodních dvou řádků a pravých dvou sloupců matice představují vlastně jednotkovou matici v komponentech y a z . To znamená, že symetrie definovaná maticí S neklade žádné nároky na komponenty y a z , tyto složky mohou být cokoliv (neboli působením S na \mathbf{r} se tyto komponenty nikdy nezmění). To znamená, že tato symetrie by nám mohla pomoci zbavit se maximálně jednoho stupně volnosti. Můžeme ji tedy použít k nalezení pouze jednoho vlastního vektoru. Nicméně, jelikož víme, že vlastní vektory jsou navzájem kolmé, můžeme zkusit uhádnout ostatní vlastní vektory oscilací, a stačí nám už určit menší počet neznámých.

Při dosazování vlastních vektorů symetrie do vlastních vektorů kmitů musíme na neúplné symetrie dávat pozor – pokud daný komponent není symetrií nijak omezen, musíme za něj dosadit obecné číslo. To, že symetrie daný komponent neomezuje, totiž ještě neznamená, že není omezen dynamikou systému a symetrií samotné dynamiky. Například, zákon zachování hybnosti může klást nároky na komponent, který jinak není omezen symetrií kvůli záměně částic.

Nekonečno oscilátorů

Už víme, jak řešit soustavy obsahující určitý počet oscilátorů. Co když ale oscilátorů bude efektivně nekonečno? V takovém případě můžeme někdy přejít k popisu systému pomocí kontinuálních veličin a začínáme popisovat fenomén vlnění. Některými základními vlastnostmi vln, jako jsou disperzní vztahy či superpozice, se budeme zabývat v příštím díle.

Úloha IV.S . . . oscilace oxidu uhličitého

10 bodů

Budeme modelovat kmity v molekule oxidu uhličitého. Jedná se o lineární molekulu s jedním atomem uhlíku mezi dvěma atomy kyslíku, ležícími společně na jedné přímce. Uvažujme pouze kmity podél této přímky. Předpokládejme, že pro malé výchylky lze molekulu modelovat jako spojení uhlíkového atomu s každým z kyslíkových pomocí pružin o tuhosti k . Atom uhlíku má hmotnost M , hmotnost kyslíkového atomu je m .

Sestavte rovnice určující síly, které působí na atomy při malých výchylkách podél osy uvažované molekuly. Ta je symetrická vůči záměně některých atomů. Vyjádřete tuto symetrii pomocí matice působící na vámi definovaný vektor výchylek. Dále určete vlastní vektory a vlastní čísla této matice. Takováto symetrie však není kompletní – vysvětlte, které stupně volnosti nezahrnuje.

Dále sestrojte maticovou rovnici popisující kmity systému. Dosazením vlastních vektorů z matice symetrie, které rozšíříte o symetrii neomezené stupně volnosti, určete normální mody systému. Dále spočítejte jejich úhlovou rychlost/frekvenci a načrtněte směry oscilací. Jaké další mody (stále pouze ve směru osy molekuly) by systém mohl obsahovat? Určete frekvenci a směr pro každý mod, jež se vám podaří nalézt.

*(řešení str. 222)***Kapitola 5: Vlny**

Vlny jsou jevem, při kterém vícero oscilátorů rozmístěných v prostoru osciluje dohromady tak, že vytváří určitou předvídatelnou dynamiku. Fyzika vln má mnoho společného s fyzikou oscilací a vlastně představuje pouze rozšíření našich předchozích poznatků z diskretních systémů do kontinuálních systémů. Obdobně jako jsme pro oscilátory vždy museli odvodit dynamické rovnice pohybu, musíme pro vlny odvodit tzv. vlnovou rovnici. To si předvedeme na jednoduchém příkladu napnuté struny, kde odvodíme některé základní pojmy, o které musíme naše chápání oscilací rozšířit, abychom pak dokázali popsat vlnění.

Napnutá struna

Uvažujme strunu, která se nachází podél osy x tak, že jeden její konec je v počátku a druhý v bodě l . Na strunu působí napětí¹ T a to vždy v tečném směru. Délková hmotnost struny je λ , celkem tedy váží $m = \lambda l$.

¹Napětím zde myslíme napětovou sílu, nikoliv napětovou sílu na jednotku plochy, jak se někdy napětí definuje.

Dále předpokládejme, že struna kmitá pouze kolmo na osu x . Výchylku z rovnovážné polohy označíme jako $u(x, t)$, jelikož se může měnit jednak s polohou x a zároveň s časem t .

Uvědomme si, že toto je velmi silný předpoklad. Můžeme si jej ale odůvodnit jednoduchou úvahou – uvažujeme pouze velmi malé výchylky, takže tečný směr na strunu je všude přibližně rovnoběžný s osou x . To znamená, že napětí ve směru x je téměř rovno T podél celé délky struny. Protože na každý její úsek působí z obou stran stejně, žádný z nich nemá důvod pohybovat se ve směru osy x .

Náš úkol zní následovně – při určitém profilu výchylek $u(x, t)$ určit, jaké jsou síly působící na jednotlivé části struny a jak jednotlivé úseky struny zrychlují. Zřejmě nás zajímá pouze síla ve směru výchylky. Ukážeme si, jak spočítat její změnu podél x .

Zastavme na chvíli čas a předpokládejme $u = u(x)$. Úsek se středem v bodě x působí na své sousedy silou T v tečném směru k funkci u . Označíme-li sklon tečny od vodorovného směru φ , bude platit $u' = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$,² protože, jak jsme již řekli dříve, struna je skoro vodorovná a úhel φ je velmi malý.³ Zde u' značí derivaci funkce u podle prostorové souřadnice. Svislá složka této síly bude $T_y = T \sin \varphi \approx T \varphi$. Má-li náš úsek délku dx a jeho těžiště se nachází v bodě x , znamená to, že jeho pravý okraj bude mít souřadnici $x + dx/2$. V tomto bodě na něj ve svislém směru působí napětí $T_y(x + dx/2)$. Obdobně pro levý okraj. Změnu síly můžeme spočítat jako rozdíl mezi pravým a levým okrajem, neboli

$$dF = T_y\left(x + \frac{dx}{2}\right) - T_y\left(x - \frac{dx}{2}\right) = T\left(\varphi\left(x + \frac{dx}{2}\right) - \varphi\left(x - \frac{dx}{2}\right)\right).$$

Funkci $\varphi(x)$ sice neznáme, ale pro velmi malé a jí můžeme lokálně aproximovat⁴ její tečnou

$$\varphi(x + a) \approx \varphi(x) + \varphi'(x)a + \dots$$

Za a dosadíme $\pm dx/2$, bude tedy dokonce libovolně malé. Dosazením dostáváme

$$dF \approx T\left(\left(\varphi(x) + \varphi'(x)\frac{dx}{2}\right) - \left(\varphi(x) - \varphi'(x)\frac{dx}{2}\right)\right) = T\varphi'(x) dx.$$

Máme výsledek⁵

$$\frac{dF}{dx} = T\varphi' \approx Tu'' = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

²První rovnost jednoduše platí, stačí si uvědomit, že jak funkce $\operatorname{tg} \varphi$, tak u' odpovídají sklonu tečny k funkci $u(x)$ v daném bodě (pro malý element dx a odpovídající změnu du platí $du = \operatorname{tg} \varphi dx$).

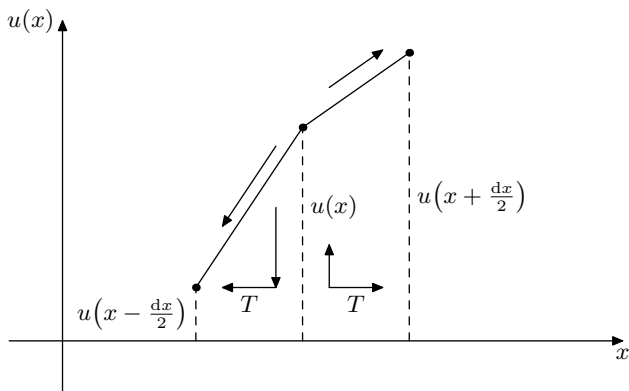
³Opavdu, nakreslete si funkce $y = \operatorname{tg} x$ a $y = x$ vedle sebe a zjistíte, že pro malé výchylky je jejich rozdíl zanedbatelný. To je princip lineární aproximace v nějakém bodě (nahrazení funkcí přímkou, která má v daném bodě stejný sklon jako původní funkce).

⁴Opět používáme lineární aproximaci. Pro obecnou aproximaci bychom použili Taylorovu řadu, kterou si v případě zájmu můžete vyhledat. Zde nám stačí jen její první dva členy, protože další už by byly pro malé dx zanedbatelné.

⁵U funkce $u(x, t)$ nahrazujeme obyčejné derivace, např. $\frac{du}{dx}$, derivacemi parciálními, např. $\frac{\partial u}{\partial x}$, což je běžné pro funkce, které závisí na více proměnných. Rozdíl je v podstatě v tom, že u obyčejné derivace bychom ještě museli uvažovat, jak jednotlivé parametry funkce u (tedy x a t) závisí na sobě navzájem, u parciální nemusíme.

Zdůrazněme, že jsme pracovali pouze s funkcí $u = u(x)$ při zastaveném čase. Zajímá-li nás časový vývoj systému, musíme přejít k původní funkci $u = u(x, t)$ a k parciálním derivacím. Zrychlení spočítáme z druhého Newtonova zákona. Úsek o délce dx váží $dm = \lambda dx$, pro sílu platí $dF = dm\ddot{u}$, kde tečka tentokrát znamená časovou derivaci. Výsledná vlnová rovnice má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$



Obr. 55: Úsek struny o délce dx , na který působí síly od sousedních úseků. Ty jsou znázorněny v rozložení do horizontálního a vertikálního směru.

V tomto případě budeme konstantní hodnotu T/λ označovat jako v^2 . Rozměrovou analýzou lze určit, že v má jednotku rychlosti, a ukazuje se, že v skutečně odpovídá tzv. fázové rychlosti vln.

Vlnová rovnice plní stejnou roli jako rovnice pro zrychlení při zkoumání oscilací jednoho oscilátoru. Můžeme také nalézt obdobu přirozené frekvence pro jeden oscilátor, ale nejprve si ukážeme některé možnosti řešení vlnové rovnice.

Rovinné vlny

Jelikož vlnění se vlastně skládá z jednotlivých oscilátorů, můžeme zkusit zjistit, zda jednoduché oscilace mohou být řešením vlnové rovnice. Předpokládejme tedy, že řešení vlnové rovnice bude ve tvaru

$$\hat{u}(x, t) = U(x) e^{-i\omega t},$$

kde $U(x)$ je funkce určující amplitudu oscilací v závislosti na pozici. Opět, řešení vlnové rovnice musí být reálné, ale zavedením komplexního řešení $\hat{u}(x, t)$ si zjed-

nodušíme algebru. Reálné řešení pak získáme jako $u(x, t) = \operatorname{Re} \hat{u}(x, t)$. Dosazením do vlnové rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} U(x) \frac{d^2 e^{-i\omega t}}{dt^2} &= v^2 e^{-i\omega t} \frac{d^2 U}{dx^2}, \\ U(x) (-\omega^2) e^{-i\omega t} &= v^2 e^{-i\omega t} \frac{d^2 U}{dx^2}, \\ \frac{d^2 U}{dx^2} &= -\frac{\omega^2}{v^2} U(x). \end{aligned}$$

Tuto rovnici známe, pouze jsme místo proměnné pozice používali čas – jedná se o rovnici jednoduchých harmonických kmitů. Řešení tedy můžeme psát jako

$$U(x) = Ae^{ikx},$$

kde A je (potenciálně komplexní) konstanta, a k je reálné číslo. Většinou nazýváme k *vlnové číslo*. Dosazením do předchozí rovnice pak dostáváme vztah

$$-k^2 Ae^{ikx} = -\frac{\omega^2}{v^2} U(x) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = k^2 v^2.$$

Tato rovnice se nazývá *disperzní vztah* – určuje, jak se frekvence vlny mění s vlnovým číslem příslušícím dané vlně. Konečně, komplexní řešení vlnové rovnice je

$$\hat{u}(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}.$$

Reálné řešení je $u(x, t) = |A| \cos(kx - \omega t + \varphi)$, kde

$$A = |A| e^{i\varphi}$$

udává amplitudu $|A|$ i fázový posun φ .

Podobně jako u oscilací, vlnová rovnice je lineární rovnice, a tím pádem můžeme její řešení tvořit lineárními kombinacemi známých řešení. Například kombinace

$$\hat{u}'(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{i(-kx - \omega t)}$$

je také řešením vlnové rovnice.

Rovinné vlny lze také popsat jako translaci (posouvání) profilu $U(x)$ s ubíhajícím časem t . Abychom toto chování lépe viděli, píšeme

$$\hat{u}(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)} = Ae^{ik(x - vt)},$$

kde jsme využili disperzní vztah (a předpokládali, že ω i k jsou kladné). Vidíme, že vlna se v tomto případě posouvá doprava (směrem k rostoucímu x). Na druhou stranu, v případě, že máme řešení

$$\hat{u}(x, t) = Ae^{i(-kx - \omega t)} = Ae^{-ik(x + vt)},$$

vlna se posouvá doleva (ke klesajícímu x).

Fourierovská substituce

Obdobně jako při oscilacích, diferenciální vlnovou rovnici můžeme nahradit algebraickou rovnicí. Pro řešení rovnic pomocí rovinných vln (pohybujících se doprava) použijeme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i\omega, & \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow ik, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\rightarrow -\omega^2, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\rightarrow -k^2. \end{aligned}$$

Aplikací této substituce můžeme odvodit disperzní vztah přímo z vlnové rovnice.

Okrajové podmínky

Jelikož vlny nevyplňují celý prostor, konkrétní tvar řešení je okrajem oblasti, ve které existují, omezen pomocí tzv. okrajových podmínek. Například pokud máme strunu napnutou mezi dvěma body, pak se v bodech, kde je uchycená, nehýbe. Naopak pokud bychom měli lano uchycené v jednom bodě a v druhém by bylo volné, pak by se v jednom bodě nehýbalo a v druhém by byla síla, která lano vrací do rovnovážné polohy, nulová. To odpovídá podmínce

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

v daném bodě. Tyto body efektivně představují rozhraní, od kterých se vlny mohou odrážet. V obecném případě by vlny mohly také pronikat za rozhraní, ale ve výše uvedených případech vlny nemohou existovat za rozhraním a proto dochází pouze k odrazu. Ten lze vyjádřit tak, že předpokládáme formu řešení, které je superpozicí dvou rovinných vln pohybujících se opačným směrem, potenciálně s rozdílnou amplitudou a fázovým posunem. Příklad takového řešení si ukážeme níže.

Stojaté vlnění

Mějme strunu, která je napnutá mezi dvěma body, na kterých se nehýbe. Výchylka struny z napnuté polohy u splňuje vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Mezi body je celková vzdálenost L . Naším úkolem bude určit stabilní dynamiku struny, tj. určit $u(x, t)$, které vede pouze k opakování stejného cyklu. Okrajové podmínky můžeme určit po zavedení souřadnicové soustavy. Zvolme ji tak, že jeden z bodů je v počátku souřadnic, a druhý tedy podél osy x ve vzdálenosti L . Pak platí

$$u(0, t) = 0 = u(L, t).$$

Předpokládejme nyní, že hledané řešení se skládá ze dvou rovinných vln – jedné, která se pohybuje doprava, a jedné, která se pohybuje doleva. Pak pro komplexní výchylku platí

$$\hat{u}(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{i(-kx - \omega t)}.$$

Z vlnové rovnice lze odvodit disperzní vztah

$$\omega^2 = v^2 k^2,$$

kde $v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$. Neznámé jsou tedy A , B a k , jelikož ω je určena jako $\omega = vk$ (předpokládáme, že k je kladné – záporné k je obsažené ve vlně pohybující se druhým směrem). První okrajová podmínka vede na

$$0 = \hat{u}(0, t) = Ae^{-i\omega t} + Be^{-i\omega t} \Rightarrow A = -B,$$

druhá implikuje

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{u}(L, t) = -Be^{i(kL-\omega t)} + Be^{-i(kL+\omega t)}, \\ 0 &= B(e^{-ikL} - e^{ikL}). \end{aligned}$$

S použitím $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ můžeme psát

$$\begin{aligned} 0 &= B(\cos(kL) - i \sin(kL) - \cos(kL) - i \sin(kL)), \\ 0 &= -2iB \sin(kL). \end{aligned}$$

Vidíme, že buď máme triviální řešení $B = 0$, kdy se struna nevlne, nebo platí

$$kL = n\pi,$$

kde n je celé (dle předpokladu kladné) číslo, což vede k tomu, že $\sin(kL) = 0$. Neurčené konstanty jsou tedy pouze absolutní hodnota a fáze B , což odpovídá amplitudě a globální fázi vlnění. Výchylka struny splňuje (dosazením známých veličin)

$$\hat{u}(x, t) = Be^{-i\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{n\pi}{L} t} (e^{-i\frac{n\pi}{L} x} - e^{i\frac{n\pi}{L} x}) = Be^{-i\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{n\pi}{L} t} (-2i) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

S použitím $B = |B|e^{i\varphi}$ a $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ máme

$$\hat{u}(x, t) = 2|B|e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} e^{-i\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{n\pi}{L} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Reálná výchylka je

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \text{Re } \hat{u}(x, t) = 2|B| \cos\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{n\pi}{L} t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \\ &= -2|B| \sin\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{n\pi}{L} t - \varphi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \end{aligned}$$

Pokud bychom chtěli určit $|B|$ či φ (a popřípadě n), museli bychom znát výchylku v celém rozsahu struny v určitý čas. Například bychom mohli vědět, že v čase $t = 0$ platí

$$u(x, 0) = C \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right),$$

kde C je známá reálná konstanta. Potom bychom měli

$$C \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = -2|B| \sin(-\varphi) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Zřejmě by tedy muselo platit $n = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $|B| = \frac{C}{2}$. Obecný vývoj by byl

$$u(x, t) = -2\frac{C}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{\pi}{L} t - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = C \cos\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \frac{\pi}{L} t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

V tomto výrazu už není žádná neznámá, tudíž jsme zvládli popsat dynamiku struny. Všimněme si, že k tomu bylo zapotřebí použít superpozici dvou řešení – jedné vlny pohybující se doprava a jedné doleva. Toto je typické pro stojaté vlnění, jedná se o reprezentaci odražení vlnění od okrajů systému, jak bylo uvedeno v předchozí sekci.

Tlumení

Tlumení, tj. ztráta energie vlnění, může být přítomno ve vlnové rovnici skrze členy obsahující derivace prvního stupně. Tyto derivace mohou být buďto vzhledem k poloze x nebo vzhledem k času t . Probereme pouze příklad s derivací vzhledem k času, ale příklad s derivací vzhledem k poloze je velmi podobný.

Uvažujme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde γ je síla tlumení. Pro komplexní výchylku můžeme provést fourierovskou substituci

$$-\omega^2 \hat{u} - i\gamma\omega \hat{u} = -k^2 v^2 \hat{u}$$

a disperzní vztah bude

$$\omega^2 + i\gamma\omega = k^2 v^2.$$

Máme před sebou netriviální úkol – je potřeba vyřešit komplexní kvadratickou rovnici. Chybám se nejlépe vyhneme pomocí doplnění na čtverec

$$\begin{aligned} \omega^2 + i\gamma\omega - \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} &= \left(\omega + i\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{4} = k^2 v^2, \\ \left(\omega + i\frac{\gamma}{2}\right)^2 &= k^2 v^2 - \frac{\gamma^2}{4}. \end{aligned}$$

Nyní máme dvě možnosti. Buď je tlumení relativně slabé a platí $k^2 v^2 > \frac{\gamma^2}{4}$, pak

$$\omega + i\frac{\gamma}{2} = \pm \sqrt{k^2 v^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \omega = -i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{k^2 v^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Pro silné tlumení platí $k^2 v^2 - \frac{\gamma^2}{4} < 0$ a výsledek lze psát jako

$$\omega = -i\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - k^2 v^2}.$$

V prvním případě se frekvence stala komplexním číslem, v druhém dokonce imaginárním číslem pro dané reálné k . Jak máme takovou hodnotu interpretovat? Dosadíme hodnotu pro slabé tlumení do oscilující části rovinné vlny

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\left(-i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{k^2 v^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right)t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\mp i\sqrt{k^2 v^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t}.$$

Vidíme, že reálná část frekvence stále odpovídá oscilacím, ale imaginární část představuje exponenciální pokles amplitudy výchylky s ubíhajícím časem, přičemž konstanta poklesu je $\frac{\gamma}{2}$. Jinak řečeno, čím silnější tlumení, tím rychleji se amplituda oscilací v daném bodě sníží na nulu.

Obdobně bychom mohli řešit členy s první derivací v poloze. Dostali bychom opět komplexní kvadratickou rovnici, ale tentokrát pro vlnové číslo, které by se stalo komplexním. Ještě jedna poznámka zbývá – pokud je tlumení silné, frekvence/vlnové číslo jsou čistě imaginární. To znamená, že systém neosciluje, ale má pouze profil exponenciálního poklesu v čase nebo v prostoru.

Linearizace

Vlnění je přítomno v mnoha spojitých fyzikálních systémech. Důvod k tomu je podobný, jako důvod pro přítomnost harmonických oscilací v diskrétních systémech. V blízkosti stabilního stavu lze totiž systém často aproximovat jako vlnící se systém.

Postup této tzv. linearizace systému je následovný. Nejprve vybereme veličiny, u kterých očekáváme vlnění. Dále tyto veličiny v dynamické rovnici aproximujeme jako malé oscilace okolo rovnovážného stavu. Například, obecnou veličinu $u(x, t)$ bychom mohli aproximovat jako $u(x, t) \approx u_0 + u_1(x, t)$, kde u_0 je hodnota v základním stavu a $u_1(x, t)$ je malá výchylka z tohoto stavu ve všech bodech v jakémkoli čase. Konkrétní definice toho, co znamená, že je výchylka malá, už záleží na systému. U horizontálně napnuté struny by to například znamenalo, že výchylka je kdykoli mnohem menší než délka struny. Tuto aproximaci dosadíme do naší dynamické rovnice a ponecháme pouze členy do prvního řádu v u_1 . Výsledkem bude rovnice, která je lineární, a velmi často se bude jednat právě o vlnovou rovnici v u_1 . Uvedený postup může působit velmi abstraktně, ilustrujeme si ho proto na příkladu vln inspirovaných Bose-Einsteinovým kondenzátem.

Bose-Einsteinův kondenzát je zvláštní stav hmoty, kterého mohou dosáhnout pouze soubory bosonů (určitý typ částic) při velmi nízkých teplotách. Nyní nás nebude zajímat konkrétní povaha tohoto stavu, pouze to, že mu lze připsat vlnovou funkci $\psi(x, t)$, která splňuje tzv. Gross-Pitajevského rovnici

$$-\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta |\psi|^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

kde α a β jsou kladné reálné konstanty, \hbar je reálná konstanta (tzv. redukovaná Planckova konstanta) a ψ je obecně komplexní. Nebudeme se zde pokoušet o plně kvantové řešení a provedeme tedy několik (poměrně drastických) aproximací.

Předpokládejme, že existuje stacionární řešení ψ_0 , které je funkcí pouze x a které je reálné. Potom platí

$$\alpha \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} = \beta |\psi_0|^2 \psi_0.$$

Nyní aproximujme vlnovou funkci jako

$$\psi(x, t) = \psi_0(x) + \psi_1(x, t),$$

kde $\psi_1(x, t) \ll \psi_0$. Pak máme

$$-\alpha \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \beta (\psi_0 + \psi_1) (\psi_0 + \psi_1^*) (\psi_0 + \psi_1) = i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t},$$

kde jsme použili $|\psi|^2 = \psi^* \psi$. Do prvního řádu v ψ_1 platí

$$-\alpha \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \beta |\psi_0|^2 \psi_0 - \alpha \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \beta (\psi_0^2 \psi_1^* + 2\psi_1 \psi_0^2) = i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t}.$$

První dva členy se odečtou, jelikož se jedná o definici stacionárního řešení. Pro zbylé členy provedeme fourierovskou substituci, což vede na

$$\alpha k^2 \psi_1 + \beta \psi_0^2 \psi_1^* + 2\beta \psi_0^2 \psi_1 = \hbar \omega \psi_1.$$

Rovnice komplexně sdružená k této rovnici je

$$\alpha k^2 \psi_1^* + \beta \psi_0^2 \psi_1 + 2\beta \psi_0^2 \psi_1^* = \hbar \omega \psi_1^*.$$

Sečtením těchto dvou rovnic dostáváme

$$\alpha k^2 (\psi_1 + \psi_1^*) + 3\beta \psi_0^2 (\psi_1 + \psi_1^*) = \hbar \omega (\psi_1 + \psi_1^*).$$

Vydělením $\psi_1 + \psi_1^* = 2 \operatorname{Re} \psi_1$ vyjde

$$\alpha k^2 + 3\beta \psi_0^2 = \hbar \omega.$$

Tento vztah je odlišný od reálného vztahu pro vlny v Bose-Einsteinově kondenzátu, ale blíží se ke správnému vztahu v limitě $\alpha k^2 \gg 3\beta \psi_0^2$. V této limitě je disperzní zákon kvadratický,

$$\omega = \frac{\alpha}{\hbar} k^2,$$

což je například velmi odlišné od vztahu pro vlny na struně, kdy jsme měli $\omega = v|k|$. Obdobným způsobem lze určit disperzní vztahy pro velké množství systémů, pro které známe dynamické rovnice.

A co dál?

Některé z těchto základních poznatků o vlnách si budete moci procvičit na úlohách seriálu. Čím se tedy budeme zabývat dále? Bude nás čekat doba normálních modů pro vlny – budeme řešit ideu polarizace a polarizačních vektorů. Také se pokusíme podívat na trochu modernější příklady vlnění. Ale to až v příštím dílu.

Úloha V.S ... rezonance a tlumení

10 bodů

1. Na napnutém laně mohou existovat vlny ve výchylce $u(x, t)$ z rovnovážné polohy, které splňují vlnovou rovnici s tlumením

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial u}{\partial x},$$

kde v je fázová rychlost a Γ je tlumící koeficient. Provedte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah. Vyřešte jej pro vlnové číslo k . Jakou podmínku, vyjádřenou pomocí frekvence ω , fázové rychlosti v a koeficientu Γ , musí vlny splňovat, aby byly na laně pozorovány uzly (body, ve kterých lano zůstává v rovnovážné poloze, ale v jejichž okolí se pohybuje)?

2. Uvažujte švihadlo, přichycené na jednom konci k nehybné stěně. Ve vzdálenosti L od stěny jej chytíme do ruky a začneme s ním pohybovat nahoru a dolů, čímž v něm vytvoříme vlnění. Švihadlo s délkovou hustotou λ udržujeme v napětí T ve směru od stěny, výchylka tedy splňuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pro výchylku konce švihadla, se kterým pohybuje, platí $u_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$. Předpokládejte, že řešení lze zapsat ve formě dvou rovinných vln, pohybujících se v opačných směrech. Nalezněte takové řešení pouze s využitím zadaných parametrů, tj. T , λ , L , A a ω_0 . Výsledné řešení má amplitudu rostoucí nade všechny meze pro určité frekvence. Určete jejich hodnoty a jim odpovídající vlnové délky.

(řešení str. 226)

Kapitola 6: Polarizace

V minulém díle seriálu jsme se zabývali vlněním, které se odehrávalo pouze v jednom rozměru – struna mohla oscilovat jenom vertikálně, částice reprezentovala pouze jedna vlnová funkce atp. Nyní se zkusíme zamyslet nad tím, co se stane, když se vlnění objeví ve více rozměrech, které jsou navzájem provázány. Například můžeme přemýšlet nad oscilacemi struny v obou směrech kolmých na směr napnutí struny, nebo nad tím, jaké vlny mohou existovat v nabitě tekutině, kde se kromě hustoty a teploty může měnit i nábojová hustota. Jako konkrétní příklad si ukážeme pomalé vlnění v plazmě, které splňuje rovnice takzvané magnetohydrodynamiky. Začneme ale pomaleji, se strunou, která může kmitat ve dvou směrech.

Švihadlo

Uvažujme švihadlo napnuté mezi dvěma body, přičemž napětí ve švihadle je T . Jeho délková hustota je ρ . Zvolme soustavu souřadnic tak, aby bylo napnuté podél osy x , a aby bylo jedním koncem uchyceno v počátku soustavy souřadnic. Nechť je u výchylka švihadla z rovnovážné polohy ve vertikálním směru (podél osy z) a v je výchylka v horizontálním směru (podél osy y , tj. kolmo na směr napětí).

Mohli bychom zopakovat stejné odvození jako v minulém díle, avšak musíme brát v potaz dva rozměry, ve kterých se švihadlo může pohybovat. To lze nejlépe učinit pomocí vektorového formalizmu.

Víme, že vertikální sílu působící na element délky dx v jednom rozměru šlo určit jako $dF = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$. Lze předpokládat, že oscilace v dalším směru budou nezávislé (nijak nezávisí na oscilacích v původním směru), takže pro sílu v druhém směru bude platit $dF' = T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx$. Pro celkovou sílu můžeme psát

$$d\mathbf{F} = T \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} dx,$$

kde $\mathbf{u} = (u, v)^T$ a $d\mathbf{F} = (dF, dF')^T$. Druhý Newtonův zákon pak lze zapsat jako

$$d\mathbf{F} = dm \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho dx \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}.$$

Toto je naše dvourozměrná analogie vlnové rovnice. Důležité je, že zachováváme fakt, že výchylky v obou směrech jsou stále funkce pouze dvou proměnných (času a příslušné souřadnici) čili můžeme provést fourierovskou substituci jak jsme zvyklí. To vede k vektorové rovnici

$$-\omega^2 \hat{\mathbf{u}} = \frac{T}{\rho} (-k^2) \hat{\mathbf{u}},$$

kde $\hat{\mathbf{u}}$ je komplexní vektorová výchylka, pro kterou platí $\mathbf{u} = \text{Re } \hat{\mathbf{u}}$, přičemž reálnou část bereme z každé komponenty zvlášť. Toto je vlastně soustava algebraických rovnic, kterou lze zapsat v maticové podobě jako

$$\begin{pmatrix} \frac{T}{\rho} k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho} k^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde \hat{u} a \hat{v} jsou komplexní výchylky v jednotlivých směrech. Ve fourierovské substituci jsme předpokládali tvary řešení

$$\begin{aligned} \hat{u} &= u_0 e^{ikx - i\omega t}, \\ \hat{v} &= v_0 e^{ikx - i\omega t}, \end{aligned}$$

kde u_0 a v_0 jsou potenciálně komplexní konstanty. Jelikož exponenciální část je pro oba směry shodná, můžeme maticovou rovnici upravit na

$$\begin{pmatrix} \frac{T}{\rho} k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho} k^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zde použijeme již známý formalismus z normálních modů – takovéto rovnice mají netriviální řešení pouze pokud determinant této matice je nula

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \right)^2 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho}}k.$$

Dostáváme stejný disperzní vztah jako v jednorozměrném případě. Matice se nyní stává nulovou maticí, takže u_0 i v_0 jsou zcela neomezeny, tj. vlnění můžeme zapsat jako libovolnou lineární kombinaci

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = u_0 e^{\pm ikx - i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 e^{\pm ikx - i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde směry propagace obou vln mohou být nezávislé. Těmto odlišným vlnám se říká polarizace daného vlnění a vektor $(u_0, v_0)^T$ nazýváme polarizační vektor. Jak přesně určíme konstanty u_0 a v_0 ? Uvažujme nyní konkrétní případ – necht se švihadlo pohybuje jako při klasickém přeskakování, tj. obíhá okolo rovnovážné polohy tak, že jednotlivé elementy se pohybují konstantní úhlovou rychlostí po kružnicích, jejichž poloměr se zvyšuje směrem ke středu švihadla, kde dosahuje maxima. V čase $t = 0$ lze amplitudu švihadla zapsat jako

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde A je reálná konstanta. Důležitá je také rychlost švihadla v čase $t = 0$, kterou můžeme zapsat jako

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\omega \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{pmatrix}.$$

Jak tento pohyb zachytit pomocí polarizací? U stojatého vlnění už jsme zvyklí, že pohyb lze zpravidla popsat jako superpozici dvou vln propagujících se v opačných směrech. Navrháme tedy

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ikx - i\omega t} + \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} e^{-ikx - i\omega t}.$$

V čase $t = 0$ potom platí

$$\hat{\mathbf{u}}(x, 0) = \begin{pmatrix} u_0 e^{ikx} + u_1 e^{-ikx} \\ v_0 e^{ikx} + v_1 e^{-ikx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_0 + u_1) \cos(kx) + i(u_0 - u_1) \sin(kx) \\ (v_0 + v_1) \cos(kx) + i(v_0 - v_1) \sin(kx) \end{pmatrix}.$$

Reálnou část určíme jako

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} (\text{Re } u_0 + \text{Re } u_1) \cos(kx) + (\text{Re}(iu_0) - \text{Re}(iu_1)) \sin(kx) \\ (\text{Re } v_0 + \text{Re } v_1) \cos(kx) + (\text{Re}(iv_0) - \text{Re}(iv_1)) \sin(kx) \end{pmatrix}.$$

Abychom splnili počáteční podmínky, potřebujeme $k = \frac{\pi}{L}$ a dále

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u_0 + \operatorname{Re} u_1 &= 0, \\ \operatorname{Re}(iu_0) - \operatorname{Re}(iu_1) &= A, \\ \operatorname{Re} v_0 + \operatorname{Re} v_1 &= 0, \\ \operatorname{Re}(iv_0) - \operatorname{Re}(iv_1) &= 0. \end{aligned}$$

Jelikož pro obecné komplexní číslo platí

$$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z,$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u_0 &= -\operatorname{Re} u_1, \\ \operatorname{Re} v_0 &= -\operatorname{Re} v_1, \\ \operatorname{Im} v_0 &= \operatorname{Im} v_1, \\ \operatorname{Im} u_0 &= \operatorname{Im} u_1 - A. \end{aligned}$$

Toto jsou první čtyři rovnice pro celkem osm neznámých (reálné a imaginární části $u_{0,1}$ a $v_{0,1}$). Další čtyři rovnice lze odvodit ze vztahu pro počáteční rychlost. Máme

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = (-i\omega) \hat{\mathbf{u}}$$

a tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \omega \begin{pmatrix} (\operatorname{Re}(-iu_0) + \operatorname{Re}(-iu_1)) \cos(kx) + (\operatorname{Re} u_0 - \operatorname{Re} u_1) \sin(kx) \\ (\operatorname{Re}(-iv_0) + \operatorname{Re}(-iv_1)) \cos(kx) + (\operatorname{Re} v_0 - \operatorname{Re} v_1) \sin(kx) \end{pmatrix}.$$

Tím jsme získali čtyři rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u_0 &= -\operatorname{Im} u_1, \\ \operatorname{Re} u_0 &= \operatorname{Re} u_1, \\ \operatorname{Im} v_0 &= -\operatorname{Im} v_1, \\ \operatorname{Re} v_0 &= \operatorname{Re} v_1 + A. \end{aligned}$$

Dosazením z předchozích vztahů dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u_1 - A &= -\operatorname{Im} u_1, \\ -\operatorname{Re} u_1 &= \operatorname{Re} u_1, \\ \operatorname{Im} v_1 &= -\operatorname{Im} v_1, \\ -\operatorname{Re} v_1 &= \operatorname{Re} v_1 + A. \end{aligned}$$

Výsledkem je

$$\begin{aligned} u_0 &= -i\frac{A}{2}, & v_0 &= \frac{A}{2}, \\ u_1 &= i\frac{A}{2}, & v_1 &= -\frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Celkový časový vývoj lze popsat rovnicí

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = \begin{pmatrix} -i\frac{A}{2}e^{ikx} + i\frac{A}{2}e^{-ikx} \\ \frac{A}{2}e^{ikx} - \frac{A}{2}e^{-ikx} \end{pmatrix} e^{-i\omega t} = A \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \\ i\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \end{pmatrix} e^{-i\omega t},$$

tudíž v reálné výchylce

$$\mathbf{u}(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Vlny v plazmatu

Rozměr, ve kterém vlny oscilují, ovšem nemusí být pouze prostorová dimenze, může se jednat o jiný stupeň volnosti. Tuto skutečnost budeme reprezentovat na modelu plazmatu. Předpokládejme, že plazma se skládá z nabitých částic, elektronů a jader. Budeme uvažovat pomalé pohyby, tj. budeme předpokládat, že jakákoliv dynamika elektronů ustala a vedla k vybalancování elektrického pole. Dále budeme zkoumat pouze plazma, kde se veškeré hodnoty mění v prostoru pouze v závislosti na souřadnici x kartézského souřadnicového systému (představujme si tenký sloupec plazmatu).

Při řešení vyjdeme z rovnic magnetohydrodynamiky. Jedná se o soustavu dvou skalárních a dvou vektorových diferenciálních rovnic. Postupně je nyní představíme.

První je tzv. rovnice kontinuity, která zajišťuje, že se hmota plazmatu nikam neztrácí. Její tvar je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = 0,$$

kde ρ je hustota plazmatu a $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^\top$ je jeho rychlost. Další skalární rovnicí je stavová rovnice plazmatu. Tu je obecně složité určit přesně, takže zde použijeme pouze obecnou fenomenologickou stavovou rovnici, která má tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0,$$

kde P je tlak v plazmatu a γ je konstanta. Třeba pro ideální plyn by se γ pojila s Poissonovou konstantou. Tato rovnice vlastně zajišťuje adiabatičnost stlačování plazmatu.

Můžeme přejít k vektorovým rovnicím. První z nich je tzv. Navier-Stokesova rovnice, která reprezentuje druhý Newtonův zákon v tekutinách

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^\top$ je magnetické pole v plazmatu a \times značí vektorový součin. Těto rovnici je o něco složitější porozumět, ale vnímejme ji tak, že na pravé

straně jsou síly na jednotku objemu tekutiny, jednak kvůli nerovnosti tlaku a zadruhé kvůli magnetickému poli, zatímco na levé straně je popsána změna hybnosti tekutiny v daném bodě.

Poslední vektorová rovnice je tzv. indukční rovnice, která plyne z Maxwellových rovnic v našem modelu a má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z}{\partial x} \\ \frac{\partial(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Přímé řešení těchto rovnic je zřejmě extrémně těžký úkol – jedná se o soustavu nelineárních diferenciálních rovnic. Ukazuje se, že jedno relativně triviální řešení se sestává z klidového stavu $\rho = \rho_0$, $P = P_0$, $\mathbf{v} = 0$ a $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, kde veličiny označené indexem 0 jsou konstantní jak v čase, tak v prostoru. Kolem tohoto klidového stavu lze rovnice linearizovat, čímž získáme vlnové rovnice.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že magnetické pole \mathbf{B}_0 leží v rovině xz , tedy $B_{0y} = 0$. Dále předpokládejme, že obecné proměnné lze zapsat jako $\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t)$, kde $|\rho_1| \ll |\rho_0|$ pro všechny časy a pozice (obdobně pro ostatní veličiny). Dosazením těchto výrazů můžeme rovnice linearizovat, pokud zachováme členy pouze do prvního řádu „malých“ veličin. Nezapomeňme přitom, že $\mathbf{v}_0 = 0$.

První rovnice je linearizovaná jako

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = 0.$$

Druhá vyžaduje složitější úpravu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{1x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{P_0 + P_1}{(\rho_0 + \rho_1)^\gamma} \right) = 0.$$

Platí

$$(\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma} = \rho_0^{-\gamma} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{-\gamma} \approx \rho_0^{-\gamma} \left(1 - \frac{\gamma \rho_1}{\rho_0} \right).$$

Pokud zachováme pouze členy do prvního řádu, dostáváme

$$\rho_0^{-\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(P_0 - P_0 \frac{\gamma \rho_1}{\rho_0} + P_1 \right) = 0.$$

Jelikož P_0 je konstantní a ostatní členy v druhé závorce jsou již prvního řádu „malosti“, pouze časová derivace zůstane v našem přiblížení do prvního řádu a platí (pro nenulovou hustotu ρ_0)

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0.$$

Navier-Stokesovu rovnici rozepíšeme v jednotlivých komponentech vektorů. Dále zavedeme úhel α , který určuje odchylku pole \mathbf{B}_0 od směru osy x . Platí $B_{0x} = B_0 \cos \alpha$, $B_{0z} = B_0 \sin \alpha$, kde $B_0 = |\mathbf{B}_0|$. Potom můžeme psát (zde již bez odvození, žádné zvláštní triky tu nejsou)

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} &= -\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0} B_0 \sin \alpha \frac{\partial B_{1z}}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos \alpha \frac{\partial B_{1z}}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos \alpha \frac{\partial B_{1y}}{\partial x}.\end{aligned}$$

Následující tři vztahy odvodíme obdobným způsobem z indukční rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{1x}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} &= B_0 \cos \alpha \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} - B_0 \sin \alpha \frac{\partial v_{1x}}{\partial x}, \\ \frac{\partial B_{1y}}{\partial t} &= B_0 \cos \alpha \frac{\partial v_{1y}}{\partial x}.\end{aligned}$$

Celkem tedy máme osm rovnic pro osm neznámých – 3 komponenty \mathbf{B}_1 , 3 komponenty \mathbf{v}_1 , ρ_1 a P_1 .

Ve vektorových rovnicích jsme záměrně psali komponentu y jako poslední. Důvodem je, že jsou oddělené od ostatních – neznámé v_{1y} a B_{1y} se vyskytují pouze v nich. To znamená, že vlnění popsané těmito dvěma rovnicemi je nezávislé na vlnění, které je popsáno zbytkem rovnic.

Dále postupujeme již standardně – provedeme fourierovskou substituci pro všechny veličiny typu $\rho_1(x, t) \rightarrow \hat{\rho}_1 = A e^{ikx - i\omega t}$, kde A je komplexní konstanta a $\hat{\rho}_1$ je komplexní výchylka (v tomto případě hustoty). Všechny osm rovnic pak lze zapsat jako dvě maticové rovnice (jedna pro proměnné v_{1y} a B_{1y} , druhá pro ostatní proměnné)

$$\begin{pmatrix} -i\omega\rho_0 & -ik\frac{1}{\mu_0}B_0\cos\alpha \\ ikB_0\cos\alpha & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -i\omega\rho_0 & 0 & \frac{ik}{\mu_0}B_0\sin\alpha & 0 & ik \\ 0 & -i\omega\rho_0 & -\frac{ik}{\mu_0}B_0\cos\alpha & 0 & 0 \\ ikB_0\sin\alpha & -ikB_0\cos\alpha & -i\omega & 0 & 0 \\ ik\rho_0 & 0 & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega\frac{\gamma P_0}{\rho_0} & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1x} \\ \hat{v}_{1z} \\ \hat{B}_{1z} \\ \hat{\rho}_1 \\ \hat{P}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde jsme vypustili triviální rovnici $-i\omega\hat{B}_{1x} = 0$, ze které plyne právě $\hat{B}_{1x} = 0$. Tím máme dva potenciální typy vlnění. Abychom určili disperzní vzorec, je potřeba spočítat determinant matice odpovídající danému vlnění. Zde se budeme věnovat pouze vlnění v v_{1y} a B_{1y} . Tyto vlny nazýváme Alfvénovy vlny.

Determinant matice 2×2 určíme snadno

$$\begin{vmatrix} ikB_0 \cos \alpha & i\omega \\ -i\omega\rho_0 & -ik\frac{1}{\mu_0}B_0 \cos \alpha \end{vmatrix} = k^2 \frac{1}{\mu_0} B_0^2 \cos^2 \alpha - \omega^2 \rho_0.$$

Z podmínky, že determinant musí být roven nule, vychází disperzní vztah

$$\omega = \frac{B_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} k.$$

To znamená, že vlny mají lineární disperzi (stejnou jako světlo nebo zvuk) s fázovou rychlostí

$$v_p = \frac{B_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}.$$

Platí tedy, že čím více je pole \mathbf{B}_0 odklopené od směru x , tím pomaleji se vlny propagují. Pro určení polarizačních vektorů dosadíme tento výsledek zpět do maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} ikB_0 \cos \alpha & i\frac{kB_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \\ -i\frac{kB_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0}} \sqrt{\rho_0} & -i\frac{kB_0 \cos \alpha}{\mu_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z čehož plyne, že možné řešení je

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\frac{\nu}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \end{pmatrix},$$

kde ν je komplexní konstanta s rozměrem rychlosti. Oscilace v B_{1y} probíhají v přímé antifázi k oscilacím v_{1y} a jsou větší pro nižší hustotu plazmatu ρ_0 .

Závěrem

V tomto seriálu jsme postupně objevovali systémy, které všemožně kmitají, vlní se a oscilují v blízkém okolí lokálního minima energie. Svět vln ovšem není omezen pouze na malé oscilace, existují i typy vlnění, které splňují některé charakteristiky (například zachovávají tvar při pohybu), ale od jednoduchých vln se odlišují. Například rovnice, která je popisuje, může být nelineární, takže vlny musí mít konkrétní amplitudu. Nelineární rovnice jsou ovšem výrazně složitější na řešení, zejména kvůli tomu, že nemůžeme uplatnit princip superpozice. Takové systémy se v současnosti stále zkoumají. Nicméně lineární vlnění a oscilace se stále hodně často objevují v mnoha systémech a my věříme, že zkušenosti nabyté v tomto seriálu se Vám budou velmi hodit ve Vaší fyzikální kariéře.

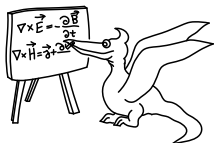
Úloha VI.S ... nabitá struna

10 bodů

Uvažujte napnutou strunu o délkové hustotě ρ , která je navíc rovnoměrně nabitá s délkovou nábojovou hustotou λ . Napětí ve struně je T . Struna se nachází v magnetickém poli o konstantní velikosti B , jež je ve směru struny v rovnovážné poloze. Vaším úkolem bude popsat několik aspektů kmitání této struny. Nejprve bude třeba sestavit vlnovou rovnici. Zanedbejte indukční efekty (předpokládejte,

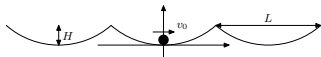
že struna je perfektně izolující, a tedy nábojová hustota zůstává konstantní) a určete Lorentzovu sílu na jednotku délky pro malé oscilace struny v obou směrech kolmých na směr jejího napnutí. Tuto sílu použijte pro sestavení vlnové rovnice (ta dále obsahuje sílu plynoucí z napětí struny). Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah v aproximaci malého pole B ; konkrétně uvažujte členy do prvního řádu v $\beta = \frac{\lambda B}{k\sqrt{\rho T}} \ll 1$, kde k je vlnové číslo. Určete dva polarizační vektory, tentokrát pouze do nultého řádu v β .

Nyní předpokládejte, že v určitém místě struny vytvoříme vlnu, která bude oscilovat pouze v jednom směru. V jaké vzdálenosti od původního bodu bude vlna stočená o devadesát stupňů?
(řešení str. 230)



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I.S ... kmitáme



Seriál začneme zkoumáním několika mechanických oscilátorů, u kterých nás bude zajímat především určení frekvence volných kmitů. Dále si zopakujeme, jak vypadá oscilátor ve fázovém

prostoru.

1. Uvažujme dutý nehmotný kužel, do jehož špičky vložíme kámen o hmotnosti M . Kužel ponoříme špičkou dolů do vody o hustotě ρ , ve které bude plovat. Určete rovnovážnou hloubku ponoru kužele měřenou od špičky h , pokud je celková výška kužele H a poloměr základny R . Dále nalezněte úhlovou frekvenci malých vertikálních kmitů kuželu.
2. Představme si závaží o hmotnosti m přidělané na nehmotné pružině o tuhosti k a klidové délce L . Pokud pružinu na druhém konci upevníme, dostaneme kyvadlo. Spočítejte přirozenou úhlovou frekvenci jeho oscilací, přičemž předpokládejte, že délka pružiny se během pohybu nemění. Následně určete malý rozdíl v úhlové frekvenci $\Delta\omega$, o který se úhlová rychlost tohoto kyvadla liší od případu, ve kterém je pružina nahrazena nedeforovatelnou tyčí se stejnou klidovou délkou. Přitom předpokládejte $kL \gg mg$.
3. V terénu, který se skládá z periodicky se opakujících parabol s výškou H a šířkou L , se nachází kostka cukru s hmotností m . Popište její potenciální energii jako funkci souřadnice v horizontálním směru a následně načrtněte možné trajektorie jejího pohybu ve fázovém prostoru v závislosti na rychlosti v_0 , kterou má při průchodu vrcholem paraboly. Na náčrtku označte všechny významné vzdálenosti. Pro výchylku použijte horizontální souřadnici, vhodné přizpůsobte jednotky hybnosti v horizontálním směru. Při výpočtech zanedbejte kinetickou energii pohybu kostky ve vertikálním směru a předpokládejte, že stále zůstává v kontaktu s terémem.

Kužel

Pokud je kužel ponořen do hloubky h , je jeho poloměr v úrovni hladiny roven

$$r = \frac{R}{H}h$$

a jeho objem pod hladinou bude

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{3H^2}.$$

Vztlaková síla působící na kužel je tedy

$$F = -\rho g V = -\frac{\pi \rho g R^2 h^3}{3H^2},$$

kde znaménko minus značí, že síla působí v opačném směru vzhledem ke směru ponoru h . Tíhová síla má velikost Mg a působí ve směru souřadnice h , z nulové výslednice sil v rovnovážné poloze tedy vyplývá

$$h^3 = \frac{3MH^2}{\pi\rho R^2} \Rightarrow h = \left(\frac{3MH^2}{\pi\rho R^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Při malé výchylce $\Delta h \ll h$, která zvětší ponor kužele, dojde ke zvětšení vztlakové síly F_v , jež má nyní velikost

$$F_v = -\frac{\pi\rho g R^2}{3H^2} (h + \Delta h)^3 = -\frac{\pi\rho g R^2}{3H^2} h^3 \left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^3 \approx -\frac{\pi\rho g R^2}{3H^2} h^3 \left(1 + \frac{3\Delta h}{h}\right).$$

Výslednice sil působících na kužel je potom rovna

$$\Delta F = F_v + F_g = F_v - F = -\frac{\pi\rho g R^2 h^3}{3H^2} \frac{3\Delta h}{h} = -\frac{\pi\rho g R^2 h^2}{H^2} \Delta h.$$

Pro zrychlení kužele dostáváme

$$a = \frac{\Delta F}{M} = -\frac{\pi\rho g R^2 h^2}{MH^2} \Delta h,$$

což identifikujeme jako základní rovnici pro harmonické kmitů je

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi\rho g R^2 h^2}{MH^2}} = \left(\frac{\pi\rho g R^2}{MH^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3MH^2}{\pi\rho R^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9\pi\rho g^3 R^2}{MH^2}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Kyvadlo

Prodloužení pružiny zřejmě bude

$$\Delta L = \frac{mg}{k},$$

frekvence oscilací kyvadla je dána jako

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{L + \Delta L}} = \sqrt{\frac{g}{L + \frac{mg}{k}}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \left(1 + \frac{mg}{kL}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Oproti kyvadlu s nedeformovatelnou tyčí tedy existuje rozdíl ve frekvenci kmitů, pro $kL \gg mg$ můžeme psát

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \left(1 + \frac{mg}{kL}\right)^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{g}{L}} \approx -\frac{mg}{2kL} \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Důležitým kvalitativním pozorováním je, že prodloužením tyče se zmenší úhlová frekvence kmitů kyvadla.

Kostka cukru

V naznačeném souřadnicovém systému má jedna z parabol vrchol v počátku. Její obecný předpis je tedy

$$y = cx^2,$$

kde x je horizontální souřadnice a c neznámá konstanta. Vzhledem k tomu, že stejnými, periodicky se opakujícími parabolami je tvořen celý povrch, se v dalších úvahách můžeme omezit na interval

$$x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right].$$

Aby měla parabola v bodě $x = \frac{L}{2}$ výšku H , musí platit

$$H = c \frac{L^2}{4} \Rightarrow c = \frac{4H}{L^2}.$$

Potenciální energie kostky má proto tvar

$$E_p = mgy = \frac{4mgH}{L^2} x^2.$$

Pro náčrt fázového prostoru je zapotřebí určit celkovou mechanickou energii, která bude rovna

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{p^2}{2m} + \frac{4mgH}{L^2}x^2.$$

Energie se zachovává, přičemž v počátku platí

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Z toho postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{p^2}{2m} \cdot \frac{L^2}{4mgH} &= \frac{1}{2}mv_0^2 \cdot \frac{L^2}{4mgH}, \\ x^2 + \frac{p^2}{\frac{8m^2gH}{L^2}} &= \frac{v_0^2 L^2}{8gH}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že kostka ve fázovém prostoru opisuje kružnici s poloměrem

$$r = \frac{v_0 L}{\sqrt{8gH}},$$

udáváme-li hybnost v jednotkách

$$\sqrt{\frac{8m^2gH}{L^2}}.$$

Nyní už je snadné tyto výsledky zobecnit a popsat pohyb kostky po parabolách, které nemají střed v počátku – kostka bude ve fázovém prostoru opět opisovat

kružnici, jejíž střed bude ležet na ose x v bodě, v němž má vrchol parabola, ve které se kostka právě nachází.

Důležitým poznatkem je, že toto platí pouze tehdy, je-li počáteční kinetická energie menší než potenciální energie v nejvyšším bodě paraboly, tedy pokud platí

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < mgH$$

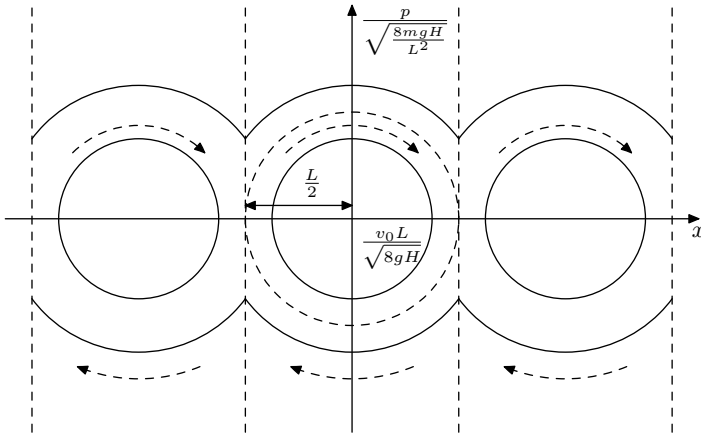
neboli

$$v_0 < \sqrt{2gH}.$$

Ve fázovém prostoru to odpovídá kritickému poloměru kružnice

$$r < \sqrt{2gH} \cdot \frac{L}{\sqrt{8gH}} = \frac{L}{2},$$

jak lze očekávat z geometrie zadané paraboly. Pokud je energie kostky vyšší, bude se vždy pohybovat po části kružnice s příslušným poloměrem v dané parabole. Od okamžiku, kdy přesáhne nejvyšší bod, bude pokračovat po části kružnice se středem ve středu vedlejší paraboly (viz obrázek 56).



Obr. 56: Fázový diagram pro kostku v nejnižším bodě paraboly. Čárkované vertikální čáry označují hranice parabol. Čárkovaná kružnice značí kružnici s kritickým poloměrem. Čárkované šipky označují směr pohybu ve fázovém prostoru.

Ve standardním prostoru si lze tyto dvě alternativy představit následovně. První možností je, že kostka osciluje okolo vrcholu paraboly, přičemž vždy zpomaluje, když se blíží do maximální výšky odpovídající výchylce $x = \pm \frac{v_0 L}{\sqrt{8gH}}$. V ní se obrátí směr rychlosti, a kostka se tak začne vracet zpět k vrcholu paraboly. V tomto případě má kostka malou energii a je omezena na pohyb v rámci jediné paraboly.

Pokud má ale kostka dostatečnou energii (tedy $v_0 > \sqrt{2gH}$), může překonat nejvyšší bod paraboly a následně pokračovat v pohybu stejným směrem. Při výstupu bude sice stále zpomalovat, ale její rychlost nikdy neklesne na nulu, a proto nikdy nezmění směr. Kostka se tak může volně pohybovat jedním směrem napříč parabolami.

Úloha II.S ... kmitající RLC

Uvažujme obvod, ve kterém jsou sériově zapojeny cívka, kondenzátor, rezistor a zdroj napětí. Cívka má indukčnost L , kondenzátor má kapacitu C a rezistor má odpor R . Zdroj vytváří střídavé napětí $U = U_0 \cos(\omega t)$. Všechny součástky považujte za ideální. S pomocí zákona zachování energie napište rovnici pro náboj, rychlost náboje (proud I) a zrychlení náboje (rychlost změny proudu I). Jedná se o rovnici tlumených kmitů. Porovnáte-li ji s rovnicí pro tlumené kmity závaží na pružině, co v tomto obvodu hraje roli hmotnosti, tuhosti pružiny a tření? Jaká je přirozená frekvence kmitů?

Dále pomocí veličin L , R a ω vyjádřete kapacitu kondenzátoru, při které by byl fázový posun napětí na kondenzátoru roven $\frac{\pi}{4}$. Jaká bude amplituda napětí na kondenzátoru při tomto fázovém posunu?

Rovnice pro náboj, jeho rychlost a zrychlení je možné odvodit pomocí zákona zachování energie, který nám říká, že součet napětí přes všechny komponenty obvodu musí být roven napětí na zdroji, neboli

$$\frac{Q}{C} + RI + JL = U_0 \cos(\omega t) .$$

Za výchylku lze v tomto systému považovat náboj na kondenzátoru, za rychlost proud I a za zrychlení pak zrychlení proudu J . Tím pádem hraje roli tuhosti pružiny veličina $\frac{1}{C}$, hmotnost odpovídá indukčnosti L a konstantu tření γ lze vyjádřit jako $\frac{R}{L}$ (musíme si uvědomit, že jsme sílu tření definovali jako γmv , a tedy koeficient u třecí síly je γm ; proto dělíme R veličinou L , jež odpovídá hmotnosti). Roli vnější síly $F \cos(\omega t)$, která nutí systém k oscilacím, hraje napětí $U_0 \cos(\omega t)$. Přirozená frekvence kmitů oscilátoru s pružinou je dána jako $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, čemuž v našem obvodu odpovídá $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$.

Fázový posun mezi napětím a oscilacemi náboje je dán vztahem

$$\cotg \varphi_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma \omega} ,$$

který jsme odvozovali v seriálu. Napětí na kondenzátoru se mění s oscilacemi náboje na kondenzátoru takže sdílí stejný fázový posun. Pro požadovaný fázový posun lze psát

$$\begin{aligned} \cotg \frac{\pi}{4} = 1 &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma \omega} , \\ \omega_0^2 &= \omega (\gamma + \omega) , \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega(\gamma + \omega)}.$$

V našem obvodu pak platí

$$\sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\omega\left(\frac{R}{L} + \omega\right)},$$

$$C = \frac{1}{\omega(R + \omega L)}.$$

Amplituda napětí na kondenzátoru závisí na amplitudě náboje na kondenzátoru (označíme ji Q_0) jako

$$U_C = \frac{Q_0}{C}.$$

Amplituda náboje je dána vztahem pro amplitudu tlumených kmitů, je tedy rovna

$$Q_0 = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} = \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}} =$$

$$= \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega\left(\frac{R}{L} + \omega\right) - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2R\omega}},$$

kde jsme v posledním kroku dosadili za získanou hodnotu C . Dostáváme výslednou amplitudu kmitů napětí, která má velikost

$$U_C = \frac{U_0}{\sqrt{2R\omega}}\omega(R + \omega L) = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\left(1 + \omega\frac{L}{R}\right).$$

Úloha III.S . . . elektron v poli

Uvažujte částici s nábojem q a hmotností m , která je přichycená k pružině o tuhosti k , jejíž druhý konec je ukotven v jednom bodě. Předpokládejte, že pohyb částice je omezen na pohyb v jedné rovině. Celý systém je v magnetickém poli o velikosti B_0 , které je kolmé na rovinu pohybu částice. Pokusíme se popsat možné oscilace této částice. Začněte sestavením rovnic pohybu pro tuto částici – nezapomňte započítat vliv magnetického pole.

Poté předpokládejte oscilující pohyb pro obě kartézské souřadnice částice, a proveďte Fourierovskou substituci, tj. nahradte derivace násobky $i\omega$, kde ω je frekvence oscilací. Vyřešte výslednou soustavu rovnic tak, abyste získali poměr amplitud oscilací a frekvenci oscilací. Takto získané řešení je poměrně složité, a abychom mu lépe porozuměli, je vhodné přiblížit si ho v jednodušším případě. Předpokládejte tedy dále, že magnetické pole je velmi silné, tj. $\frac{q^2 B_0^2}{m^2} \gg \frac{k}{m}$. Určete přibližnou hodnotu (hodnoty) ω v této aproximaci, hledejte vždy nejvyšší nenulový řád přiblížení. Dále načrtněte pohyb (pohyby) částice v reálném prostoru při této aproximaci.

Na částici působí dvě síly. První silou působí pružina, která vrací částici zpět ke kotvicímu bodu. Zavedme soustavu souřadnic s počátkem v tomto kotvicím bodě. Pozice částice je \mathbf{r} a síla, kterou působí pružina, je tedy

$$\mathbf{F}_p = -k\mathbf{r}.$$

Dále na částici působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

kde \mathbf{v} je rychlost částice. Rychlost částice lze vyjádřit jako derivaci pozice částice

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Nechť rovina, ve které se částice pohybuje, je rovinou xy naší soustavy souřadnic. Pak má vektor \mathbf{B} nenulovou složku pouze ve směru z a platí

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_y B_z, -v_x B_z, 0),$$

kde v_y je y -vá složka vektoru \mathbf{v} , a obdobně to je pro ostatní složky a vektory. Zavedme nyní $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ a označme velikost vektoru \mathbf{B} jako $|\mathbf{B}| = B_z = B_0$. Pak

$$\mathbf{F}_L = \left(qB_0 \frac{dy}{dt}, -qB_0 \frac{dx}{dt}, 0 \right).$$

Newtonův druhý zákon nám dá

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_L = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

V souřadnici x je tato rovnice

$$-kx + qB_0 \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

a v souřadnici y pak

$$-ky - qB_0 \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Pokud předpokládáme, že jak x , tak y s časem oscilují, lze psát

$$\begin{aligned} x &= \alpha e^{i\omega t}, \\ y &= \beta e^{i\omega t} \end{aligned}$$

a můžeme provést Fourierovskou substituci pro x

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= i\omega x, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\omega^2 x \end{aligned}$$

a obdobně pro y . Pohybové rovnice jsou tedy

$$\begin{aligned} -kx + i\omega q B_0 y &= -m\omega^2 x, \\ -ky - i\omega q B_0 x &= -m\omega^2 y. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme y

$$i\omega q B_0 y = (k - m\omega^2) x.$$

Vydělením oscilačním faktorem, který je společný pro x i y , pak dostáváme

$$\begin{aligned} i\omega q B_0 \beta &= (k - m\omega^2) \alpha, \\ \beta &= \frac{k - m\omega^2}{i\omega q B_0} \alpha = -i \frac{k - m\omega^2}{\omega q B_0} \alpha. \end{aligned}$$

Získali jsme poměr amplitud oscilací

$$\frac{\beta}{\alpha} = -i \frac{k - m\omega^2}{\omega q B_0}. \quad (99)$$

Dosazením do druhé rovnice (a vydělením oscilačním faktorem) dostáváme

$$\begin{aligned} -k\beta - i\omega q B_0 \alpha &= -m\omega^2 \beta, \\ -i\omega q B_0 \alpha &= (k - m\omega^2) (-i) \frac{k - m\omega^2}{\omega q B_0} \alpha. \end{aligned}$$

Při vydělení α můžeme získanou rovnici řešit pro ω

$$\begin{aligned} -i\omega q B_0 &= -i \frac{(k - m\omega^2)^2}{\omega q B_0}, \\ q^2 B_0^2 \omega^2 &= (k - m\omega^2)^2, \\ \pm q B_0 \omega &= (k - m\omega^2). \end{aligned}$$

Vydělíme rovnici m a zavedeme $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$. Pak

$$\pm \omega_c \omega = \omega_0^2 - \omega^2.$$

Tuto rovnici řešíme jako kvadratickou rovnici

$$\begin{aligned} \omega^2 \pm \omega_c \omega - \omega_0^2 &= 0, \\ \omega &= \frac{\pm \omega_c \pm' \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2}}{2}, \end{aligned}$$

kde \pm' je nezávislé na \pm . Aby byla frekvence kladné číslo, máme dvě možnosti; buď

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_0^2} - \frac{\omega_c}{2} = \sqrt{\frac{q^2 B_0^2}{4m^2} + \frac{k}{m}} - \frac{qB_0}{2m}$$

nebo

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_0^2} + \frac{\omega_c}{2} = \sqrt{\frac{q^2 B_0^2}{4m^2} + \frac{k}{m} + \frac{qB_0}{2m}}.$$

Nyní situaci zjednodušíme předpokladem ze zadání. Všimněme si, že z něj přímo plyne

$$\omega_c^2 \gg \omega_0^2.$$

Pro frekvence platí

$$\omega_1 = \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}} - \frac{\omega_c}{2} \approx \frac{\omega_c}{2} \left(1 + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} \right) - \frac{\omega_c}{2},$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega_c} = \frac{km}{mqB} = \frac{k}{qB_0},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}} + \frac{\omega_c}{2} \approx \frac{\omega_c}{2} \left(1 + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} \right) + \frac{\omega_c}{2}.$$

Do prvního nenulového řádu lze tento výraz přiblížit jednoduše jako

$$\omega_2 = \omega_c = \frac{qB_0}{m}.$$

Vidíme tedy, že frekvence ω_1 odpovídá pomalým oscilacím, zatímco frekvence ω_2 odpovídá spíše rychlejším oscilacím (rychlými oscilacemi myslíme ty s frekvencí okolo $\omega_c \gg \omega_0$). Dosazením do vzorce pro poměr amplitud (99) a položením $\omega = \omega_1$ získáváme

$$\rho_1 = \frac{\beta}{\alpha} \Big|_{\omega=\omega_1} = -i \frac{k - m \frac{k^2}{q^2 B_0^2}}{k} = -i \left(1 - \frac{m^2 k}{q^2 B_0^2 m} \right).$$

Zde si můžeme všimnout, že druhý člen v závorce je zanedbatelný, čímž pádem dostaneme

$$\rho_1 = -i.$$

Pro frekvenci $\omega = \omega_2$ je

$$\rho_2 = -i \frac{k - m \frac{q^2 B_0^2}{m^2}}{\frac{q^2 B_0^2}{m}} = -i \left(\frac{km^2}{mq^2 B_0^2} - 1 \right).$$

První člen v závorce je opět zanedbatelný, takže platí

$$\rho_2 = i.$$

Pro první typ kmitů jsou rovnice oscilací

$$\begin{aligned} x &= Ae^{i\omega_1 t}, \\ y &= -iAe^{i\omega_1 t}, \end{aligned}$$

kde A je nějaká konstanta. Pokud zapíšeme $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, můžeme pro oscilace (tentokrát vezmeme opravdu reálnou část explicitně) psát

$$x = A \cos(\omega_1 t) ,$$

$$y = A \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega_1 t) .$$

Toto je rovnice pro pohyb po kružnici o poloměru A . Směr pohybu je proti směru hodinových ručiček. Pro druhý typ kmitů máme obdobně

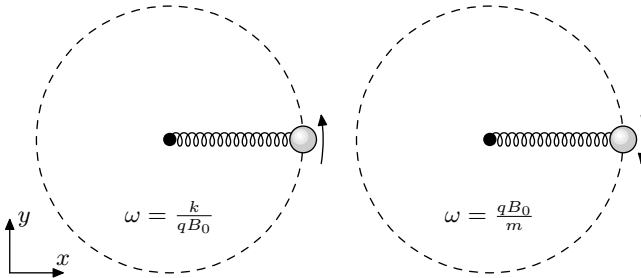
$$x = Ae^{i\omega_2 t} ,$$

$$y = iAe^{i\omega_2 t} ,$$

$$x = A \cos(\omega_2 t) ,$$

$$y = -A \sin(\omega_2 t)$$

a pohyb probíhá po stejné kružnici, ale po směru hodinových ručiček. Můžeme si všimnout, že pomalejší kmity (tedy ty s menší energií) odpovídají kmitům, které vytváří magnetický moment ve stejném směru jako pole \mathbf{B} (znázorněno vlevo na obrázku 57). Naopak druhý typ kmitů má opačný směr k poli \mathbf{B} a vyšší energii.



Obr. 57: Načrtnutí oscilací systému - částice obíhá po nebo proti směru hodinových ručiček. Magnetické pole ukazuje ven z papíru, tj. předpokládáme kladné B_0 . Dále předpokládáme kladné q . Vyšší frekvence je frekvence oběhu po směru hodinových ručiček.

V dané aproximaci (v silném magnetickém poli) se systém snaží minimalizovat energii vstupem do paramagnetického stavu. V reálných materiálech ovšem zprostředkovávají magnetismus elektrony, pro které je náboj záporný. To způsobí změnu znaménka v poměru amplitud, a tedy změnu směru oběhu částice – nižší stav energie je v diamagnetickém uspořádání.

Úloha IV.S . . . oscilace oxidu uhličitého

Budeme modelovat kmity v molekule oxidu uhličitého. Jedná se o lineární molekulu s jedním atomem uhlíku mezi dvěma atomy kyslíku, ležícími společně na jedné přímce. Uvažujme pouze kmity podél této přímky. Předpokládejme, že pro malé výchylky lze molekulu modelovat jako spojení uhlíkového atomu s každým z kyslíkových pomocí pružin o tuhosti k . Atom uhlíku má hmotnost M , hmotnost kyslíkového atomu je m .

Sestavte rovnice určující síly, které působí na atomy při malých výchylkách podél osy uvažované molekuly. Ta je symetrická vůči záměně některých atomů. Vyjádřete tuto symetrii pomocí matice působící na vámi definovaný vektor výchylek. Dále určete vlastní vektory a vlastní čísla této matice. Takováto symetrie však není kompletní – vysvětlte, které stupně volnosti nezahrnuje.

Dále sestrojte maticovou rovnici popisující kmity systému. Dosazením vlastních vektorů z matice symetrie, které rozšíříte o symetrií neomezené stupně volnosti, určete normální mody systému. Dále spočítejte jejich úhlovou rychlost/frekvenci a načrtněte směry oscilací. Jaké další mody (stále pouze ve směru osy molekuly) by systém mohl obsahovat? Určete frekvenci a směr pro každý mod, jež se vám podaří nalézt.

Zvolme soustavu souřadnic s počátkem na pozici uhlíkového atomu v rovnovážném stavu. Výchylky atomů z jejich rovnovážné polohy označme v pořadí x_1 , X a x_2 pro levý kyslík, uhlík a pravý kyslík. Všechny výchylky měříme ve směru rostoucí souřadnice x . Na kyslíkové atomy budou působit síly

$$\begin{aligned} F_1 &= k(X - x_1) , \\ F_2 &= k(X - x_2) . \end{aligned}$$

Sílu působící na atom uhlíku spočítáme jako

$$F = -F_1 - F_2 = k(x_1 + x_2 - 2X) .$$

Vidíme, že záměnou indexů kyslíkových atomů $1 \leftrightarrow 2$ dostaneme přesně stejnou soustavu rovnic. Definujme vektor výchylek jako

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X \end{pmatrix} .$$

Matice symetrie S má potom tvar

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Abychom našli vlastní vektory, musíme nejdříve určit determinant matice $S - \lambda I$, kde λ je vlastní číslo. Tento determinant musí být roven nule pro netriviální vlastní vektory, neboli

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Tato matice je blokově diagonální, takže platí

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} (1-\lambda) = (\lambda^2 - 1)(1-\lambda) = 0.$$

Vlastní čísla jsou $\lambda = \pm 1$ s tím, že pro $\lambda = 1$ očekáváme dva vektory – jedná se o dvojitý kořen rovnice.

Pro $\lambda = -1$ určíme vlastní vektor jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde α , β a γ jsou komponenty vlastního vektoru. Jediné netriviální řešení dostaneme pro

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ale jakýkoliv skalární násobek tohoto vektoru také funguje. Pro kořen $\lambda = 1$ řešíme rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Koeficient γ zřejmě není nijak omezen. Toto představuje neúplnost naší symetrie – permutace výchylek atomů kyslíku neklade žádné nároky na výchylku uhlíku. Ta představuje nezahrnutý stupeň volnosti. Toto je ovšem pravda pouze pro vektory, které odpovídají $\lambda = 1$. Pro $\lambda = -1$ jsme viděli, že výchylka uhlíku je symetrií donucena k nule.

Máme tedy dva vlastní vektory, které odpovídají $\lambda = 1$, a sice

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nebo jejich libovolnou lineární kombinaci.

Nyní sestrojme dynamickou rovnici popisující tento systém. Síly působící na atomy lze přepsat jako zrychlení výchylek atomů vynásobené jejich hmotnostmi. Pro tato zrychlení můžeme provést fourierovskou substituci, abychom dostali soustavu rovnic. Například rovnice pro atom kyslíku nalevo se změní na

$$m\ddot{x}_1 = k(X - x_1) \quad \Rightarrow \quad -m\omega^2 x_1 = k(X - x_1),$$

separací proměnných X a x_1 získáme

$$kX + (m\omega^2 - k)x_1 = 0.$$

Všechny rovnice lze shrnout jako

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - k & 0 & k \\ 0 & m\omega^2 - k & k \\ k & k & M\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme nejprve vektor typu \mathbf{v}_1 . Pro ten platí (dovolíme-li libovolnou hodnotu skalárního činitele)

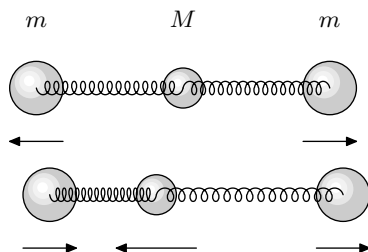
$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - k & 0 & k \\ 0 & m\omega^2 - k & k \\ k & k & M\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Velmi rychle zjistíme, že tato soustava rovnic má řešení při

$$(m\omega^2 - k)\alpha = 0,$$

čímž získáváme první frekvenci oscilací

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$



Obr. 58: Naznačení pohybu oscilujících módů. Při pohybu vždy platí zachování hybnosti a celková hybnost při těchto modech je konstantní. Při translačním modu je konstantní i vzdálenost mezi atomy.

Dále dosadíme obecnou superpozici vektoru \mathbf{v}_2 a vektoru \mathbf{v}_3 , což odpovídá rozšíření o nezahrnuté stupně volnosti v symetrii. Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - k & 0 & k \\ 0 & m\omega^2 - k & k \\ k & k & M\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

První a druhá rovnice jsou stejné, třetí je jiná. Máme tak dvě různé rovnice pro dvě neznámé

$$\begin{aligned} (m\omega^2 - k)\alpha + k\gamma &= 0, \\ 2k\alpha + (M\omega^2 - 2k)\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice si vyjádříme parametr

$$\gamma = \left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right),$$

který dosadíme ho do druhé, čímž získáme

$$\begin{aligned} \left(2k + (M\omega^2 - 2k) \left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)\right) \alpha &= 0, \\ \omega^2 \left(2m + M \left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)\right) \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Jedno řešení je $\omega = 0$, při kterém systém neosciluje. Druhé řešení je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{mM}{M+2m}}},$$

kde bereme v úvahu pouze kladný kořen. Pro neoscilující mod je γ dáno jako

$$\gamma = \alpha,$$

a vzdálenosti mezi atomy jsou v tomto modu konstantní, jak bychom očekávali. Pro oscilující mod platí

$$\gamma = \left(1 - \frac{m}{k} \frac{M+2m}{mM} k\right) \alpha = \left(1 - \frac{M+2m}{M}\right) \alpha = -\frac{2m}{M} \alpha$$

a vlastní vektory normálních modů jsou

$$\mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2m}{M} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tímto způsobem jsme získali tři vektory pro systém s třemi stupni volnosti - žádné další normální mody nemohou existovat. Nicméně pokud byl v řešení opomenut případ $\omega = 0$, lze ho odvodit pouze na základě fyzikální úvahy - systém je translačně invariantní čili se může posouvat konstantní rychlostí ve stejném uspořádání atomů. Pro kontrolu můžeme dosadit řešení, kdy všechny souřadnice vykonávají stejnou rychlostí rovnoměrný pohyb, tj. lze zapsat $X = x_1 = x_2 = x_0 + v_0 t$, kde x_0 a v_0 jsou konstanty. Takový pohyb bychom nazvali translační mod.

Nakonec poznamenejme, že druhý oscilující mod můžeme v reálném systému pozorovat jako absorpci světla s vlnovým číslem okolo 2349 cm^{-1} . První oscilující mod není v přímé absorpci vidět, jelikož nemá dipólový moment. Tato absorpce je jedním z důležitých komponentů skleníkového efektu.

Úloha V.S ... rezonance a tlumení

1. Na napnutém laně mohou existovat vlny ve výchylce $u(x, t)$ z rovnovážné polohy, které splňují vlnovou rovnici s tlumením

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial u}{\partial x},$$

kde v je fázová rychlost a Γ je tlumící koeficient. Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah. Vyřešte jej pro vlnové číslo k . Jakou podmínku, vyjádřenou pomocí frekvence ω , fázové rychlosti v a koeficientu Γ , musí vlny splňovat, aby byly na laně pozorovány uzly (body, ve kterých lano zůstává v rovnovážné poloze, ale v jejichž okolí se pohybuje)?

2. Uvažujte švihadlo, přichycené na jednom konci k nehybné stěně. Ve vzdálenosti L od stěny jej chytíme do ruky a začneme s ním pohybovat nahoru a dolů, čímž v něm vytvoříme vlnění. Švihadlo s délkovou hustotou λ udržujeme v napětí T ve směru od stěny, výchylka tedy splňuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pro výchylku konce švihadla, se kterým pohybuje, platí $u_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$. Předpokládejte, že řešení lze zapsat ve formě dvou rovinných vln, pohybujících se v opačných směrech. Nalezněte takové řešení pouze s využitím zadaných parametrů, tj. T , λ , L , A a ω_0 . Výsledné řešení má amplitudu rostoucí nade všechny meze pro určité frekvence. Určete jejich hodnoty a jim odpovídající vlnové délky.

Lano

Fourierovská substituce nahrazuje časové derivace mocninami $-i\omega$ a prostorové derivace mocninami ik , kde k je vlnové číslo a ω je frekvence vlnění. Rovnice ze zadání přejde na

$$-\omega^2 \hat{u} = -v^2 k^2 \hat{u} + i\Gamma k \hat{u},$$

kde $\hat{u} = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$ je komplexní výchylka. Rovnici vydělíme výrazem $-v^2 \hat{u}$ a dostaneme

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k^2 - i \frac{\Gamma}{v^2} k.$$

Pravou stranu doplníme na čtverec

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\Gamma^2}{4v^4} &= k^2 - i \frac{\Gamma}{v^2} k - \frac{\Gamma^2}{4v^4}, \\ \frac{1}{4v^4} (4\omega^2 v^2 - \Gamma^2) &= \left(k - i \frac{\Gamma}{2v^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Nyní máme dvě možnosti. Buď platí $4\omega^2v^2 > \Gamma^2$, potom

$$k - i\frac{\Gamma}{2v^2} = \pm \frac{1}{2v^2} \sqrt{4\omega^2v^2 - \Gamma^2},$$

$$k = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{4\omega^2v^2 - \Gamma^2}}{2v^2}$$

a vlnové číslo k je komplexní. Pro výchylku dostaneme

$$\hat{u} = u_0 e^{ikx - i\omega t} = u_0 e^{-i\omega t} e^{\pm i\frac{x}{2v^2} \sqrt{4\omega^2v^2 - \Gamma^2}} e^{-\Gamma\frac{x}{2v^2}}.$$

Výchylka má uzly v bodech

$$\frac{x}{2v^2} \sqrt{4\omega^2v^2 - \Gamma^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

kde n je celé číslo.

Druhou možností je $4\omega^2v^2 \leq \Gamma^2$, potom

$$k - i\frac{\Gamma}{2v^2} = \pm \frac{i}{2v^2} \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2v^2},$$

$$k = \frac{i}{2v^2} \left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2v^2} \right)$$

a vlnové číslo k je čistě imaginární. Pro závislost komplexní výchylky v tomto případě platí

$$\hat{u} = u_0 e^{ikx - i\omega t} = u_0 e^{-i\omega t} e^{-\frac{x}{2v^2} \left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2v^2} \right)}.$$

To znamená, že závislost amplitudy na souřadnici x je čistě exponenciální a neobsahuje tedy žádné uzly. Po provedení odmocniny za předpokladu, že Γ , ω a v jsou kladné, dostáváme hledanou podmínku pro existenci uzlů

$$\Gamma < 2\omega v.$$

Švihadlo

Druhá část úlohy používá vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Můžeme rovnou určit disperzní vztah pomocí fourierovské substituce

$$-\omega^2 = \frac{T}{\lambda} (-k^2),$$

$$\omega = |k| \sqrt{\frac{T}{\lambda}}.$$

Obecná rovinná vlna šířící se podél osy x je popsána rovnicí

$$\hat{u}_1(x, t) = B_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t - \varphi_1)},$$

ve které jsou amplituda B_1 , vlnové číslo k_1 , úhlová frekvence ω_1 a počáteční fáze φ_1 reálná čísla. Podle zadání hledáme řešení ve tvaru dvou proti sobě se pohybujících vln neboli

$$\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2,$$

kde je bez újmy na obecnosti k_1 kladné a k_2 záporné. Předpokládáme kartézskou soustavu souřadnic, v níž je osa x shodná s klidovým stavem švihadla. Bod, kde se švihadlem pohybujeme, se nachází v $x = 0$. Okrajové podmínky jsou následující. Nejprve musíme zajistit, že začátek švihadla se pohybuje společně s naší rukou

$$\operatorname{Re} \hat{u}(0, t) = A \cos(\omega_0 t).$$

Dále, konec švihadla u stěny zůstává nehybný

$$\hat{u}(L, t) = 0.$$

Začneme první podmínkou, do které dosadíme $\operatorname{Re} e^{ix} = \cos(x)$. Následně využijeme sudosti kosinu a nakonec použijeme součtový vzorec

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t) &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= B_1 (\cos(\omega_1 t) \cos \varphi_1 - \sin(\omega_1 t) \sin \varphi_1) + \\ &+ B_2 (\cos(\omega_2 t) \cos \varphi_2 - \sin(\omega_2 t) \sin \varphi_2). \end{aligned} \quad (100)$$

Funkce na levé straně rovnice je sudá, to samé musí platit i pro pravou stranu. Ta se skládá z lineární kombinace sinů a cosinů čili všechny siny se musí sečíst na nulu

$$B_1 \sin(\omega_1 t) \sin \varphi_1 + B_2 \sin(\omega_2 t) \sin \varphi_2 = 0.$$

Aby tato rovnice platila pro všechny časy, obě frekvence musí být stejné neboli $\omega_1 = \omega_2$. Potom jí můžeme vydělit $\sin(\omega_1 t)$ a dostaneme

$$0 = B_1 \sin \varphi_1 + B_2 \sin \varphi_2. \quad (101)$$

Ve vztahu (100) se tedy můžeme zbavit všech sinů. Výsledkem je

$$A \cos(\omega_0 t) = (B_1 \cos \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_2) \cos(\omega_1 t).$$

Opět využijeme toho, že dva cosiny se mohou rovnat jen tehdy, pokud mají stejnou frekvenci $\omega_0 = \omega_1$. Rovnici vydělíme $\cos(\omega_0 t)$, čímž získáme

$$A = B_1 \cos \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_2. \quad (102)$$

Tím jsme vyčerpali první podmínku a pokračujeme druhou. Předtím ještě připomeňme, že z rovnosti úhlových frekvencí $\omega_1 = \omega_2$, disperzního vztahu $\omega_0 \propto |k|$ a předpokladu o znaménkách vlnových čísel nutně vyplývá $k_1 = -k_2$. Označme pro

jednoduchost $k_1 = k$. Funkci u vyjádříme v obecném bodě x , přičemž se pokusíme oddělit časovou a prostorovou závislost

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \operatorname{Re}\left(B_1 e^{i(kx - \omega_0 t - \varphi_1)} + B_2 e^{i(-kx - \omega_0 t - \varphi_2)}\right) = \\ &= B_1 \cos(kx - \omega_0 t - \varphi_1) + B_2 \cos(-kx - \omega_0 t - \varphi_2) = \\ &= (B_1 \cos(kx - \varphi_1) + B_2 \cos(kx + \varphi_2)) \cos(\omega_0 t) + \\ &+ (B_1 \sin(kx - \varphi_1) - B_2 \sin(kx + \varphi_2)) \sin(\omega_0 t) = \\ &= f(x) \cos(\omega_0 t) + g(x) \sin(\omega_0 t) . \end{aligned} \quad (103)$$

Funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsme zavedli pro zjednodušení zápisu. Druhou podmínku tak můžeme vyjádřit jako

$$0 = f(L) \cos(\omega_0 t) + g(L) \sin(\omega_0 t) .$$

V čase $t = 0$ bude sinus nulový, takže pro splnění rovnice bude muset platit $f(L) = 0$. Podobnou úvahou dostaneme $g(L) = 0$. Tyto dvě podmínky jsou zřejmě postačující pro to, aby byl celý výraz nulový ve všech časech.

Začneme například s $f(L) = 0$. Pomocí součtových vzorců se pokusíme oddělit proměnné $B_{1,2}$ a $\varphi_{1,2}$, pro které už máme rovnice výše, od kL . Dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= f(L) = B_1 \cos(kL - \varphi_1) + B_2 \cos(kL + \varphi_2) = \\ &= (B_1 \sin \varphi_1 - B_2 \sin \varphi_2) \sin(kL) + (B_1 \cos \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_2) \cos(kL) . \end{aligned} \quad (104)$$

Výraz před $\cos(kL)$ je podle (102) roven A . Zároveň vidíme, že $\sin(kL) \neq 0$, protože jinak by platilo $0 = A \cos(kL)$, což by nebylo možné současně splnit. Podmínku tedy můžeme upravit do tvaru

$$-A \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} = B_1 \sin \varphi_1 - B_2 \sin \varphi_2 . \quad (105)$$

Druhá rovnice bude

$$\begin{aligned} 0 &= g(L) = B_1 \sin(kL - \varphi_1) - B_2 \sin(kL + \varphi_2) = \\ &= (B_1 \cos \varphi_1 - B_2 \cos \varphi_2) \sin(kL) - (B_1 \sin \varphi_1 + B_2 \sin \varphi_2) \cos(kL) . \end{aligned} \quad (106)$$

V tomto případě je člen před $\cos(kL)$ díky (101) nulový. Jelikož nemůže být nulový $\sin(kL)$, musí být nulový výraz před ním neboli

$$0 = B_1 \cos \varphi_1 - B_2 \cos \varphi_2 . \quad (107)$$

Rovnice (101), (102), (105) a (107) tvoří soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, které můžeme v principu vyřešit. My ale potřebujeme vyjádřit pouze $u(x, t)$. Ukazuje se, že explicitní výrazy pro úhly a amplitudy vln tvořících u hledat nemusíme. Vyjdeme z rovnice (103) a dosadíme za $f(x)$ a $g(x)$. Druhou zmiňovanou funkci máme vyjádřenou ve vztahu (106), akorát jen místo konkrétního bodu L napíšeme obecné x . Dosazením z (101) a (107) snadno zjistíme, že g musí být

identicky nulové, píšeme $g(x) \equiv 0$. Funkci $f(x)$ najdeme obdobným způsobem v rovnici (104). Dosadíme pro změnu z (102) a (105) a dostaneme

$$f(x) = -A \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} \sin(kx) + A \cos(kx) = A \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)}.$$

Nakonec ještě pomocí disperzního vztahu nahradíme konstanty. Výsledná funkce je

$$u(x, t) = f(x) \cos(\omega_0 t) = A \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \cos(\omega_0 t) = A \frac{\sin\left(\omega_0(L-x)\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\right)}{\sin\left(\omega_0 L \sqrt{\frac{\lambda}{T}}\right)} \cos(\omega_0 t).$$

Dosažením $x = 0$ a $x = L$ snadno ověříme, že jsou splněny obě okrajové podmínky.

Řešení má divergující amplitudy v případě, že

$$0 = \sin(kL) = \sin\left(\omega_0 L \sqrt{\frac{\lambda}{T}}\right).$$

To nastává, pokud

$$kL = m\pi,$$

kde m je celé číslo. Vlnovou délku lze vyjádřit jako $l = \frac{2\pi}{k}$, takže platí

$$\frac{2\pi}{l} L = m\pi \quad \Rightarrow \quad 2L = ml.$$

Divergující amplituda (která odpovídá rezonanci) se tedy objevuje v případech, kdy je celočíselný násobek vlnové délky roven $2L$ neboli kdy existuje celé číslo m splňující

$$l = \frac{2L}{m}.$$

Úloha VI.S ... nabitá struna

Uvažujte napnutou strunu o délkové hustotě ρ , která je navíc rovnoměrně nabitá s délkovou nábojovou hustotou λ . Napětí ve struně je T . Struna se nachází v magnetickém poli o konstantní velikosti B , jež je ve směru struny v rovnovážné poloze. Vaším úkolem bude popsat několik aspektů kmitání této struny. Nejprve bude třeba sestavit vlnovou rovnici. Zanedbejte indukční efekty (předpokládejte, že struna je perfektně izolující, a tedy nábojová hustota zůstává konstantní) a určete Lorentzovu sílu na jednotku délky pro malé oscilace struny v obou směrech kolmých na směr jejího napnutí. Tuto sílu použijte pro sestavení vlnové rovnice (ta dále obsahuje sílu plynoucí z napětí struny). Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah v aproximaci malého pole B ; konkrétně uvažujte členy do prvního řádu v $\beta = \frac{\lambda B}{k\sqrt{\rho T}} \ll 1$, kde k je vlnové číslo. Určete dva polarizační vektory, tentokrát pouze do nultého řádu v β .

Nyní předpokládejte, že v určitém místě struny vytvoříme vlnu, která bude oscilovat pouze v jednom směru. V jaké vzdálenosti od původního bodu bude vlna stočená o devadesát stupňů?

Uvažujme malou část struny o délce dx . Hmotnost této části je $dm = \rho dx$ a náboj této části je $dq = \lambda dx$. Nechť je struna natažená podél osy x souřadného systému. Pak je vektor výchylky části struny dán jako

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix}.$$

Rychlost části struny je tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t},$$

kde \mathbf{r} je vektor pozice části struny

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix}.$$

Síla magnetického pole na část struny je dána jako Lorentzova síla

$$d\mathbf{F}_B = dq \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{B},$$

kde vektor magnetického pole je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Máme

$$d\mathbf{F}_B = dx \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} B \\ -\frac{\partial u}{\partial t} B \end{pmatrix}.$$

Jelikož i síla z napětí pružiny působí pouze v rovině yz , můžeme vektory zúžit pouze na tuto rovinu. Dostáváme

$$d\mathbf{F}_B = dx \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial t} B \\ -\frac{\partial u}{\partial t} B \end{pmatrix}.$$

Z druhého Newtonova zákona máme

$$d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_P = dm \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = dx \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{pmatrix},$$

kde $d\mathbf{F}_p$ je síla z napnutí pružiny. Odtud vidíme, kde síla vstupuje do vlnové rovnice, kterou nyní můžeme napsat jako (s použitím standardního tvaru vlnové rovnice v seriálu)

$$\rho \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{pmatrix} + \lambda B \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial t} \\ -\frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Provedením Fourierovské substituce dostáváme

$$-\omega^2 \rho \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -k^2 T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\omega \lambda B \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}.$$

Toto lze zapsat jako maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} \rho\omega^2 - k^2 T & -i\omega \lambda B \\ i\omega \lambda B & \rho\omega^2 - k^2 T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Disperzní vztah odpovídá rovnici určující determinant matice jako nulový, tedy

$$\begin{aligned} (\rho\omega^2 - Tk^2)^2 - \omega^2 \lambda^2 B^2 &= 0, \\ \rho\omega^2 - Tk^2 &= \pm \omega \lambda B, \\ \omega^2 \mp \frac{\lambda B}{\rho} \omega - \frac{T}{\rho} k^2 &= 0, \\ \left(\omega \mp \frac{\lambda B}{2\rho} \right)^2 - \frac{\lambda^2 B^2}{4\rho^2} - \frac{T}{\rho} k^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pokud předpokládáme kladnou frekvenci, platí

$$\begin{aligned} \omega \mp \frac{\lambda B}{2\rho} &= \sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{4\rho^2} + \frac{T}{\rho} k^2}, \\ \omega &= \sqrt{\frac{T}{\rho} k^2 \left(1 + \left(\frac{\lambda B}{2\rho} \right)^2 \frac{\rho}{Tk^2} \right)} \pm \frac{\lambda B}{2\rho}. \end{aligned}$$

S využitím definice $\beta = \frac{\lambda B}{k\sqrt{\rho T}}$ můžeme psát

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k \left(\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4}} \pm \frac{\beta}{2} \right) \approx \sqrt{\frac{T}{\rho}} k \left(1 \pm \frac{\beta}{2} \right).$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{T}{\rho}} k \pm \frac{\lambda B}{2\rho}, \\ \omega^2 &\approx \frac{T}{\rho} k^2 \pm \frac{\lambda B}{\rho} \sqrt{\frac{T}{\rho}} k \end{aligned}$$

a maticová rovnice je

$$\begin{pmatrix} \rho \frac{T}{\rho} k^2 \pm \rho \frac{\lambda B}{\rho} \sqrt{\frac{T}{\rho}} k - k^2 T & -i \left(\sqrt{\frac{T}{\rho}} k \pm \frac{\lambda B}{2\rho} \right) \lambda B \\ i \left(\sqrt{\frac{T}{\rho}} k \pm \frac{\lambda B}{2\rho} \right) \lambda B & \rho \frac{T}{\rho} k^2 \pm \rho \frac{\lambda B}{\rho} \sqrt{\frac{T}{\rho}} k - k^2 T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z prvního řádku vidíme, že platí

$$\pm \lambda B \sqrt{\frac{T}{\rho}} k u - i \left(\sqrt{\frac{T}{\rho}} k \pm \frac{\lambda B}{2\rho} \right) \lambda B v = 0$$

Vydělením $\lambda B \sqrt{\frac{T}{\rho}} k$ dostáváme

$$\begin{aligned} \pm u - i \left(1 \pm \frac{\lambda B}{2k\sqrt{\rho T}} \right) v &= 0, \\ u &= \pm i \left(1 \pm \frac{\beta}{2} \right) v. \end{aligned}$$

Do nultého řádku v β pro vlastní vektory platí

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Obecné vlnění můžeme rozložit do polarizačních stavů, pro které je dynamika známá, tj. můžeme předpokládat, že řešení má tvar

$$\mathbf{u}(x, t) = A_1 \mathbf{u}_1 e^{i(kx - \omega_1 t)} + A_2 \mathbf{u}_2 e^{i(kx - \omega_2 t)}$$

V čase $t = 0$ budeme předpokládat, že vlnění má profil

$$\mathbf{u}(x, t) = A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikx},$$

což odpovídá kombinaci polarizačních vektorů $A_1 = \frac{A_0}{2} = A_2$. Pro časový vývoj vlnění můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \frac{A_0}{2} \left(\mathbf{u}_1 e^{i(kx - \sqrt{\frac{T}{\rho}} kt - \frac{\lambda B}{2\rho} t)} + \mathbf{u}_2 e^{i(kx - \sqrt{\frac{T}{\rho}} kt + \frac{\lambda B}{2\rho} t)} \right) = \\ &= \frac{A_0}{2} e^{i(kx - \sqrt{\frac{T}{\rho}} kt)} \left(\mathbf{u}_1 e^{-i\frac{\lambda B}{2\rho} t} + \mathbf{u}_2 e^{i\frac{\lambda B}{2\rho} t} \right). \end{aligned}$$

Rozepsáním do souřadnic dostaneme

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{A_0}{2} e^{i(kx - \sqrt{\frac{T}{\rho}} kt)} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda B}{2\rho} t} + e^{i\frac{\lambda B}{2\rho} t} \\ i \left(e^{i\frac{\lambda B}{2\rho} t} - e^{-i\frac{\lambda B}{2\rho} t} \right) \end{pmatrix} = A_0 e^{i(kx - \sqrt{\frac{T}{\rho}} kt)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\lambda B}{2\rho} t\right) \\ -\sin\left(\frac{\lambda B}{2\rho} t\right) \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že vlnění se s časem postupně stáčí s úhlovou rychlostí $\omega_F = \frac{\lambda B}{2\rho}$. Aby se vlnění stočilo o devadesát stupňů, musí uplynout čas

$$t_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\lambda B}{2\rho}} = \frac{\pi\rho}{\lambda B}.$$

Za tuto dobu urazí vlnění vzdálenost

$$L_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} t_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{T\rho}}{\lambda B},$$

kteřou lze vyjádřit také pomocí parametru β jako

$$L_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{k\beta}.$$

Jevu stáčení polarizace vlnění se říká Faradayova rotace.



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Kořenově

V 34. ročníku proběhlo navzdory nepříznivé situaci způsobené pandemií koronaviru podzimní soustředění. Konalo se v Kořenově v horské chatě Zvonice, v týdnu od soboty 26. 9. do neděle 4. 10. Soustředění se zúčastnilo 29 středoškoláků, kteří si v průběhu devíti dní poslechli řadu odborných i populárně naučných přednášek a užili si též spousty venkovních i vnitřních her.

Organizátoři

Daniela Pittnerová, Filip Ayazi, Jáchym Bártík, Jiří Blaha, Markéta Calábková, Tomáš Červeň, Daniel Dupkala, Ivan Hudák, Kateřina Charvátová, Marek Jankola, Tereza Labudová, Matěj Mezera, Václav Mikeska, Šimon Pajger, Kateřina Rosická, Matěj Rzehulka, Štěpán Stenclák, Jakub Šafin, Martin Vaněk (zdravotník), Jozef Lipták (návštěva přes internet)



Obr. 59: Trénink před dobýváním Jeruzaléma.

Účastníci

Robert Gemrot, Lubor Čech, Martina Daňková, Jiří Kohl, Adam Krška, Dominik Blaha, Martin Kysela, Aleš Opl, Patrik Kašpárek, Pavel Provazník, Soňa Husáková, Adam Húštava, Lukáš Linhart, Barbora Čemanová, Hynek Jakeš, Tomáš Patsch, Ondřej Piroutek, Ondřej Sladký, Dominik Farhan, Jan Pijáček, Marie

Lausová, Jáchym Mraček, Adam Kozubek, Václav Maštera, Jan Marjanko, Aneta Pjatkanová, Marek Milička, Jonáš Dej, Daniel Fousek



Obr. 60: Královna a její poddaní.

Legenda

Účastníci prožili celý týden na královském dvoře v době nelítostného středověku. Ve službách královny čelili nástrahám této temné doby, vypravili se hledat pramen věčného mládí, dobývali nepřátelský hrad a snažili se, aby jejich království prosperovalo.

Jarní soustředění (neproběhlo)

V souvislosti s opatřeními vlády proti šíření koronaviru bylo jarní soustředění zrušeno. Místo něj však byla uspořádána alespoň kratší online akce FYKOSí Online Víkend. Těšíme se, že se s účastníky potkáme na dalších akcích až se zlepší situace.

Fyziklání 2021

Letošního, v pořadí již 15. ročníku Fyziklání se opět zúčastnil rekordní počet týmů. Soutěž kvůli pandemické situaci výjimečně proběhla online formou. V pátek 12. února se tedy virtuálně sešlo neuvěřitelných 442 týmů složených z 1 916 soutěžících, aby spolu poměřily síly. Mezi nimi bylo kromě těch českých a slovenských také mnoho zahraničních, především z Egypta, Indie, Íránu, Vietnamu, Polska a USA.

Absolutním vítězem se stal tým *30chuaphailaT(Ě)ST* z Vietnamu. V kategorii B se nejlépe umístil tým *Physics Geniuses* z Indie a v kategorii C vyhrál rumunský tým (*untitled*). Mezi česko-slovenskými soutěžícími si nejlépe vedl tým



Obr. 61: Příprava před soutěží.

Black Quartz: Recrystallized z Gymnázia Jana Keplera, který obsadil třetí příčku v kategorii A. V kategoriích B a C to pak byly týmy *oint* studentů Gymnázia Poštová v Košicích a *Archimédova Vaňa* z Gymnázia Grösslingová v Bratislavě.



Obr. 62: Celé Fyziklání bylo streamováno prostřednictvím YouTube.

Kromě samotné soutěže si mohli účastníci užít také bohatý doprovodný program o víkend, který byl spolu se samotnou soutěží streamován prostřednictvím YouTube kanálu Fykosák. Záznamy z něj jsou k dispozici na <https://www.>

youtube.com/user/fykosak. Začal diskuzním panelem věnovaným možnostem rozvoje během studia na střední škole. V sobotu pak následoval rozbor řešení úloh Fyziklání v českém i anglickém jazyce a série vědecko-popularizačních přednášek. Ty se věnovaly tématům jako výzkum radioaktivity či magnetooptické jevy.

Fyziklání se účastní nejvýše pětičlenné týmy středoškoláků. Jejich cílem v průběhu tříhodinové soutěže je získat co nejvyšší počet bodů za řešení fyzikálních úloh. Letos soutěž proběhla netypicky online s mírně ozvláštněnými pravidly a na podobném principu jako Fyziklání online. Unikátem letošního Fyziklání bylo přidání nové herní mechaniky – kartiček, které umožňovaly například přeskočit úlohu nebo zdvojnásobit její bodový zisk.

Výsledky

Kategorie A

- | | | |
|----|------------------------------|--------|
| 1. | 30chuaphailaT(Ê)ST | 282 b. |
| 2. | Blairlake | 238 b. |
| 3. | Black Quartz: Recrystallized | 238 b. |

Kategorie B

- | | | |
|----|------------------|--------|
| 1. | Physics Geniuses | 247 b. |
| 2. | Team Name | 246 b. |
| 3. | Fazekas11B_HU | 179 b. |

Kategorie C

- | | | |
|----|------------------|--------|
| 1. | (untitled) | 225 b. |
| 2. | Physics star | 217 b. |
| 3. | Quantum Troopers | 177 b. |

Kompletní výsledková listina a podrobná pravidla jsou k nalezení na webových stránkách soutěže <https://fyziklani.cz>.

Fyziklání online

Letos proběhl již desátý ročník internetové soutěže Fyziklání online. Konal se ve středu 25. 11. 2020. Do soutěže se aktivně zapojilo celkem 619 týmů sestávajících z 2714 účastníků ze 47 různých zemí. Tím se překonal loňský rekord v počtu zúčastněných o více než 50 %.

Celkovým vítězem se stal vietnamský tým *The Large Noobs Collider* se ziskem 275 bodů. Za ním se v kategorii Open umístil americký tým *Bruh Moment* s 264 body. Třetí pozici obsadil britský tým *NonlinearPerturbator* s 252 body. Ziskem 210 bodů se tým *The HeisenBugs* z Indie dostal na první místo v kategorii A. Z týmů kategorie B na první příčku dosáhl americký tým *One-Diraction*, který získal 229 bodů. Vítězem kategorie C se stal tým *OCVA* z Rumunska se 154 body. Mezi českými a slovenskými středoškolskými týmy si vedl nejlépe český tým *Black Transistor* se 188 body.

Nejllepší české i zahraniční týmy byly oceněny věcnými cenami podle svého výběru.



Obr. 63: Íránský tým *I_ nterstella_R* (*Infoset*) během soutěže.

Pravidla

Na začátku soutěže každý tým o maximálně pěti členech obdržel sedm úloh s jednoznačným číselným výsledkem. Po zadání správného výsledku do našeho webového systému získal tým zadání následující úlohy. Soutěž trvala 3 hodiny, přičemž v průběhu soutěže proběhla také hurry up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení každé úlohy bylo hodnoceno bonusovými body. Jelikož se soutěž konala online, byly všechny pomůcky povoleny. Zakázána však byla komunikace s lidmi mimo soutěžní tým.

Výsledky

Středoškoláci A

- | | |
|-------------------|--------|
| 1. The HeisenBugs | 210 b. |
| 2. Blairlake | 200 b. |
| 3. Nerd_Sniped | 196 b. |

Středoškoláci B

- | | |
|------------------|--------|
| 1. One-Diraction | 229 b. |
| 2. Error 404 | 171 b. |
| 3. SCI-TECH | 165 b. |

Středoškoláci C

- | | |
|----------------|--------|
| 1. OCVA | 154 b. |
| 2. Physics ADI | 150 b. |
| 3. CaminBaieti | 147 b. |

Středoškoláci A - CZ/SK

- | | |
|----------------------------------|--------|
| 1. Black Transistor | 188 b. |
| 2. přehľad | 146 b. |
| 3. Bioložka a čtyři programátoři | 139 b. |

Středoškoláci B - CZ/SK

- | | |
|---------------------------|--------|
| 1. tým se odhlásil | 136 b. |
| 2. Nějaký název vymyslíme | 122 b. |
| 3. Pozitróny | 116 b. |

Středoškoláci C - CZ/SK

- | | |
|---------------------|--------|
| 1. Archimedova Vaňa | 147 b. |
| 2. TeamNotFound | 87 b. |
| 3. Gumkáči | 82 b. |

Open

- | | |
|--------------------------------|--------|
| 1. The Large Noobs Collider | 275 b. |
| 2. Bruh Moment | 264 b. |
| 3. <i>NonlinearPerturbator</i> | 252 b. |
| 4. $e = \pi = \sqrt{g} = 3$ | 247 b. |
| 5. Bohring Plancktons | 238 b. |



Obr. 64: Foto vietnamského týmu *5 dudes, 6 Ds* těsně po soutěži. V jejich časové zóně končila soutěž ve 2 hodiny ráno.

Ve výsledkové listině jsou uvedeny pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je k nalezení na webových stránkách soutěže <https://online.fyziklani.cz/2020/>.

Fyzikální Náboj

Letošní ročník Fyzikálního Náboje se uskutečnil 13. listopadu 2020 a byl organizován slovenským FKS a FYKOsem. Princip soutěže je podobný Fyziklání – pě-

Obr. 65: Český tým *Mančaft*.

tičlenné týmy během dvou hodin řeší fyzikální úlohy a snaží se získat co nejvíce bodů za správná řešení. Oproti Fyziklání se liší soutěžním časem (dvě hodiny místo tří) a bodováním (za správnou odpověď je vždy 1 bod). Tento rok byl Náboj pro všechny zúčastněné země online, využívá systém Fyziklání online.

V České republice soutěžilo celkem 44 týmů (z toho 19 v kategorii Junioři a 25 v kat. Senioři).

Vítězné týmy, kat. Seniori, ČR

1. (6.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5
2. (7.) Mendelovo gymnázium, Komenského 5, Opava
3. (8.) Gymnázium, Mikulášské nám. 23, Plzeň

Vítězné týmy, kat. Junioři, ČR

1. (3.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5
2. (6.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5
3. (10.) Wichterlovo gymnázium, Čs. exilu 669, Ostrava – Poruba

V závorkách je uvedeno pořadí v rámci mezinárodního žebříčku. Kompletní výsledkovou listinu najdete na webu soutěže <https://physics.naboj.org>.

Den s experimentální fyzikou

Den s experimentální fyzikou (DSEF) je každoroční akce FYKOSu, která umožňuje středoškolákům nahlédnout do fyzikálních laboratoří. Letošní, již 26. ročník proběhl v pátek 6. listopadu 2020, tentokrát netradičně online.

Pro účastníky byla připravena přednáška o atmosférických jevech a o způsobech ovlivňování počasí lidstvem a další o pozitronové anihilaci a jejím využití v oblasti výzkumu vlastností pevných látek. Dále byla představena pracoviště MFF – Skupina nanomateriálů a skupina z Katedry fyziky nízkých teplot spolupracující s experimentem COMPASS v CERNu. Na závěr se uskutečnil diskuzní panel s organizátory FYKOSu o studiu fyziky na vysoké škole, uplatnění ve vědě a možnostech výzkumu již v průběhu studia.



Obr. 66: Přednáška o atmosférických jevech.

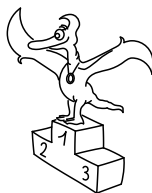
FYKOSí online víkend

V termínu od 14. do 16. května se uskutečnil historicky první FYKOSí Online Víkend. Jednalo se o třídní online akci pořádanou pro řešitele, kteří se kvůli pandemické situaci nemohli zúčastnit jarního soustředění.

Takto měli možnost alespoň online poznat jak ostatní účastníky, tak některé organizátory FYKOSu při různých hrách i volných socializacích. Kromě toho si organizátoři připravili několik přednášek a nechyběla ani šifrovačka a diskuzní večer. Poslední den se uskutečnil panel o studiu na vysoké škole a na samotný závěr kvíz.



Obr. 67: Účastníci FYKOSího Online Víkendu.



Pořadí řešitelů

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 264
1. <i>Lukáš Linhart</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	148
2. <i>Vojtěch Kadeřábek</i>	G Mensa, Praha	105
3. <i>Vladimíra Jiříčková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	82
4. <i>Daniel Čtvrtečka</i>	G Christiana Dopplera, Praha	52
5. <i>David Mendl</i>	G P. de Coubertina, Tábor	47
6. <i>Veronika Bartáková</i>	Slovanské G, Olomouc	45
7. <i>Anežka Čechová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	39
8. <i>Richard Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	32
9. <i>Sandeep Kandi</i>	IMSA, Aurora, USA	27
10. <i>Lukáš Jarábek</i>	G Grösslingová, Bratislava	23
11. <i>Vítězslav Lamoš</i>	G, Omská, Praha	21
12. <i>Boris Pasterňak</i>	Leaf Academy	19
13. <i>Kristián Matúš</i>	G, Nový Jičín	15
14. <i>Samuel Ševčík</i>	G, Jeseník	13
15.–16. <i>Jakub Ebringer</i>	G, Blansko	10
15.–16. <i>Vojtěch Janáček</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	10
17. <i>Johana Vaníčková</i>	G, Českolipská, Praha	8
18. <i>Krishna Kumar Sah</i>	Awasiya Public School	7
19. <i>Isuru Liyanawaduge</i>	D.S.Senanayake College	6
20. <i>Patrik Pecina</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	5
21. <i>Václav Vinkler</i>	Wichterlovo G, Ostrava	3

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 264
1. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	120
2. <i>Pavel Provazník</i>	G Dašická, Pardubice	115
3. <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	114
4.–5. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	99
4.–5. <i>Jan Lepič</i>	G, Strakonice	99
6. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	94
7. <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	93
8. <i>Alexander Stoyanov</i>	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	84
9. <i>Vojtěch Juza</i>	G, Litomyšl	74
10. <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	67
11. <i>Miruna Neacsu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest,RO	65
12. <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	59
13. <i>Daniela karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	56
14. <i>Evan Kim</i>	Tesla STEM High School, USA	54
15.–16. <i>Vít Brázda</i>	G Dašická, Pardubice	53
15.–16. <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	53
17. <i>Jan Engler</i>	G, Hodonín	51
18. <i>Petr Piňos</i>	Biskupské G, Brno	48
19. <i>Vojtěch Kysilka</i>	G, Roudnice nad Labem	43
20. <i>Karolína Šedová</i>	G Jana Keplera, Praha	41
21. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	40
22. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	37
23. <i>Ioana Milea</i>	CN Mihai Eminescu, Romania	35
24. <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	32
25. <i>Ivy Qin</i>	RC Palmer Sec. Sc.	28
26.–27. <i>Julie Křimská</i>	G Jana Keplera, Praha	26
26.–27. <i>Dalibor Očenášek</i>	G Uničov	26
28. <i>Jakub Genčur</i>	G Matyáše Lercha, Brno	22
29. <i>Jiří Mládek</i>	G, Soběslav	18
30. <i>Ashmit Dutta</i>	Wayzata High School	16
31. <i>Jan Cícha</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	15
32. <i>Pragun Pudukoli</i>	Sishu Griha HS, India	14
33. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	12
34. <i>Petr Vitko</i>	G Teplice	10
35. <i>Barbora Peřinová</i>	Česká zemědělská akademie Humpol	9
36. <i>Jakub Koňárek</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	8
37. <i>Vojtěch Štěpán</i>	G, Benešov	6
38. <i>Damián Tancoš</i>	G, Kukučínova, Poprad	5
39. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	4
40. <i>Timotej Marhefka</i>	G sv. Jána Pavla II., Poprad	2

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 240
1. <i>Aleš Opl</i>	G a Hudební škola, Praha 3	164
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	130
3. <i>Josef Vácha</i>	G Jana Keplera, Praha	114
4. <i>Yahya Numan INCIRKUS</i>	Yasar Acar High School	110
5. <i>David Chudožilov</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	101
6. <i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	95
7.–8. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	83
7.–8. <i>Nikita Ustinov</i>	G Jana Keplera, Praha	83
9. <i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	75
10. <i>Elena Chochoňáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	70
11. <i>Ondřej Piroutek</i>	G, Českolipská, Praha	69
12. <i>Adam Kozubek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	62
13. <i>Daniel Skýpala</i>	G, Olomouc-Hejčín	58
14. <i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	56
15.–16. <i>Jan Bajer</i>	G, Jihlava	54
15.–16. <i>Pavína Zavřelová</i>	Biskupské G, Brno	54
17.–18. <i>Jakub Mikeš</i>	G J. Škody, Přerov	52
17.–18. <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	52
19. <i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	50
20. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	49
21. <i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	45
22. <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	44
23. <i>Adam Hústava</i>	European School Luxembourg II	41
24. <i>Lukáš Fidler</i>	Jiráskovo G, Náchod	40
25. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	39
26. <i>Václav Maštera</i>	G P. de Coubertina, Tábor	37
27. <i>Aleksandar Rusev</i>	First Language school, Bulgaria	34
28.–29. <i>Matěj Korž</i>	G J. A. Raymana, Prešov	33
28.–29. <i>Aneta Piklová</i>	G, Strakonice	33
30.–31. <i>Wiktoria Macura</i>	G J. Slowackiego, Český Těšín	31
30.–31. <i>Jáchym Mraček</i>	Akademické G, Praha	31
32.–33. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	28
32.–33. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	28
34.–35. <i>Dávid Brodriánský</i>	G J. A. Raymana, Prešov	26
34.–35. <i>Matouš Hofmeister</i>	G J. Barranda, Beroun	26
36.–37. <i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	25
36.–37. <i>Anička Chu Ngoc</i>	G, Jihlava	25
38.–39. <i>Lubomír Břoušek</i>	G, Jihlava	24
38.–39. <i>Eliška Malá</i>	Slovanské G, Olomouc	24
40.–41. <i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystrica	23
40.–41. <i>Monika Janderová</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	23
42. <i>Jevhenij Vorochta</i>	Jiráskovo G, Náchod	21
43. <i>Vojtěch Votruba</i>	G Jana Keplera, Praha	20
44.–45. <i>Eva Feldbabelová</i>	Katolické gymnázium Třebíč	19
44.–45. <i>Matúš Jakubec</i>	G, P. Horova, Michalovce	19
46. <i>Martin Polák</i>	G Masaryk.nám.	18
47. <i>Tereza Skořepová</i>	G Dašická, Pardubice	15
48. <i>Bishoy Roushdy</i>	STEM High School, Egypt	14
49. <i>Ondřej Korběl</i>	G Varšavská, Žilina	13
50. <i>Michaela Šídová</i>	G, Litoměřická, Praha	12

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 240
51. <i>Eliška Věnečková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	11
52. <i>Michal Štěpán</i>	Jiráskovo G, Náchod	10
53.–54. <i>Štěpán Kozák</i>	Jiráskovo G, Náchod	8
53.–54. <i>Vojtěch Smola</i>	G Komenského, Havířov	8
55.–56. <i>Samuel Stanek</i>	G Grösslingová, Bratislava	7
55.–56. <i>Kristián Štastný</i>	G, Ostrov	7
57.–58. <i>Abanoub Osama</i>	STEM High School, Egypt	6
57.–58. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	6
59. <i>Mohamed Sayed Mostafa</i>	STEM High School, Egypt	5
60.–67. <i>Hamdy Amen</i>	STEM High School, Egypt	4
60.–67. <i>Zyad Ekramy</i>	STEM High School, Egypt	4
60.–67. <i>Lukáš Hubáč</i>	SPŠ a VOŠ, Písek	4
60.–67. <i>Mahmoud Shawky</i>	STEM High School, Egypt	4
60.–67. <i>Mahmoud Shawky</i>	STEM High School, Egypt	4
60.–67. <i>Radim Skála</i>	G, Hořovice	4
60.–67. <i>Martin Václavíček</i>	Masarykovo G, Plzeň	4
60.–67. <i>Nabil Youssef</i>	STEM High School, Egypt	4
68.–69. <i>Moaz Ahmed</i>	STEM High School, Egypt	3
68.–69. <i>Jakub Ferenčík</i>	G Dašická, Pardubice	3
70.–71. <i>Akram Haitham</i>	G, Frenštát pod Radhoštěm	2
70.–71. <i>Akmal Hashad</i>	STEM High School, Egypt	2
72.–75. <i>Hamdy Nour El-din Mansour</i>	STEM High School, Egypt	1
72.–75. <i>Mohammed Meshrif</i>	STEM High School, Egypt	1
72.–75. <i>Ahmed Ragab</i>	Tesla STEM High School, USA	1
72.–75. <i>Seif Eldein Walid</i>	STEM High School, Egypt	1
76.–83. <i>Mahmoud El-Nezely</i>	STEM High School, Egypt	0
76.–83. <i>Saif El-said</i>	STEM High School, Egypt	0
76.–83. <i>Moemen Ibrahim</i>	STEM High School, Egypt	0
76.–83. <i>Mahmoud Kassem</i>	STEM High School, Egypt	0
76.–83. <i>Ahmed Moussa</i>	STEM High School, Egypt	0
76.–83. <i>Ahmed Nassar</i>	STEM High School, Egypt	0
76.–83. <i>Omar Sharaf</i>	STEM High School, Egypt	0
76.–83. <i>ahmed waleed</i>	STEM High School, Egypt	0

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 240
1. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	155
2. <i>Vojtěch Kuchař</i>	Wichterlovo G, Ostrava	140
3. <i>Šimon Kurz</i>	G Lučka Pika, Plzeň	109
4. <i>Marek Milička</i>	G dr. K. Polesného., Znojmo	99
5. <i>Štěpán Pressl</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	96
6.–7. <i>Matěj Dvořák</i>	G Jana Keplera, Praha	89
6.–7. <i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	89
8. <i>Tomáš Volf</i>	G Jura Hronca, Bratislava	77
9. <i>Domínik Farhan</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	76
10. <i>Daniel Fousek</i>	G, Špitálská, Praha	66
11. <i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	59
12. <i>Tomáš Tuleja</i>	G L. Svobodu, Humenné	57
13.–14. <i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	51
13.–14. <i>Matúš Kolenka</i>	G Konštantínova, Prešov	51
15. <i>Marek Broul</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	35
16. <i>Viduranga Landers</i>	D.S.Senanayake College	30
17.–18. <i>Lívia Čerešňová</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	29
17.–18. <i>Aneta Pjatkanová</i>	G, Kralupy	29
19.–20. <i>Mona Alizadeh</i>	St Paul's GS	26
19.–20. <i>Marika Kosohorská</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	26
21. <i>Andrew Pun</i>	M. Garneau Collegiate Institute	23
22. <i>Martin Opat</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	21
23.–24. <i>Log Franc</i>	Cumberland Valley HS, USA	20
23.–24. <i>Agra Navaratne Navaratne</i>	D.S.Senanayake College	20
25.–26. <i>Aahana Aahana</i>	CHIREC International School	19
25.–26. <i>Ondřej Sladký</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	19
27.–28. <i>Jaroslav Grulich</i>	Jiráskovo G, Náchod	17
27.–28. <i>Konstantin Tripunovski</i>	American HS Skopje, Macedonia	17
29.–30. <i>Zsolt Beke</i>	G H. Selyeho Komárno	15
29.–30. <i>Riley Lofgren</i>	Lambert High School, USA	15
31. <i>Makar Kuznietsov</i>	Lviv Lyceum	12
32.–34. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	10
32.–34. <i>Gauri Shankar H</i>	Pondicherry University	10
32.–34. <i>Patrik Kočan</i>	G M. Hattalu, Trstená	10
35.–36. <i>Gauri Shankar H</i>	Pondicherry University	9
35.–36. <i>Martin Polyácsko</i>	G Alejová, Košice	9
37. <i>Jakub Kliment</i>	G Tajovského, B. Bystrica	8
38. <i>Dávid Benko</i>	G L. Svobodu, Humenné	7
39.–40. <i>Martina Daňková</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	5
39.–40. <i>Jan Klivan</i>	G, Dačice	5
41. <i>Kian Kyars</i>	Harry Ainlay Highschool	4
42.–44. <i>Youssef Abdelmoneim</i>	STEM High School, Egypt	3
42.–44. <i>Philopater Gabra</i>	STEM High School, Egypt	3
42.–44. <i>Le Vu Neumann</i>	G Opatov, Praha	3
45. <i>Anna Kaiserová</i>	SPŠS a OA Kadaň	2
46.–49. <i>Hussein Hassan</i>	STEM High School, Egypt	0
46.–49. <i>Islam Hassan</i>	STEM High School, Egypt	0
46.–49. <i>Andrew Henin</i>	STEM High School, Egypt	0
46.–49. <i>Ahmed Jaheen</i>	STEM High School, Egypt	0

DANIELA PITTNEROVÁ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXXIV. ročník – 2020/21

Předmluva: Daniela Pittnerová

Náměty úloh:

Jozef Lipták (I.1, I.E, II.1, III.3, IV.2, IV.3, IV.5, VI.4), Karel Kolář (I.2, II.4, III.P, IV.1, IV.P, V.1, VI.P), Štěpán Marek (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Jáchym Bártík (III.5, V.P, VI.3, VI.5), Kateřina Charvátová (II.E, III.1, III.E, IV.4), Václav Mikeska (I.3, II.5, V.2, V.5), Jindřich Jelínek (VI.2, VI.E), Matěj Mezera (I.5, V.E), Daniela Pittnerová (I.4, II.P), Jiří Blaha (III.2), Katarína Častulíková (II.3), Jakub Dolejší (I.P), Daniel Dupkala (IV.E), Radka Křížová (II.2), Šimon Pajger (V.4), Matěj Rzehulka (VI.1), Jan Střeleček (III.4), Lukáš Timko (V.3),

Řešení úloh:

Jozef Lipták (I.1, II.1, III.3, III.P, IV.2, IV.3, IV.5, VI.4), Štěpán Marek (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Karel Kolář (IV.1, IV.P, V.1, VI.P), Jáchym Bártík (III.5, VI.3, VI.5), Kateřina Charvátová (II.E, III.1, IV.4), Václav Mikeska (I.3, II.5, V.5), Daniela Pittnerová (I.4, I.E, II.P), Martin Vaněk (I.2, III.E, V.E), Katarína Častulíková (I.P, II.3), Jindřich Jelínek (VI.2, VI.E), Šimon Pajger (II.4, V.4), Filip Ayazi (V.P), Jiří Blaha (III.2), Veronika Hendrychová (V.2), Ivan Hudák (IV.E), Radka Křížová (II.2), Viktor Materna (VI.1), Matěj Mezera (I.5), Jan Střeleček (III.4), Lukáš Timko (V.3),

Kmity a vlnění: Štěpán Marek

Legenda podzimního soustředění: Daniela Pittnerová

Legenda jarního soustředění: (nekonalo se)

Sazba: Matěj Rzehulka, Jáchym Bártík, Štěpán Stenclák

Obrázky a grafy: Matěj Mezera, Karel Kolář

Jazykové korektury: Kateřina Orságová, Daniela Pittnerová, Veronika Hendrychová, Matěj Rzehulka, Jozef Lipták

Odborné korektury: Jozef Lipták, Jáchym Bártík, Matěj Mezera, Šimon Pajger, Róbert Jurčo, Jindřich Jelínek, Daniel Dupkala, Václav Mikeska, Jakub Šafin

DANIELA PITTNEROVÁ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXXIV. ročník – 2020/21

Vydal MatfyzPress
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 640. publikaci.

Vytiskl ReproStředisko a nakladatelství MatfyzPress MFF UK

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením.
Nakladatelství neodpovídá za kvalitu a obsah textu.
Vydáno pro interní potřebu MFF UK.
Neprodejná publikace

252 stran, 67 obrázků
Sazba písmem Latin Modern v programu X_YL^AT_EX
Vydání první
Náklad 400 výtisků

Praha 2021

ISBN 978-80-7378-446-1