Úloha VI.S ... nabitá struna

10 bodů; (chybí statistiky)

Uvažujte napnutou strunu o délkové hustotě ρ, která je navíc rovnoměrně nabitá s délkovou nábojovou hustotou λ. Napětí ve struně je T. Struna se nachází v magnetickém poli o konstantní velikosti B, jež je ve směru struny v rovnovážné poloze. Vaším úkolem bude popsat několik aspektů kmitání této struny. Nejprve bude třeba sestrojit vlnovou rovnici. Zanedbejte indukční efekty (předpokládejte, že struna je perfektně izolující, a tedy nábojová hustota zůstává konstantní) a určete Lorentzovu sílu na jednotku délky pro malé oscilace struny v obou směrech kolmých na směr jejího napnutí. Tuto sílu použijte pro sestavení vlnové rovnice (ta dále obsahuje sílu plynoucí z napětí struny). Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah v aproximaci malého pole B; konkrétně uvažujte členy do prvního řádu v $\beta = \frac{\lambda B}{k\sqrt{\rho T}} \ll 1$, kde k je vlnové číslo. Určete dva polarizační vektory, tentokrát pouze do nultého řádu v β. Nyní předpokládejte, že vytvoříme v určitém místě struny vlnu, která bude oscilovat pouze v jednom směru. V jaké vzdálenosti od původního bodu bude vlna stočená o devadesát stupňů?

Štěpán vzpomínal na třetí seriálovou úlohu.

Uvažujme malou část struny o délce $\mathrm{d}x$. Hmotnost této části je $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}x$ a náboj této části je $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}x$. Nechť je struna natažená podél osy x souřadného systému. Pak je vektor výchylky části struny dán jako

$$\mathbf{u}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} .$$

Rychlost části struny je tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} ,$$

kde $\mathbf{r}$ je vektor pozice části struny

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} .$$

Síla magnetického pole na část struny je dána jako Lorentzova síla

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_B = \mathrm{d}q \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{B} ,$$

kde vektor magnetického pole je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Máme tedy

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_B = \mathrm{d}x\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} B \\ -\frac{\partial u}{\partial t} B \end{pmatrix} .$$

Jelikož i síla z napětí pružiny působí pouze v rovině yz, můžeme vektory zúžit pouze na tuto rovinu. Máme tedy

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_B = \mathrm{d}x\lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial t} B \\ -\frac{\partial u}{\partial t} B \end{pmatrix} .$$

Z druhého Newtonova zákona máme

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_B + \mathrm{d}\mathbf{F}_\mathrm{P} = \mathrm{d}m\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathrm{d}x\rho\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{pmatrix}\,,$$

kde $\mathrm{d}\mathbf{F}_\mathrm{P}$ je síla z napnutí pružiny. Odtud vidíme, kde síla vstupuje do vlnové rovnice, kterou nyní můžeme napsat jako (s použitím standardního tvaru vlnové rovnice v seriálu)

$$\rho\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{pmatrix} + \lambda B\begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial t}\\ -\frac{\partial u}{\partial t}\end{pmatrix}\,.$$

Provedením Fourierovské substituce dostáváme

$$-\omega^2\rho\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = -k^2T\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} - i\omega\lambda B\begin{pmatrix}v\\ -u\end{pmatrix}\,.$$

Toto lze zapsat jako maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix}\rho\omega^2 - k^2T & -i\omega\lambda B\\ i\omega\lambda B & \rho\omega^2 - k^2T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\,.$$

Disperzní vztah odpovídá rovnici určující determinant matice jako nulový, tedy

$$\begin{aligned}\left(\rho\omega^2 - Tk^2\right)^2 - \omega^2\lambda^2B^2 &= 0\,,\\ \rho\omega^2 - Tk^2 &= \pm\omega\lambda B\,,\\ \omega^2 \mp \frac{\lambda B}{\rho}\omega - \frac{T}{\rho}k^2 &= 0\,,\\ \left(\omega \mp \frac{\lambda B}{2\rho}\right)^2 - \frac{\lambda^2B^2}{4\rho^2} - \frac{T}{\rho}k^2 &= 0\,.\end{aligned}$$

Pokud předpokládáme kladnou frekvenci, pak píšeme

$$\begin{aligned}\omega \mp \frac{\lambda B}{2\rho} &= \sqrt{\frac{\lambda^2B^2}{4\rho^2} + \frac{T}{\rho}k^2}\,,\\ \omega &= \sqrt{\frac{T}{\rho}k^2\left(1 + \left(\frac{\lambda B}{2\rho}\right)^2\frac{\rho}{Tk^2}\right)} \pm \frac{\lambda B}{2\rho}\,.\end{aligned}$$

S využitím definice $\beta = \frac{\lambda B}{k\sqrt{\rho T}}$ pak píšeme

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}}k\left(\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4}} \pm \frac{\beta}{2}\right) \approx \sqrt{\frac{T}{\rho}}k\left(1 \pm \frac{\beta}{2}\right)\,.$$

Máme tedy

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}}k \pm \frac{\lambda B}{2\rho}\,,$$

$$\omega^2 \approx \frac{T}{\rho}k^2 \pm \frac{\lambda B}{\rho}\sqrt{\frac{T}{\rho}}k$$

a maticová rovnice je

$$\begin{pmatrix} \rho\frac{T}{\rho}k^2 \pm \rho\frac{\lambda B}{\rho}\sqrt{\frac{T}{\rho}}k - k^2 T & -i\left(\sqrt{\frac{T}{\rho}}k \pm \frac{\lambda B}{2\rho}\right)\lambda B \\ i\left(\sqrt{\frac{T}{\rho}}k \pm \frac{\lambda B}{2\rho}\right)\lambda B & \rho\frac{T}{\rho}k^2 \pm \rho\frac{\lambda B}{\rho}\sqrt{\frac{T}{\rho}}k - k^2 T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z prvního řádku vidíme, že platí

$$\pm\lambda B\sqrt{\frac{T}{\rho}}ku - i\left(\sqrt{\frac{T}{\rho}}k \pm \frac{\lambda B}{2\rho}\right)\lambda B v = 0$$

Vydělením $\lambda B\sqrt{\frac{T}{\rho}}k$ dostáváme

$$\pm u - i\left(1 \pm \frac{\lambda B}{2k\sqrt{\rho T}}\right)v = 0\,,$$

$$u = \pm i\left(1 \pm \frac{\beta}{2}\right)v$$

a do nultého řádu v β tedy platí pro vlastní vektory

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Obecné vlnění můžeme rozložit do polarizačních stavů, pro které je dynamika známá, tj. můžeme předpokládat, že řešení má tvar

$$\mathbf{u}(x,t) = A_1\mathbf{u}_1\mathrm{e}^{i(kx-\omega_1 t)} + A_2\mathbf{u}_2\mathrm{e}^{i(kx-\omega_2 t)}$$

V čase $t = 0$ budeme předpokládat, že má vlnění profil

$$\mathbf{u}(x,t) = A_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{ikx}\,,$$

což odpovídá kombinaci polarizačních vektorů $A_1 = \frac{A_0}{2} = A_2$. Pro časový vývoj vlnění tedy můžeme psát

$$\mathbf{u}(x,t) = \frac{A_0}{2}\left(\mathbf{u}_1\mathrm{e}^{i\left(kx-\sqrt{\frac{T}{\rho}}kt-\frac{\lambda B}{2\rho}t\right)} + \mathbf{u}_2\mathrm{e}^{i\left(kx-\sqrt{\frac{T}{\rho}}kt+\frac{\lambda B}{2\rho}t\right)}\right),$$

$$\mathbf{u}(x,t) = \frac{A_0}{2}\mathrm{e}^{i\left(kx-\sqrt{\frac{T}{\rho}}kt\right)}\left(\mathbf{u}_1\mathrm{e}^{-i\frac{\lambda B}{2\rho}t} + \mathbf{u}_2\mathrm{e}^{i\frac{\lambda B}{2\rho}t}\right).$$

Rozepsáním v komponentech dostaneme

$$\mathbf{u}(x,t) = \frac{A_0}{2}\mathrm{e}^{i\left(kx-\sqrt{\frac{T}{\rho}}kt\right)}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\frac{\lambda B}{2\rho}t} + \mathrm{e}^{i\frac{\lambda B}{2\rho}t} \\ i\left(\mathrm{e}^{i\frac{\lambda B}{2\rho}t} - \mathrm{e}^{-i\frac{\lambda B}{2\rho}t}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}(x,t) = A_0 \mathrm{e}^{i\left(kx - \sqrt{\frac{T}{\rho}}kt\right)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\lambda B}{2\rho}t\right) \\ -\sin\left(\frac{\lambda B}{2\rho}t\right) \end{pmatrix} .$$

Vidíme tedy, že s časem se vlnění se postupně stáčí s úhlovou rychlostí $\omega_\mathrm{F} = \frac{\lambda B}{2\rho}$. Aby se vlnění stočilo o devadesát stupňů, musí uplynout čas

$$t_{\pi/2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\lambda B}{2\rho}} = \frac{\pi\rho}{\lambda B} .$$

Za tuto dobu urazí vlnění vzdálenost

$$L_{\pi/2} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} t_{\pi/2} = \frac{\pi\sqrt{T\rho}}{\lambda B} ,$$

kterou lze vyjádřit také pomocí parametru β jako

$$L_{\pi/2} = \frac{\pi}{k\beta} .$$

Jevu stáčení polarizace vlnění se říká Faradayova rotace.

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz