Úloha VI.2 ... rotující kyvadélko

3 body; (chybí statistiky)

Mějme matematické kyvadlo délky l se závažím o hmotnosti m v tíhovém poli se zrychlením g. Kyvadélko uvedeme do rotačního pohybu okolo svislé osy s konstantní úhlovou rychlostí ω. Určete stabilní polohy kyvadla. Výsledek vyjádřete pomocí úhlu od svislice.

Jindra se chtěl zhoupnout na demoliční kouli s kladivem v ruce.

Budeme počítat v neinerciální soustavě spojené s rotujícím kyvadélkem. Na hmotný bod působí ve svislém směru tíhová síla mg, ve vodorovném směru odstředivá síla $m\omega^2 r$ a ve směru podél tyče tahová síla. Poloměr otáčení je $r = l \sin\varphi$, kde φ je úhel od svislice. Poloha bude stabilní, pokud výslednice tíhové a odstředivé síly bude působit rovnoběžně s tyčí, takže se vyruší s tahovou silou lanka

$$\frac{m\omega^2 l \sin\varphi}{mg} = \operatorname{tg}\varphi\,,$$

$$\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 l}\,. \tag{1}$$

Úhel φ pak definuje rovnovážnou polohu kyvadla. Jak ale určit, zda je labilní, anebo stabilní? K tomu se přidává i druhý problém – kosinus úhlu musí být vždy menší nebo roven jedné. Výše odvozený vztah má tedy smysl, pouze pokud $g/\omega^2 l \leq 1$. V řešení tudíž musíme rozlišit dva případy, a sice $\omega \geq \omega_c = \sqrt{g/l}$ a $\omega < \omega_c = \sqrt{g/l}$.

Když se zamyslíme, přijdeme na to, že existují ještě dvě další rovnovážné polohy, a to $\varphi_1 = 0$ a $\varphi_2 = 180^\circ = \pi$. V obou případech nepůsobí na závaží žádná odstředivá síla a tahová síla (či tlaková síla v případě φ_2) od tyče vyrovnává účinky tíhové síly. Výslednice všech sil působících na závaží je nulová.

Horní poloha charakterizovaná úhlem φ_2 je nepochybně labilní. Pokud vychýlíme závažíčko z rovnovážné polohy, odstředivá síla jej začne odtlačovat pryč a tíhová síla jej potáhne dolů. Závaží už se do rovnovážné polohy nevrátí.

Závaží se pohybuje v jakési krajině potenciální energie, jež závisí na úhlu odklonu od svislice φ. Právě jsme si dokázali, že rovnovážná poloha $\varphi_2 = \pi$ je labilní; leží totiž na kopečku potenciální energie. V každé krajině (i v krajině potenciální energie) však musí být vedle kopečku údolí. Nemohou spolu přímo sousedit dva kopečky, proto následující rovnovážná poloha bude stabilní. V případě $\omega < \omega_c$ je další rovnovážnou polohou úhel $\varphi_1 = 0$. Jde o minimum potenciální energie, dno údolí.

V případě $\omega \geq \omega_c$ je však další rovnovážnou polohou úhel odvozený v rovnici (1), tj. úhel $\varphi_3 = \arccos(g/(\omega^2 l))$. To bude stabilní poloha v minimu potenciální energie. Další rovnovážná poloha je $\varphi_1 = 0$, ale ta musí být tentokrát na kopečku, neboť spolu nemohou přímo sousedit ani dvě údolí!

Došli jsme k nesmírně zajímavému výsledku. Pokud začneme otáčet kyvadlem okolo svislé osy, při malých úhlových rychlostech se nic nestane, kyvadlo zůstane viset v poloze $\varphi_1 = 0$. Teprve když úhlová rychlost překročí kritickou hranici $\omega_c = \sqrt{g/l}$, poloha $\varphi_1 = 0$ se najednou stane lokálním maximem potenciální energie a kyvadlo se odkloní od svislé osy. Stabilní poloha kyvadla bude dána úhlem odklonu

$$\varphi_3 = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}.$$

Samozřejmě se můžete ptát, jak víme, že jde skutečně o dno údolíčka; co když jde jenom o inflexní bod na svahu kopce? To jsou otázky, na které může dát odpověď jen matematická analýza situace. To jsme ale u vašeho řešení nutně nevyžadovali. Důležité bylo použít fyzikální intuici a najít, že existuje rozdíl mezi rovnovážnými polohami pro $\omega < \omega_c$ a $\omega \geq \omega_c$, tj. že pro malé úhlové rychlosti zůstane kyvadlo v poloze $\varphi_1 = 0$, zatímco při velkých úhlových rychlostech se odkloní. Pokud se chcete přesvědčit, že jsme nalezené rovnovážné polohy označili správně jako minima a maxima potenciální energie, na dalších dvou stranách uvádíme exaktní řešení pomocí minimalizace potenciální energie.

Exaktní řešení pomocí hledání minima potenciální energie

Gravitační potenciální energie závaží je $mgl(1-\cos\varphi)$. Taktéž odstředivé síle můžeme přiřadit potenciální energii. Odstředivá síla se snaží „odtlačit“ závaží co nejdále od osy otáčení. Závislost potenciální energie na vzdálenosti od osy zjistíme integrováním (je to záporná práce vykonaná odstředivou silou)

$$U_o(r) = -\int_0^r m\omega^2\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 l^2\sin^2\varphi .$$

Tahová síla lana nepřidá žádnou potenciální energii, neboť působí vždy kolmo na pohyb závaží.

Pokud soustava rotuje úhlovou rychlostí ω, závisí potenciální energie závaží na úhlu od svislice φ jako

$$U = mgl(1-\cos\varphi) - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2\sin^2\varphi . \tag{2}$$

Rovnovážná poloha bude v minimu potenciální energie. Nejprve najdeme lokální extrémy tak, že první derivaci položíme rovnou nule

$$\frac{dU}{d\varphi} = mgl\sin\varphi - m\omega^2 l^2\sin\varphi\cos\varphi = mgl\sin\varphi\left(1 - \frac{\omega^2 l}{g}\cos\varphi\right) = 0 .$$

Úhel odklonu φ musí ležet v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Naše rovnice pro polohy lokálních extrémů má tudíž dvě až tři řešení. Dvě z řešení jsou okraje intervalu $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, kdy platí $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = 0$, a třetí řešení je $\varphi_3 = \arccos(g/(\omega^2 l))$, ovšem to dává smysl jen tehdy, když je poměr $\omega^2 l/g$ větší nebo roven 1.

V dalším kroku musíme určit, které z lokálních extrémů φ_1, φ_2 a φ_3 jsou minima. To zjistíme prostřednictvím druhé derivace potenciální energie

$$\frac{dU}{d\varphi} = mgl\sin\varphi - m\omega^2 l^2\sin\varphi\cos\varphi = mgl\sin\varphi - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2\sin(2\varphi),$$
$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = mgl\cos\varphi - m\omega^2 l^2\cos(2\varphi) = mgl\cos\varphi - m\omega^2 l^2(2\cos^2\varphi - 1),$$

kam dosadíme polohy lokálních extrémů

$$mgl\cos\varphi_1 - m\omega^2 l^2(2\cos^2\varphi_1 - 1) = mgl\left(1 - \frac{\omega^2 l}{g}\right),$$
$$mgl\cos\varphi_2 - m\omega^2 l^2(2\cos^2\varphi_2 - 1) = mgl\left(-1 - \frac{\omega^2 l}{g}\right),$$
$$mgl\cos\varphi_3 - m\omega^2 l^2(2\cos^2\varphi_3 - 1) = mgl\left(\frac{g}{\omega^2 l} - \frac{\omega^2 l}{g}\left(2\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2 - 1\right)\right) = mgl\left(-\frac{g}{\omega^2 l} + \frac{\omega^2 l}{g}\right).$$

Vidíme, že v poloze $\varphi_2 = \pi$ je vždy lokální maximum potenciální energie, protože druhá derivace je záporná. Na poloze $\varphi_1 = 0$ může být buď lokální minimum (jestliže $\omega^2 l/g < 1$), anebo lokální maximum (pokud $\omega^2 l/g > 1$). Řekli jsme, že třetí řešení dává smysl jen v případě $\omega^2 l/g \geq 1$. Možnost $\omega^2 l/g = 1$ prozkoumáme později, avšak v případě $\omega^2 l/g > 1$ se na poloze φ_3 jistě nachází lokální minimum.

Došli jsme ke stejnému výsledku. Pokud začneme otáčet kyvadlem okolo svislé osy, při malých úhlových rychlostech se nic nestane, kyvadlo zůstane viset v poloze $\varphi = 0$, kde je minimum potenciální energie. Teprve ve chvíli, kdy úhlová rychlost překročí jistou kritickou hodnotu $\omega_c = \sqrt{g/l}$, se kyvadlo odkloní od svislé osy a rovnovážná poloha bude

$$\varphi = \arccos \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Dojde tedy k jakémusi fázovému přechodu mezi řešeními.

Ještě zbývá odpovědět na otázku, co se děje, když nastává rovnost $\omega^2 l/g = 1$. V takovém případě splývají řešení $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$. Fyzikální intuice nám napovídá, že jde o lokální minimum, jenže druhá derivace potenciální energie je v této poloze nulová. Jak máme dokázat, že jde skutečně o minimum?

Nejpřímější cesta je dosadit $\omega^2 = g/l$ do vztahu (2)

$$U = mgl(1 - \cos\varphi) - \frac{1}{2} mgl \sin^2\varphi = mgl\left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{4}\left(\cos(2\varphi) - 1\right)\right), \tag{3}$$

kam budeme dále dosazovat po řadě $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$, z čehož dostaneme $U(0) = 0$ a $U(\pi) = 2mgl$. Mezi úhly 0 a π se nenachází žádné lokální minimum ani maximum, tudíž hodnoty $U(\varphi)$ pro $\varphi \in (0, \pi)$ musí být $0 < U(\varphi) < 2mgl$. Na úhlu $\varphi = 0$ je proto minimum potenciální energie.

Hlubší vhled do této situace získáme tak, že provedeme Taylorův rozvoj rovnice (3) v okolí $\varphi = 0$

$$U(\varphi) = mgl\left(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{4}\frac{1}{2}(2\varphi^2) + \frac{1}{4}\frac{1}{24}(2\varphi)^4 + O(\varphi^6)\right) = mgl\frac{1}{8}\varphi^4 + O(\varphi^6).$$

Vidíme, že při kritické úhlové rychlosti $\omega_c = \sqrt{g/l}$ má potenciál v okolí rovnovážné polohy $\varphi = 0$ kvartický průběh, nikoliv kvadratický. Proto je druhá derivace nulová, avšak poloha $\varphi = 0$ je stále minimem.

Na otázku v zadání úlohy odpovídáme tak, že pro úhlové rychlosti otáčení kyvadla $\omega \leq \sqrt{g/l}$ je stabilní rovnovážná poloha $\varphi = 0$, zatímco pro úhlové rychlosti $\omega > \sqrt{g/l}$ se stabilní rovnovážnou polohou stává $\varphi = \arccos(g/(\omega^2 l))$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.