Úloha VI.4 ... spatřil jsem kometu

8 bodů; (chybí statistiky)

Dlouhoperiodické a neperiodické komety začnou vyvrhovat plyn zpravidla při překročení dráhy Saturnu. Do té doby se pro pozorovatele na Zemi jeví jen jako malé kusy skal, a jsou tedy téměř nepozorovatelné. Uvažujte kometu se vzdáleností v přísluní rovnou $q = 0{,}5\,\mathrm{au}$ a odhadněte, za jak dlouho od okamžiku, kdy překoná dráhu Saturnu, poprvé překročí dráhu Země. Trajektorie komety má excentricitu velmi blízko jedné. *Dodo na cvičení z astrofyziky.*

Skúsme najprv preložiť riešenie do jazyka výpočtov. Dlhoperiodické a neperiodické kométy sa pohybujú po dráhach blízkych parabole s excentricitou $e = 1$. Ohnisko paraboly podľa prvého Keplerovho zákona leží v Slnku. Tieto dráhy sú ďalej význačné nulovosťou celkovej mechanickej energie. Zaujíma nás čas, ktorý trvá kométe priblíženie sa k Slnku zo vzdialenosti asi $r_1 = 9{,}6\,\mathrm{au}$, čo odpovedá veľkej polose Saturnovej dráhy, do vzdialenosti $r_2 = 1{,}0\,\mathrm{au}$. Ďalej zo zadania máme vzdialenosť kométy v príslní $q = 0{,}5\,\mathrm{au}$.

Prvou úlohou je určiť polohu kométy na dráhe v týchto dvoch okamihoch. Toto môžme vykonať dvomi rôznymi spôsobmi. Ak poznáme rovnicu kužeľosečky, resp. paraboly v polárnych súradniciach, tak máme

$$r(\theta) = \frac{2q}{1 + \cos\theta}\,,$$

kde θ je pravá anomália - uhol, ktorý zviera sprievodič v príslní so sprievodičom kométy vo vzdialenosti r od Slnka. Jednoduchou úpravou a dosadením máme

$$\theta = \arccos\frac{2q - a}{a}\,, \quad \theta_1 = 153{,}6^\circ\,, \quad \theta_2 = 90{,}0^\circ\,.$$[1]

Druhou možnosťou je narysovať si situáciu, či už na milimetrový papier[2] alebo napr. v Geogebre. Ak umiestnime Slnko do bodu $(0, 0)$ a orientujeme parabolu nahor, dostávame okrem uhlov aj súradnice bodov pre prienik $X_1 = (4{,}27, 8{,}60)$ s dráhou Saturnu a $X_2 = (1{,}00, 0{,}00)$ s dráhou Zeme. Rovno si môžeme uviesť aj rovnicu našej paraboly

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)\,,$$

kde ako jednotku dĺžky prirodzene používame astronomickú jednotku.

Ťažším krokom je ale určiť čas, za ktorý sa medzi týmito bodmi kométa premiestni. Opäť, ak sa v problematike dobre orientujeme, môžeme naraziť na Barkerovu rovnicu pre pohyb po parabolickej dráhe[3]

$$t = \sqrt{\frac{2q^3}{GM}}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right)\,,$$

kde t je čas, za ktorý trvá kométe cesta z príslnia ($\theta = 0^\circ$) do anomálie θ, G je gravitačná konštanta a M je hmotnosť Slnka. V ďalších výpočtoch s výhodou využijeme hodnotu tejto konštanty $GM \doteq 4\pi^2\,\mathrm{au}^3{\cdot}\mathrm{y}^{-2}$ použijúc astronomickú jednotku na meranie dĺžky a rok (y) na meranie času. Jednoduchým dosadením dostávame hodnoty časov $t_1 = 2{,}399\,\mathrm{y}$ a $t_2 = 0{,}106\,\mathrm{y}$. Odpoveďou na zadanú otázku je ich rozdiel $T \doteq 2{,}29\,\mathrm{y}$.

[1] Správne by mali byť obe hodnoty s mínusom, kométa totiž do príslnia ešte len smeruje a anomálie sa merajú v smere pohybu.

[2] Postup ako pomocou pravouhlého pravítka, nitky a špendlíka zostrojiť parabolu je napr. tu `https://en.wikipedia.org/wiki/Parabola#Pin_and_string_construction`

[3] Jedná sa o verziu známejšej Keplerovej rovnice a vzťahu medzi pravou a excentrickou anomáliou v limite $e \to 1$ a $q = a\,(1 - e)$ je konštantné.

Čo však v prípade, ak Barkerovu rovnicu nepoznáme a nepodarilo sa nám ju nájsť? Môžeme postupovať priamo podľa druhého Keplerovho zákona! Ten hovorí, že plocha opísaná sprievodičom telesa je priamo úmerná časovému intervalu. Ak určíme hodnotu tejto plošnej rýchlosti a veľkosť plochy výseku paraboly, predelením dostaneme aj čas. Dá sa nahliadnuť, že plošná rýchlosť nadobúda hodnotu $w = \frac{1}{2} r_\mathrm{p} v_\mathrm{p}$, v príslní je vektor rýchlosti $\mathbf{v}_\mathrm{p}$ kolmý na sprievodič dĺžky $r_\mathrm{p} = q$, plocha opísaná za krátky čas je plôška trojuholníka $\Delta S = \frac{1}{2} r_\mathrm{p} v_\mathrm{p} \Delta t$. Rýchlosť v príslní určíme zo zachovania energie, pre parabolickú orbitu

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = 0\,, \quad v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2GM}{r_\mathrm{p}}}\,,$$

čo je mimochodom známy vzťah pre únikovú rýchlosť. Po číselnom dosadení dostávame $v_\mathrm{p} = 12{,}56\,\mathrm{au{\cdot}y^{-1}}$ a $w = 3{,}141\,5\,\mathrm{au^2{\cdot}y^{-1}}$.

Plochu výseče môžeme určiť pomocou vhodného softvéru (napríklad Blender), odčítať ako počet štvorčekov z milimetrového papiera, alebo pomocou integrácie funkčnej závislosti trajektórie. Plochu dostaneme ako rozdiel plochy trojuholníka s plochou pod grafom paraboly na obrázku 1, kde y_1, x_1, x_2 sú súradnice bodov X_1 a X_2 určené vyššie.

$$S = \frac{x_1 y_1}{2} - \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)\mathrm{d}x\,,$$

$$S = \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{x_1^3}{6} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2^3}{6} - \frac{x_2}{2}\,,$$

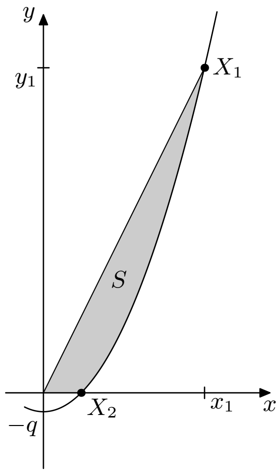
$$S = 7{,}204\,\mathrm{au}^2\,.$$

Čas medzi prechodmi kométy týmito bodmi dostaneme ako $T = S/w = 2{,}29\,\mathrm{y}$ rovnako ako v prvom postupe. Celá úloha sa dá taktiež po určení rýchlosti v perihéliu riešiť aj numerickou simuláciou z pohybových rovníc vo vašom obľúbenom programovacom jazyku, alebo tabuľkovom kalkulátore.

Od objavenia takejto kométy máme teda niečo vyše dvoch rokov do potenciálnej zrážky so Zemou. Ďalej vidíme, že vo vnútri obežnej dráhy Zeme strávi kométa veľmi málo času, iba približne dva mesiace. Vzhľadom na prudkú závislosť jasnosti kométy na vzdialenosti od Slnka tiež vidíme, že na pozorovanie jasnej kométy ako C/2020 F3 (NEOWISE) na oblohe je pomerne málo času, v ráde týždňov až mesiacov. Kométy sú na pozemskej oblohe len krátkodobé javy, čo však nebráni tomu, aby mohli ohromiť jej dnešnú populáciu, či desiť ľudstvo v minulosti.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



Obr. 1: Výpočet plochy opísanej sprievodičom komèty.